Matematica C3 – Algebra 1

Manuale di algebra per il biennio della scuola secondaria di secondo grado

Coordinatori del progetto

Antonio Bernardo
Anna Cristina Mocchetti
Claudio Carboncini

Autori

Claudio Carboncini
Anna Cristina Mocchetti
Angela D'Amato
Antonio Bernardo
Germano Pettarin
Nicola Chiriano
Erasmo Modica
Francesco Daddi

Hanno collaborato

Laura Todisco
Nicola De Rosa
Vittorio Patriarca
Luciano Sarra
Lucia Rapella
Mauro Paladini
Giuseppe Pipino
Gemma Fiorito
Nicoletta Passera
Anna Rita Lorenzo
Luca Frangella
Mario Bochicchio
Daniele Zambelli
Paolo Baggiani
Francesco Speciale
Maria Rosaria Agrello
Francesca Lorenzoni
Anna Maria Cavallo
Silvia Monatti
Dorotea Jacona
Pierluigi Cunti
Alessandro Castelli
Raffaele Santoro
Angela Iaciofano
Michela Todeschi
Luca Tedesco
Alessandro Paolino
Alberto Giuseppe Brudaglio
Sara Gobbato
Elena Stante
Andrea Celia
Simone Rea
Francesco Camia
Piero Sbardellati
Alessandra Marrata
Luca Pieressa
Pareo Deborah

Collaborazione, commenti e suggerimenti

Se vuoi contribuire anche tu alla stesura e aggiornamento del manuale Matematica C^3 o se vuoi inviare commenti e/o suggerimenti scrivi a antoniobernardo@matematicamente.it

Versione del documento

Versione 3.1 del 04.04.2012

Stampa

Terza edizione, settembre 2012

Dati tecnici per l'adozione del libro a scuola:

Titolo: Matematica C3, Algebra 1 terza edizione
Codice ISBN: 9788896354117
Editore: Matematicamente.it
Anno di edizione: 2012
Prezzo: 0,00
Formato: ebook (PDF+ODT)

Prefazione

Guardando i libri di testo sia con gli occhi dell'insegnante che li usa, sia dell'autore che li scrive, ci si rende conto di un fatto banale: chi scrive i manuali scolastici sono gli insegnanti, chi li usa sono sempre gli insegnanti. Dal momento che oggi ci sono gli strumenti, sia quelli elettronici, sia il sistema della stampa su richiesta, che permettono di "circuitare" direttamente autori e fruitori, mi sono deciso a intraprendere la creazione di un manuale di matematica “libero”, nel senso più ampio che oggi, nell'era delle tecnologie dell'informazione e della comunicazione, si usa dare a questo termine. Tuttavia, adottare “ufficialmente” un testo scolastico nella scuola italiana è un fatto semplice solo se si segue un percorso consolidato nel tempo, fatto più che altro di prassi e abitudini che non di leggi specifiche. Per rispondere a queste esigenze questo Manuale è fatto di Autori, Contenuti, Supporti e Dati legali.

Obiettivi. Il progetto "Matematica C^3" ha per obiettivo la realizzazione di un manuale di matematica, per tutto il percorso scolastico e per ogni tipologia di scuola, scritto in forma collaborativa e con licenza Creative Commons. Si propone, quindi, di abbattere i costi dell'istruzione, ridurre il peso dei libri, invogliare gli studenti che non avrebbero comprato un libro ad usarlo almeno in forma gratuita, promuovere l'auto-formazione per chi è fuori dai percorsi scolastici. Ha inoltre l'ambizione di avviare una sfida "culturale" più ampia di una scuola più democratica, più libera, dove ognuno possa accedere gratuitamente almeno alle risorse di base.

Autori. Il manuale è scritto in forma collaborativa da diverse decine di docenti di matematica sulla base della loro esperienza reale di insegnamento nelle diverse scuole. Alla sua realizzazione hanno contribuito anche studenti e appassionati. Tutti hanno contribuito in maniera gratuita e libera.

Contenuti. Matematica C3 si presenta come un *work in progress* sempre aggiornato e migliorabile da parte di tutti, docenti e studenti. Può essere liberamente personalizzato da ciascun insegnante per adeguarlo alla scuola in cui insegna, al proprio modo di lavorare, alle esigenze dei suoi studenti. È pensato non tanto per lo studio della teoria, che resta principalmente un compito dell'insegnante, quanto per fornire un'ampia scelta di esercizi da cui attingere per “praticare” la matematica. Lo stile scelto è quello di raccontare la matematica allo stesso modo in cui l'insegnante la racconta in classe di fronte agli studenti. Il libro quindi non è rivolto a un pubblico di studenti immaginari, ma agli studenti che noi docenti siamo abituati ad avere in classe. Gli argomenti sono trattati secondo un approccio laboratoriale, senza distinguere eccessivamente tra teoria ed esercizi; teoria, esempi svolti, esercizi guidati, esercizi da svolgere vengono presentati come un tutt’uno.

Supporti. Matematica C3 è scaricabile dal sito www.matematicamente.it. È disponile in formato elettronico pdf completamente gratuito; è disponibile anche nella versione per software liberi e gratuiti come OpenOffice o LibreOffice; è in lavorazione una versione in LaTeX. I diversi volumi che compongono l'opera possono essere stampati, fotocopiati in proprio o stampati in tipografia per le sole le parti che occorrono, in nessun caso ci sono diritti d’autore da pagare agli autori o all’editore. Il docente che vorrà sperimentare nuove forme d'uso può usarlo in formato elettronico su tablet pc, netbook o più semplicemente pc portatili, può proiettarlo direttamente sulla lavagna interattiva (LIM) interagendo con il testo, svolgendo direttamente esempi ed esercizi, personalizzando con gli alunni definizioni ed enunciati; ricorrendo eventualmente a contenuti multimediali esterni presenti sui siti internet, confrontando definizioni e teoremi su Wikipedia, cercando sull'enciclopedia libera notizie storiche sugli autori. A casa lo studente potrà usare il libro sullo stesso dispositivo che ha usato in classe (tablet pc, netbook, notebook) con le annotazioni e le modifiche fatte dall'insegnante, potra svolgere gli esercizi direttamente nel formato aperto di LibreOffice, quindi direttamente sul libro senza ricopiare la traccia degli esercizi, potrà scambiare file attraverso i social network (Facebook) o i sistemi di instant messaging (Skype) particolarmente diffusi tra i ragazzi.

L’approccio di Matematica C3 è coerente con quanto sollecitato dallo stesso Ministero della Pubblica Istruzione. La circolare n.18 del 09.02.2012 afferma: “Le adozioni da effettuare nel corrente anno scolastico, a valere per il 2012/2013, presentano una novità di assoluto rilievo, in quanto, come è noto, i libri di testo devono essere redatti in forma mista (parte cartacea e parte in formato digitale) ovvero debbono essere interamente scaricabili da internet. Pertanto, per l’anno scolastico 2012/2013 non possono più essere adottati né mantenuti in adozione testi scolastici esclusivamente cartacei.”

Dati tecnici per l'adozione del libro a scuola: Titolo: Matematica C3, Algebra 1 - Codice ISBN: 9788896354117 - Editore: Matematicamente.it - Anno di edizione: 2012 - Prezzo: € 0,00 (zero) - Formato: ebook (PDF+ODT) .

Il coordinatore del progetto
prof. Antonio Bernardo

INDICE

CAPITOLO 1 NUMERI

CAPITOLO 2 INSIEMI

CAPITOLO 3 CALCOLO LETTERALE

CAPITOLO 4 EQUAZIONI

CAPITOLO 5 SCOMPOSIZIONE E FRAZIONI

CAPITOLO 6 ALGEBRA DI PRIMO GRADO

MATEMATICA C3 -ALGEBRA 1
1. NUMERI



One door, one key... Photo by: Silv3rFoX
Taken from: http://www.flickr.com/photos/12030514@N08/2272118558/

Indice

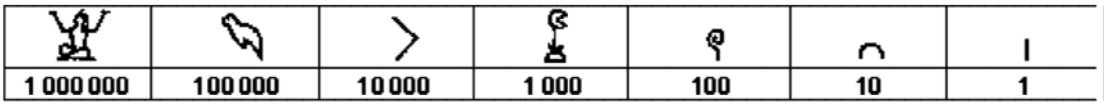
►*1.* L'origine dei numeri

L’origine del sistema dei numeri naturali si perde nella notte dei tempi. Non abbiamo documenti sufficienti per capire come l'uomo li abbia costruiti o scoperti; è possibile che il nostro sistema di numerazione sia nato contemporaneamente al linguaggio stesso della specie umana.
Sono stati ritrovati tronchi fossili risalenti a più di trentamila anni fa, recanti delle incisioni a distanza regolare. In particolare, è stato ritrovato un osso di babbuino, detto “Osso di Ishango” in quanto è stato rinvenuto presso la città di Ishango nel Congo Belga tra il Nilo e il lago Edoardo, che riporta delle tacche disposte in modo tale da farci pensare che rappresentino dei numeri o dei calcoli. L'osso risale a un periodo tra il 20.000 a.C. e il 18.000 a.C.,



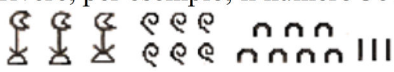
L'osso di Ishango [http://it.wikipedia.org/wiki/Osso_d'Ishango]

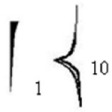
Possiamo immaginare che i pastori per contare i capi del proprio gregge, facessero delle tacche su dei bastoni mano a mano che le pecore entravano nel recinto una alla volta: una tacca per ogni pecora. Tuttavia, questo metodo di associazione uno ad uno (una tacca per una pecora) non è efficace per greggi, o oggetti da contare, di grandi dimensioni. Si immagini, per esempio, la difficoltà di tracciare cinquecento tacche su un bastone. E' possibile allora che per rappresentare numeri grandi si siano cominciati a usare simboli specifici che richiamassero alla mente i numeri grandi e che contemporaneamente siano state fissate alcune regole per associare questi simboli.
Sappiamo per certo che circa 6000 anni fa gli antichi Egizi scrivevano, incidendo sulla pietra, i numeri utilizzando geroglifici per le potenze di 10:



Le potenze del 10 nella scrittura degli antichi Egizi

Ripetendo questi simboli è possibile scrivere, per esempio, il numero 3673 così:



Gli antichi Babilonesi usavano invece i seguenti simboli 

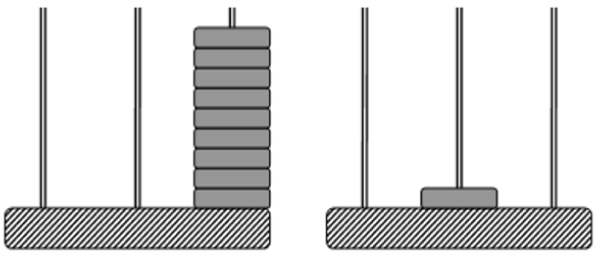
In questo modo il numero 32 veniva scritto 

I Romani usavano invece sette simboli con i quali, seguendo determinate regole, rappresentavano qualunque numero.
I simboli sono I=1 V=5 X=10 L=50 C=100 D=500 M=1000.
Il numero MM rappresenta 1000+1000 = 2000.
Il numero VI rappresenta 5+1=6, mentre il numero IV rappresenta 5-1=4.

►*2.* Il sistema di numerazione decimale posizionale

Il modo di scrivere i numeri dei romani risultava piuttosto complicato sia nella scrittura dei numeri sia nell’esecuzione dei calcoli. Il sistema moderno di scrittura dei numeri fa uso dei soli dieci simboli 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, che vengono detti **cifre**. Un numero non è altro che una sequenza ordinata di cifre, eventualmente ripetute.
Per rappresentare il numero dieci che segue il 9 non si fa uso di un simbolo diverso ma si scrivono due cifre: il simbolo 1 a sinistra e il simbolo 0 a destra.
Per chiarire questo metodo utilizziamo un pallottoliere con aste verticali capaci di contenere fino a 9 dischetti: per rappresentare il numero 10 dispongo un dischetto nell’asta a sinistra e vuoto la prima asta: il numero dieci viene rappresentato dalla scrittura 10.
I dischetti sull'ultima asta rappresentano il numero 9; un dischetto sulla penultima rappresenta il numero 10.
Per rappresentare il numero cento si fa uso della scrittura 100. Ovvero si sposta il numero 1 ancora
a sinistra ponendo uno zero nel posto lasciato vuoto. Questo metodo può essere ripetuto per rappresentare tutti i numeri che risultino potenza di dieci, ovvero dieci, cento, mille…

Le potenze di 10 sono importanti nel sistema decimale poiché rappresentano il peso di ciascuna cifra di cui è composto il numero. Nel pallottoliere ciascuna asta indica una potenza di dieci. Il valore di un numero si ottiene moltiplicando ciascuna cifra per il suo peso e sommando i valori ottenuti.



Per esempio, tre dischetti nella terza asta rappresentano il numero $3\cdot 10^2=300$. Il numero 219 si rappresenta tenendo conto di questa scrittura $2\cdot 10^2+1\cdot 10+9$.
Per quanto detto, il sistema di numerazione che usiamo è decimale o a base dieci, perché usiamo dieci simboli (cifre) per scrivere i numeri, posizionale perché una stessa cifra assume un peso (valore) diverso a seconda della posizione che occupa.

►*3.* I numeri naturali

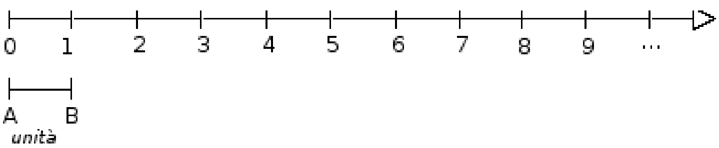
I primi numeri che abbiamo usato sin da bambini per contare gli oggetti o le persone si chiamano **numeri naturali**

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13…

L'insieme di tutti questi numeri si indica con la lettera $\mathbb{N}$.
Cosa hanno in comune le dita di una mano, con 5 mele, 5 penne, 5 sedie...? Evidentemente il numero 5. Una caratteristica cioè che è comune a tutti gli insiemi formati da 5 oggetti. Questa caratteristica può essere vista come un oggetto a se stante, un oggetto astratto di tipo matematico.
Ma i numeri naturali non servono solo per indicare quanti oggetti ci sono (aspetto **cardinale** del numero), vengono usati anche per rappresentare l'ordine con cui si presentano gli oggetti, (aspetto **ordinale**), l'ordine per esempio con cui i corridori arrivano al traguardo: primo, secondo, terzo...
Nonostante i numeri naturali e le operazioni su di essi ci vengano insegnati fin da piccoli, e nonostante l'umanità li usi da tempi antichissimi una loro piena comprensione non è semplice, come dimostra il fatto che ancora oggi i matematici ne discutono. Il dibattito su cosa siano i numeri e su cosa si fondano è stato particolarmente animato nei primi decenni del XX secolo, quando ne hanno discusso matematici e filosofi come Frege, Peano, Russell, Hilbert e tanti altri. Oggi ci sono diversi punti di vista.

Rappresentazione geometrica

I numeri naturali possono essere rappresentati su una semiretta: si identifica il numero 0 con l'origine della semiretta, come verso di percorrenza si prende quello da sinistra verso destra, e come unità di misura un segmento AB. Si riporta questa unità di misura più volte partendo dall'origine e a ogni passo si va al numero successivo.



Ogni numero naturale si costruisce a partire dal numero 0 e passando di volta in volta al numero successivo: 1 è il successore di 0, 2 è il successore di 1, 3 è il successore di 2, etc. Ogni numero naturale ha il successore e ogni numero, a eccezione di 0, ha il precedente. L'insieme $\mathbb{N}$ ha 0 come elemento minimo e non ha un elemento massimo.
I numeri rappresentati sulla retta sono sempre più grandi man mano che si procede da sinistra verso destra. Ogni numero è maggiore di tutti i suoi precedenti, quelli che stanno alla sua sinistra, e minore di tutti i suoi successivi, quelli che stanno alla sua destra. Tra i numeri naturali esiste quindi una relazione d'ordine, che si rappresenta con il simbolo di disuguaglianza $\leq$ o disuguaglianza stretta $<$.
Grazie a questo ordinamento, è sempre possibile confrontare due numeri naturali qualsiasi *n*, *m*, ottenendo uno solo dei seguenti tre casi:

legge di tricotomia $n > m$, $n < m$, $n = m$

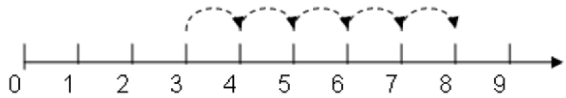
►*4.* Operazioni con i numeri naturali

Addizione e moltiplicazione di numeri naturali

Tra i numeri naturali è definita l'operazione di addizione come segue:

DEFINIZIONE. Dati due numeri naturali *n* e *m*, detti **addendi**, l'operazione di **addizione** associa ai due addendi un terzo numero s, detto **somma**, che si ottiene partendo da n e procedendo verso i successivi di n tante volte quante indica il secondo addendo m. Si scrive n+m=s.

Ad esempio se vogliamo eseguire la somma 3 + 5 dobbiamo partire da 3 e contare 5 numeri successivi:



DEFINIZIONE. Dati due numeri naturali n e m, detti **fattori**, l'operazione di **moltiplicazione** associa ai due fattori un terzo numero p, detto **prodotto**, che si ottiene sommando n addendi tutti uguali a m.

L'operazione di moltiplicazione si indica con diversi simboli:

$$p=n\times m \quad , \quad p=n\cdot m \quad , \quad p=n*m$$

Per eseguire la moltiplicazione $4\cdot 2$ dobbiamo addizionare 2+2+2+2, otteniamo 8.

Le operazioni di addizione e moltiplicazione si dicono **operazioni interne** all'insieme dei numeri naturali, esse infatti danno sempre come risultato un numero naturale.

1 Rispondi alle seguenti domande

a) Esiste il numero naturale che aggiunto a 3 dà come somma 6?
b) Esiste il numero naturale che aggiunto a 12 dà come somma 7?
c) Esiste il numero naturale che moltiplicato per 4 dà come prodotto 12?
d) Esiste il numero naturale che moltiplicato per 5 dà come prodotto 11?

Sottrazione e divisione di numeri naturali

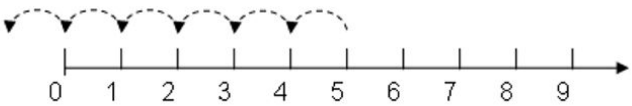
Diamo la seguente definizione.

DEFINIZIONE. Dati due numeri naturali n e m, il primo detto **minuendo** e il secondo **sottraendo**, si dice **differenza** il numero naturale d, se esiste, che aggiunto ad m dà come somma n. Si scrive n-m=d.

Per esempio, 7-5 = 2 perché 5+2=7.
Non esiste invece la differenza tra 5 e 7, in quanto nessun numero naturale aggiunto a 7 può dare 5.
Ritornando alla rappresentazione dei numeri naturali sulla semiretta orientata, la differenza tra i numeri 7 e 5 si può trovare partendo da 7 e procedendo a ritroso di 5 posizioni.



Diventa allora evidente perché non è possibile trovare la differenza tra 5 e 7, infatti partendo dal 5 non è possibile andare indietro di 7 posizioni, poiché non è possibile andare oltre il numero 0 che è il più piccolo dei numeri naturali.



Si può osservare allora che in $\mathbb{N}$ la sottrazione a - b è possibile solo se $b \leq a$

DEFINIZIONE. Dati due numeri naturali *n* e *m*, con *m ≠0*, il primo detto **dividendo** e il secondo **divisore**, si dice **quoziente esatto** un numero naturale *q*, se esiste, che moltiplicato per *m* dà come prodotto *n*. Si scrive *n:m=q*.

Se il quoziente esiste, il numero *m* si dice **divisore** di *n*, oppure *n* è **divisibile** per *m*.

DEFINIZIONE. Un numero naturale *a* si dice **multiplo** di un numero naturale *b* se esiste un numero *c* che moltiplicato per *b* dà *a,* cioè $a=c\cdot b$.

Esempi

- 12:3=4 perché 3x4=12.
  Quindi, 12 è divisibile per 3; 3 è un divisore di 12; 12 è un multiplo di 3.
- 20 è divisibile per 4 perché 20:4=5.
- 7 è divisore di 35 perché 35:7=5.
- 6 è multiplo di 3 perché 6=2x3.
- 5 non è multiplo di 3, non esiste alcun numero naturale che moltiplicato per 3 dà 5

Osservazione
In $\mathbb{N}$ la divisione tra due numeri a e b è possibile solo se a è multiplo di b.

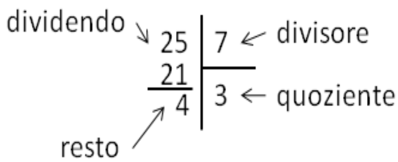
2 Inserisci il numero naturale mancante, se esiste:

a) 7 - ... = 1	3 - 3 = …	5 - 6 = ...
b) 3 - ... = 9	15 : 5 =....	18 : .... = 3
c) …. : 4 = 5	12 : 9 = ….	36 · … = 9

Come hai potuto notare dagli esercizi precedenti la divisione tra due numeri naturali non è sempre possibile. Con i numeri naturali però è sempre possibile eseguire la divisione con il resto.

DEFINIZIONE. Dati due numeri naturali *n* e *m* , con *m ≠0*, si dice **quoziente** tra *n* e *m*, il più grande numero naturale *q* che moltiplicato per *m* dà un numero minore o uguale a *n*. Si dice **resto** della divisione tra *n* e *m* la differenza *r* tra il dividendo *n* e il prodotto tra il divisore *m* e il quoziente *q*.
In simboli $r=n-m\times q$ o anche $n=m\times q+r$

Esempi



Nella divisione con resto tra 25 e 7 si ha quoziente 3 (infatti 7x3=21 mentre 7x4=28 supera il dividendo) e resto 4 (infatti 25-21=4). Pertanto si può scrivere 25=7x3+4.

- 0:2 = 0
- 1:2 = 0 con resto 1
- 5:2 = 2 con resto 1

Osservazione
Nella definizione di quoziente abbiamo sempre richiesto che il divisore sia diverso da zero. In effetti se il divisore è 0 non c'è nessun numero che moltiplicato per 0 ci possa dare un dividendo diverso da zero.
Per esempio, nella divisione 5:0 dobbiamo ottenere un numero che moltiplicato per 0 dà 5; ciò non è possibile in quanto qualsiasi numero moltiplicato per 0 dà 0.
Invece nella divisione 0:0 un qualsiasi numero è adatto come quoziente, infatti qualsiasi numero moltiplicato per 0 dà 0 come prodotto.
Nel linguaggio matematico diciamo che una divisione del tipo n:0, con n≠0, è **impossibile**; mentre la divisione 0:0 diciamo che è **indeterminata**.

DEFINIZIONE. Dati due numeri naturali *n* e *m*, con *m ≠0*, la **divisione intera** $n\,\text{div}\,m$ è l'operazione che dà il più grande numero naturale q (il quoziente) per il quale si ha $q\times m\leq n$.

Non è possibile eseguire la divisione intera per 0.

- 3 div 0 = *non si può fare*   0 div 5 = 0
- 9 div 2 = 4   3 div 5 = 0

DEFINIZIONE. Dati due numeri naturali *n* e *m*, con *m ≠0*, l'operazione che restituisce il resto della divisione intera tra *n* e *m* si chiama **modulo di n rispetto a m** e si indica con $n\,\text{mod}\,m$.

Esempi

- 3 *mod* 0 = *non si può fare*   0 *mod* 5 = 0
- 9 *mod* 2 = 1   10 *mod* 5 = 0
- 3 *mod* 5 = 3   11 *mod* 5 = 1

3 Vero/falso?

a) 5:0=0 V F
b) 0:5=0 V F
c) 5:5=0 V F
d) 1:0=1 V F
e) 0:1=0 V F
f) 0:0=0 V F
g) 1:1=1 V F
h) 1:5=1 V F

4 Se è vero che $p=n\times m$ quali affermazioni sono vere?

a) p è multiplo di n V F
b) p è multiplo di m V F
c) m è multiplo di p V F
d) m è multiplo di n V F
e) p è divisibile per m V F
f) m è divisibile per n V F
g) p è divisore di m V F
h) n è divisore di m V F

5 Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

a) 6 è un divisore di 3 V F
b) 3 è un divisore di 12 V F
c) 8 è un multiplo di 2 V F
d) 5 è divisibile per 10 V F

6 Esegui le seguenti operazioni

a) 18 div 3= ……
b) 18 mod 3 = …….
c) 20 div 3= ……
d) 20 mod 3 = …….
e) 185 div 7= ……
f) 185 mod 7 = …….
g) 97 div 5= ……
h) 97 mod 5 = …….
i) 240 div 12= ……
j) 240 mod 12 = …….

Ripassiamo l'algoritmi della divisione intera per numeri a più cifre; questo algoritmi risulterà particolarmente utile per la divisone di polinomi che studierai nel seguito

Esempi

3	2	7	2	3	
2	3		1	4	
	9	7			
	8	6			
	1	1			

1	3	2	9	1	0	7
1	0	7		1	2	
	2	5	9			
	2	1	4			
		4	5			

1	2	5	9	4	3	1	7	1
1	1	9	7			7	3	6
		6	2	4				
		5	1	3				
		1	1	1	3			
		1	0	2	6			
				8	7			

327 : 23 = quoziente 14 e resto 11
1329 : 107 = quoziente 12 e resto 45
125943 : 171 = quoziente 736 e resto 87

7 Esegui le seguenti divisioni con numeri a più cifre, senza usare la calcolatrice

a) 311 : 22	429 : 37	512 : 31	629 : 43
b) 755 : 53	894 : 61	968 : 45	991 : 13
c) 1232 : 123	2324 : 107	3435 : 201	4457 : 96
d) 5567 : 297	6743 : 311	7879 : 201	8967 : 44
e) 13455 : 198	22334 : 212	45647 : 721	67649 : 128

►5. Proprietà delle operazioni

Proprietà commutativa

Una operazione gode della proprietà commutativa se, cambiando l'ordine dei numeri sui quali essa va eseguita, il risultato non cambia.
La proprietà commutativa vale sia per l'addizione che per la moltiplicazione.

$$a+b=b+a; \quad 3+5=5+3=8$$
$$a\cdot b=b\cdot a; \quad 3\cdot 5=5\cdot 3=15$$

La proprietà commutativa non vale per le seguenti operazioni: sottrazione, divisione, divisione intera, modulo e potenza.

$$a-b\neq b-a; \quad 8-3=5\neq 3-8=\text{non si può fare}$$
$$a : b\neq b : a; \quad 8-4=2\neq 4-8=0$$
$$a \text{ div } b \neq b \text{ div } a \quad 17 \text{ div } 5=3 \neq 5 \text{ div } 17=0$$
$$a \; mod \; b \neq b \; mod \; a \quad 9 \; mod \; 2=1 \neq 2 \; mod \; 9=2$$
$$a^b\neq b^a$$
$$3^2=9\neq 2^3=8$$

Proprietà associativa

Un'operazione gode della proprietà associativa se, presi arbitrariamente tre numeri legati da due operazioni, è indifferente da quale operazione si inizia, in quanto il risultato che si ottiene è sempre lo stesso.
La proprietà associativa vale per l'addizione

$$(a+b)+c=a+(b+c);$$
$$(3+5)+2=3+(5+2)=10$$

La proprietà associativa vale per la moltiplicazione

$$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c);$$
$$(3\cdot 5)\cdot 2=3\cdot(5\cdot 2)=30$$

La proprietà associativa non vale per le operazioni sottrazione, divisione, divisione intera e modulo.

$$(a-b)-c\neq a-(b-c); \quad (10-5)-2=3\neq 10-(5-2)=7$$
$$(a : b) : c\neq a : (b : c); \quad (16 : 4) : 2=2\neq 16 : (4 : 2)=8$$
$$(a \text{ div } b) \text{ div } c \neq a \text{ div } (b \text{ div } c)$$
$$(17 \text{ div } 5) \text{ div } 2=1 \neq 17 \text{ div } (5 \text{ div } 2)=8$$
$$3 \text{ div } 2=1 \neq 17 \text{ div } 2=8$$
$$(a \; mod \; b) \; mod \; c \neq a \; mod \; (b \; mod \; c)$$
$$(17 \; mod \; 7) \; mod \; 2=1 \neq 17 \; mod \; (7 \; mod \; 2)=0$$
$$3 \; mod \; 2=1 \neq 17 \; mod \; 1=0$$

Elemento neutro

Una operazione ha un elemento neutro se composto con qualsiasi altro numero lo lascia invariato, sia quando il numero è a destra, sia quando è a sinistra.
L'elemento neutro dell'addizione è 0, sia che si trovi a destra che a sinistra:

$$a+0=0+a=a$$

L'elemento neutro della moltiplicazione è 1, sia che si trovi a destra che a sinistra:

$$a\cdot 1=1\cdot a=a$$

La divisione intera ha l'elemento neutro a destra, che è 1, ma non ha elemento neutro a sinistra.

$$a \text{ div } 1=a \qquad 1 \text{ div } a=0 \;\; se \; a\neq 1$$

L'operazione modulo ha l'elemento neutro a sinistra, lo 0, ma non ha elemento neutro a destra.

$$0 \; mod \; a=0$$
$$a \; mod \; 0=\text{non si può fare}$$

Proprietà distributiva

La proprietà distributiva coinvolge due operazioni differenti.
Proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione:
Moltiplicare il risultato dell'addizione di più numeri per un altro numero dà lo stesso risultato che moltiplicare ogni addendo per il fattore e addizionare i prodotti ottenuti. Questa proprietà vale sia se la somma è a destra sia se è a sinistra.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b + a\cdot c \qquad (a+b)\cdot c=a\cdot c + b\cdot c$$

Esempi

- $3\cdot(2+4)=3\cdot 2 + 3\cdot 4=18$ $\qquad (2+4)\cdot 3=2\cdot 3 + 4\cdot 3=18$

Proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto alla sottrazione

$a\cdot(b-c)=a\cdot b - a\cdot c \qquad (a-b)\cdot c=a\cdot c - b\cdot c$

Esempi

- $6\cdot(10-4)=6\cdot 10 - 6\cdot 4=36 \qquad (10-4)\cdot 6=10\cdot 6 - 4\cdot 6=36$

Proprietà distributiva della divisione rispetto all'addizione solo se le somme sono a sinistra:

$(a+b+c):d=a:d + b:d + c:d$

Esempio

- $(20+10+5):5=20:5 + 10:5 + 5:5=7$

quindi vale la proprietà distributiva della divisione rispetto all'addizione se le somme sono a sinistra.

Verifichiamo con un esempio che non vale la proprietà distributiva se le somme si trovano a destra.

Esempio

- $120:(3+5)$

Eseguendo prima l'operazione tra parentesi si ottiene correttamente $120:8=15$.
Se si prova ad applicare la proprietà distributiva si ottiene $120:3+120:5=40+24=64$.
Il risultato corretto è il primo.

Proprietà distributiva della divisione rispetto la sottrazione solo se la sottrazione è a sinistra:
$(a-b):c=a:c - b:c$

Esempi

- $(20-10):5=10:5=2 \qquad 20:5 - 10:5=4-2=2$

In questo caso la sottrazione è a sinistra

- $120:(5-3)=120:2=60 \neq 120:5-120:3=24-40=$...non si può fare

In questo caso la sottrazione è a destra

LEGGE DI ANNULLAMENTO DEL PRODOTTO. Il prodotto di due o più numeri naturali si annulla se almeno uno dei fattori è nullo. $a\cdot b=0 \Leftrightarrow a=0$ oppure $b=0$

8 Stabilisci se le seguenti uguaglianze sono vere o false indicando la proprietà utilizzata:

a) 33 : 11 = 11 : 33	proprietà	V	F
b) 108 – 72 : 9 = (108 – 72) : 9	proprietà....................................	V	F
c) 8 – 4 = 4-8	…...	V	F
d) 35 · 10 = 10 · 35	…...	V	F
e) 9 · (2 + 3) = 9 · 3 + 9 · 2	…...	V	F
f) 80 – 52 + 36 = (20 – 13 + 9) · 4	…...	V	F
g) (28 – 7) : 7 = 28 : 7 - 7 : 7	…...	V	F
h) (8 · 1) : 2 = 8 : 2	…...	V	F
i) (8 - 2) + 3 = 8 - (2 + 3)	…...	V	F
j) (13 + 11) + 4 = 13 + (11 + 4)	…...	V	F
k) 0 + (100 + 50) = 100 + 50	…...	V	F

9 Data la seguente operazione tra i numeri naturali $a\circ b=2\cdot a+3\cdot b$ verifica se è

a) commutativa, cioè se $a\circ b=b\circ a$
b) associativa, cioè se $a\circ(b\circ c)=(a\circ b)\circ c$
c) 0 è elemento neutro

► *6.* Potenza

La **potenza** di un numero naturale è una moltiplicazione particolare con tutti i fattori uguali.

DEFINZIONE. Dati due numeri naturali a e b, con b>1 il primo detto **base**, il secondo **esponente**, la **potenza** di a con esponente b è il numero p che si ottiene moltiplicando fra loro b fattori tutti uguali ad a. Si scrive $a^b = p$ e si legge "a elevato a b uguale a p".

esponente

$$5^3 = \underbrace{5 \text{x} 5 \text{x} 5}_{3 \text{ volte}} = 125$$

base — 3 volte — potenza

Alla definizione precedente vanno aggiunti i seguenti casi particolari che completano la definizione:

$$a^1 = a$$
$$a^0 = 1, \text{ se } a \neq 0$$
$$0^0 \text{ non ha significato}$$

Proprietà delle potenze

1. $a^n \cdot a^m = a^{m+n}$

Il prodotto di due potenze con la stessa base è uguale a una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la somma degli esponenti.

Esempio: $2^5 \cdot 2^6 = 2^{5+6} = 2^{11}$.

La proprietà segue da questa osservazione:

$$a^n \cdot a^m = (\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \, volte}) \cdot (\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \, volte}) = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n+m \, volte} = a^{n+m}$$

2. $a^n : a^m = a^{n-m}$

Il quoziente di due potenze con la stessa base, la prima con esponente maggiore o uguale all'esponente della seconda, è uguale a una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la differenza degli esponenti.

Esempio: $4^5 : 4^3 = 4^{5-3} = 4^2$.

La proprietà segue da questa osservazione:

$$a^n : a^m = (\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \, volte}) : (\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \, volte}) \overbrace{=}^{\text{per la proprietà invariantiva della divisione}} \underbrace{(a:a) \cdot (a:a) \cdot \ldots \cdot (a:a)}_{n \, volte} \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}_{n-m \, volte} = a^{n-m}$$

3. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

La potenza di una potenza è uguale a una potenza che ha la base della prima potenza e per esponente il prodotto degli esponenti.

Esempio: $(6^2)^5 = 6^{2 \cdot 5} = 6^{10}$.

La proprietà segue da questa osservazione:

$$(a^n)^m = \overbrace{a^n \cdot a^n \cdot \ldots \cdot a^n}^{m \, volte} = (\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \, volte}) \cdot (a \cdot a \cdot \ldots \cdot a) \ldots (a \cdot a \cdot \ldots \cdot a) = a^{n \cdot m}$$

4. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

Prodotto di potenze con lo stesso esponente. La potenza di un prodotto è uguale al prodotto delle potenze dei singoli fattori.

Esempio: $(2 \cdot 5)^8 = 2^8 \cdot 5^8$.

La proprietà segue da questa osservazione:

$$(a \cdot b)^n = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \ldots (a \cdot b)}_{n \, volte} = (\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \, volte}) \cdot (\underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n \, volte}) = a^n \cdot b^n$$

5. $(a : b)^n = a^n : b^n$

La potenza di un quoziente è uguale al quoziente delle potenze dei singoli fattori.

Esempio $(4:2)^8 = 4^8 : 2^8$.

10 Inserisci i numeri mancanti:

a) $3^1 \cdot 3^2 \cdot 3^3 = 3^{...+...+..} = 3^{...}$
b) $3^4 : 3^2 = 3^{...-...} = 3^{...}$
c) $(3:7)^5 = 3^{...} : 7^{...}$
d) $6^3 : 5^3 = (6:5)^{...}$
e) $7^3 \cdot 5^3 \cdot 2^3 = (7 \cdot 5 \cdot 2)^{...}$
f) $(2^6)^2 = 2^{(..\cdot..)} = 2^{...}$
g) $(18^6):(9^6) = (.....)^{.....} = 2^{....}$
h) $(5^6 \cdot 5^4)^4 : [(5^2)^3]^6 = ... = 5^{....}$

11 Calcola applicando le proprietà delle potenze:

a) $2^5 \cdot 2^3 : 2^2 \cdot 3^6$ $[6^6]$
b) $(5^2)^3 : 5^3 \cdot 5$ $[5^4]$
c) $\{[(2^3)^2 : 2^3]^3 : 2^5\} : (2^8 : 2^6)^2$ $[1]$
d) $[(2^1)^4 \cdot 3^4]^2 : 6^5 \cdot 6^0$ $[6^3]$

12 Calcola:

a) $2^2 \cdot (2^3 + 5^2)$
b) $[(3^6 : 3^4)^2 \cdot 3^2]^1$
c) $4^4 \cdot (3^4 + 4^2)$
d) $3^4 \cdot (3^4 + 4^2 - 2^2)^0 : 3^3 + 0 \cdot 100$

Completa applicando le proprietà delle potenze

13 $7^4 \cdot 7^{...} = 7^5$ $3^9 \cdot 5^9 = (......)^9$ $5^{15} : 5^{...} = 5^5$ $(......)^6 \cdot 5^6 = 15^6$

14 $8^4 : 2^4 = 2^{...}$ $(18^5 : 6^5)^2 = 3^{...}$ $20^7 : 20^0 = 20^{...}$ $(...^3)^4 = 1$

15 Il risultato di $3^5 + 5^3$ è

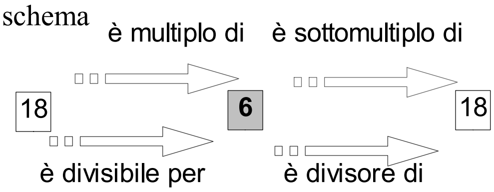
[A] 368 [B] $(3+5)^5$ [C] 15+15 [D] 8^8

16 Il risultato di $(73+27)^2$ è

[A] 200 [B] $73^2 + 27^2$ [C] 10^4 [D] 1000

► 7. Numeri primi

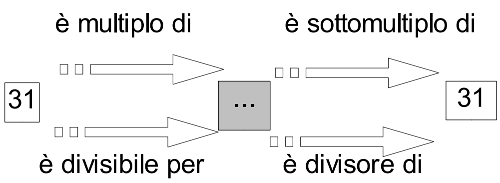
Osserva il seguente schema



In esso sono descritte alcune caratteristiche del numero 18 e i suoi legami con il numero 6.

DEFINIZIONE. Chiamiamo **divisore proprio** di un numero un divisore diverso dal numero stesso e dall'unità.

Osserva ora il seguente schema



Nella casella centrale grigia puoi inserire soltanto i numeri 31 o 1.

DEFINIZIONI
Un numero p > 1 si dice ***primo*** se è divisibile solo per se stesso e per l'unità.
Un numero naturale maggiore di 1 si dice ***composto*** se non è primo.

0 non è primo né composto
1 non è primo né composto
2 è primo
3 è primo
4 è composto
5 è primo
6 è composto
7 è primo
8 è composto
9 è composto
10 è composto
11 è primo
12 è composto
13 è primo
…............

17 Per ognuno dei seguenti numeri indica i divisori propri

a) 15 ha divisori propri …, …, ..., ...
b) 19 ha divisori propri …, …, ..., ...
c) 24 ha divisori propri …, …, …, ...
d) 30 ha divisori propri …, …, …, ...

Esempi

- $10 = 2 \cdot 5$
- $30 = 3 \cdot 10 = 3 \cdot 2 \cdot 5$
- $48 = 16 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3$

Ma quanti sono i numeri primi? La risposta a questa domanda venne data da Euclide con il seguente teorema che porta il suo nome:

TEOREMA DI EUCLIDE. I numeri primi sono infiniti.

Euclide infatti ci ha fatto vedere come sia possibile costruire numeri primi comunque grandi, dato un numero primo infatti è sempre possibile costruirne uno più grande.

18 *Crivello di Eratostene*. Nella tabella che segue sono rappresentati i numeri naturali fino a 100. Per trovare i numeri primi, seleziona 1 e 2, poi cancella tutti i multipli di 2. Seleziona il 3 e cancella i multipli di 3. Seleziona il primo dei numeri che non è stato cancellato, il 5, e cancella tutti i multipli di 5. Procedi in questo modo fino alla fine della tabella. Quali sono i numeri primi minori di 100?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Un numero è primo quando non è divisibile per nessun numero primo compreso tra 2 e la radice quadrata del numero.

Esempi

- Per verificare se 31 è primo calcolo il valore approssimato $\sqrt{31} \simeq 5{,}5$ e verifico se è divisibile per i numeri primi $\leqslant 5$, cioè 2, 3, 5. Allora 31 è primo, in quanto non è divisibile per 2 in quanto è dispari, non è divisibile per 3 poiché la somma delle sue cifre è 4 e 4 non è divisibile per 3, non è divisibile per 5 in quanto non finisce per 0 o 5.
- Per verificare se 59 è un numero primo calcolo $\sqrt{59} \simeq 7{,}6$ e verifico se 59 è divisibile per un numero primo $\leqslant 7$, cioè per 2, 3, 5, 7. Eseguendo le divisioni si vede che 59 non è divisibile per nessuno dei numeri precedenti, quindi è primo.

►8. Criteri di divisibilità

Per verificare se un numero è divisibile per i primi numeri interi si possono applicare i seguenti criteri di divisibilità.

Divisibilità per 2: un numero è divisibile per 2 se e solo se la sua ultima cifra, quella delle unità, è un numero pari, cioè è 0, 2, 4, 6, 8.

- 1236 finisce per 6 quindi è divisibile per 2.
- 109230 finisce per 0 quindi è divisibile per 2.
- 10923 finisce per 3 quindi non è divisibile per 2.
- 2221 finisce per 1 quindi non è divisibile per 2

Divisibilità per 3: un numero è divisibile per 3 se e solo se la somma delle cifre che lo compongono è divisibile per 3.

- 24 è divisibile per 3, infatti la somma delle sue cifre è 2+4 = 6, dato che 6 è divisibile per 3 anche 24 è divisibile per 3.
- 1236 è divisibile per 3, infatti la somma delle sue cifre è 1+2+3+6 = 12; 12 è divisibile per 3 dato che la somma delle sue cifre è 1+2 = 3, quindi anche 1236 è divisibile per 3.
- 31 non è divisibile per 3, infatti la somma delle sue cifre è 3+1 = 4, dato che 4 non è divisibile per 3 neanche 31 è divisibile per 3.
- 2363 non è divisibile per 3, infatti la somma delle sue cifre è 2+3+6+3 = 14; 14 non è divisibile per 3 dato che la somma delle sue cifre è 1+4 = 5, quindi anche 2363 non è divisibile per 3.

Divisibilità per 5: un numero è divisibile per 5 se la sua ultima cifra è 0 o 5 .

- 1230 finisce per 0 quindi è divisibile per 5
- 59235 finisce per 5 quindi è divisibile per 5
- 109253 finisce per 3 quindi non è divisibile per 5
- 5556 finisce per 6 quindi non è divisibile per 5.

Divisibilità per 7: un numero (maggiore di 10) è divisibile per 7 se la differenza (in valore assoluto) fra il numero ottenuto togliendo la cifra delle unità e il doppio della cifra delle unità è 7 o un multiplo di 7.

- 252 è divisibile per 7, infatti $|25-2\cdot 2|=21$ è multiplo di 7.
- 49 è divisibile per 7, infatti $|4-2\cdot 9|=14$ è multiplo di 7.
- 31 non è divisibile per 7, infatti $|3-2\cdot 1|=1$ non è multiplo di 7.
- 887 non è divisibile per 7, infatti $|88-2\cdot 7|=74$ non è divisibile per 7.

Divisibilità per 11: un numero è divisibile per 11 se e solo se la differenza, in valore assoluto, fra la somma delle cifre di posto pari e la somma delle cifre di posto dispari è 0 , 11 o un multiplo di 11.

- 253 è divisibile per 11, infatti $|5-(2+3)|=0$.
- 9482 è divisibile per 11, infatti $|(9+8)-(4+2)|=11$.
- 31 non è divisibile per 11, infatti $|3-1|=2$.
- 887 non è divisibile per 11, infatti $|8-(8+7)|=7$.

19 Per quali numeri sono divisibili seguenti numeri? Segnali con una crocetta

a) 84	è divisibile per	2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11
b) 2344	è divisibile per	2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11
c) 1320	è divisibile per	2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11
d) 1255	è divisibile per	2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11
e) 165	è divisibile per	2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11
f) 720	è divisibile per	2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11
g) 792	è divisibile per	2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11
h) 462	è divisibile per	2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11

20 Determina tutti i divisori di

32	…, …, …, …, …, …, …, …	18	…, …, …, …, …, …, …, …
24	…, …, …, …, …, …, …, …	36	…, …, …, …, …, …, …, ...

►9. Scomporre in fattori primi

Possiamo pensare di scrivere un numero naturale qualsiasi come prodotto di altri numeri. Scomporre in fattori un numero significa appunto scriverlo come prodotto di altri numeri naturali.

21 I numeri sotto elencati sono scritti come prodotto di altri numeri: sottolinea le scritture in cui ciascun numero è scomposto in fattori primi.

a) $68=17\cdot 4=17\cdot 2^2=2\cdot 34$
b) $45=5\cdot 9=15\cdot 3=5\cdot 3^2$
c) $36=6\cdot 6=6^2$
d) $44=2\cdot 22=4\cdot 11=2^2\cdot 11$
e) $17=17\cdot 1$
f) $48=6\cdot 8=12\cdot 4=3\cdot 2^4=16\cdot 3$
g) $60=2\cdot 30=15\cdot 4=2^2\cdot 3\cdot 5=10\cdot 6=20\cdot 3$
h) $102=6\cdot 17=3\cdot 34=2\cdot 3\cdot 17=2\cdot 51$
i) $200=2\cdot 10^2=2^3\cdot 5^2=2\cdot 4\cdot 25=2^2\cdot 50$
j) $380=19\cdot 10\cdot 2=19\cdot 5\cdot 2^2$

22 *Rispondi alle domande:*

a) Ci può essere più di una scomposizione in fattori di un numero?
b) Ci può essere più di una scomposizione in fattori primi di un numero?
c) Quando un numero è scomposto in fattori primi?

TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ARITMETICA. **Ogni numero naturale n>1 si può scrivere in modo unico come prodotto di numeri primi.**

Esempio

Scomporre in fattori primi il numero 630.

630	2	630 è divisibile per 2 perché l'ultima cifra è pari
315	3	315 è divisibile per 3, la somma delle sue cifre è 9 divisibile per 3
105	3	105 è divisibile per 3, la somma delle sue cifre è 6 divisibile per 3
35	5	35 è divisibile per 5 perché l'ultima cifra è 5
7	7	
1		$630 = 2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$

In generale, quindi, un numero può essere scomposto in fattori in più modi. Per esempio, $12=3\cdot 4$, ma anche $12=6\cdot 2$. Il teorema appena enunciato ci assicura che, se si scompone un numero in fattori primi, questa scomposizione è unica, a meno dell'ordine con cui si scrivono i fattori. Tornando all'esempio precedente $12=2^2\cdot 3$ è l'unico modo in cui il 12 si può scomporre in fattori primi, a meno che non si scambiano di posto i fattori $12=3\cdot 2^2$.

23 Descrivi brevemente la differenza tra le seguenti frasi:

"a e b sono due numeri primi" "a e b sono due numeri primi tra di loro"

Fai degli esempi che mettano in evidenza la differenza tra le due osservazioni.

24 Scomponi i seguenti numeri in fattori primi:

a) 16	18	24	30	32	36	40
b) 42	48	52	60	72	81	105
c) 120	135	180	225	525	360	675
d) 715	1900	1078	4050	4536	12150	15246
e) 85050	138600	234000	255000	293760	550800	663552

Alcuni risultati: $525=3\cdot 5^2\cdot 7$; $1078=2\cdot 7^2\cdot 11$; $4050=2\cdot 3^4\cdot 5^2$; $4536=2^3\cdot 3^4\cdot 7$; $12150=2\cdot 3^5\cdot 5^2$; $15246=2\cdot 3^2\cdot 7\cdot 11^2$; $15246=2\cdot 3^5\cdot 5^2\cdot 7$; $85050=2\cdot 3^5\cdot 5^2\cdot 7$; $138600=2^3\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11$; $234000=2^4\cdot 3^2\cdot 5^3\cdot 13$; $255000=2^3\cdot 3\cdot 5^4\cdot 17$; $293760=2^7\cdot 3^3\cdot 5\cdot 17$; $550800=2^4\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 17$; $663552=2^{13}\cdot 3^4$

►*10.* Massimo comune divisore e minimo comune multiplo

DEFINIZIONE: Il **massimo comune divisore** di numeri naturali *a* e *b*, si indica con **MCD(a,b),** è il più grande tra tutti i divisori comuni ad *a* e *b*.

Esempio

Applicando la definizione, il massimo comune divisore tra 18 e 12 si ottiene prendendo tutti i divisori di 18 e 12

divisori di 18:	18,	9,	**6**,	3,	**2**,	**1**
divisori di 12:	12,	**6**,	4,	**2**,	**1**	

I divisori comuni sono 6, 2, 1.
Il più grande dei divisori comuni è 6.

25 Applicando la definizione trova il M.C.D. tra i numeri 54 e 132.

Per calcolare il massimo comune divisore di due o più numeri si può applicare la seguente
Procedura per calcolare il M.C.D. di due o più numeri naturali
1. si scompongono i numeri in fattori primi
2. si moltiplicano tra loro i fattori comuni, presi una sola volta e con il minore esponente.

Esempi

- Calcolare MCD(60, 48, 36)

si scompongono in fattori i singoli numeri $60=2^2\cdot 3\cdot 5$, $48=2^4\cdot 3$, $36=2^2\cdot 3^2$
I fattori comuni sono 2 e 3, il 2 compare con l'esponente minimo 2; il 3 compare con esponente minimo 1. PertantoMCD(60, 48, 36) = $2^2\cdot 3=12$

- Calcolare MCD(60, 120, 90)

si scompongono in fattori i singoli numeri $60=2^2\cdot 3\cdot 5$, $120=2^3\cdot 3\cdot 5$ e $90=2\cdot 3^2\cdot 5$
I fattori in comune sono 2, 3, 5. L'esponente minino è 1 per tutti, pertanto
MCD(60, 120, 90) = $2\cdot 3\cdot 5=30$

DEFINIZIONE. Due numeri a e b si dicono **primi tra loro o coprimi** se MCD(a,b) = 1.

Esempi

- I numeri 12 e 25 sono primi tra loro infatti il MCD(12, 25) = 1 dato che nelle loro scomposizioni in fattori non si hanno fattori comuni: $12=2^2\cdot 3$ e $25=5^2$.
- I numeri 35 e 16 sono primi tra loro. Infatti $35=5\times 7$, $16=2^4$, i due numeri non hanno divisori comuni, il loro M.C.D. è 1.
- I numeri 11, 19 sono primi tra loro infatti il MCD(11, 19) = 1 dato che 11 e 19 sono numeri primi.
- I numeri 12 e 15 non sono primi tra di loro in quando hanno 3 come divisore comune.

DEFINIZIONE. Il **minimo comune multiplo** di due numeri naturali *a* e *b*, si indica con mcm(a,b), è il più piccolo tra tutti i multipli di *a* e di *b*.

Per calcolare il minimo comune multiplo tra 6 e 15 applicando la definizione occorre calcolare i primi multipli dei due numeri

multipli di 6:	6,	12,	18,	24,	**30**,	36,	42,	48,	54,	**60**, ...
multipli di 15:	15,	**30**,	45,	**60**,	75,	90,	...			

Sono multipli comuni 30, 60, 90, …
Il più piccolo dei multipli comuni è 30.

Per calcolare il minimo comune multiplo tra due o più numeri si può applicare la seguente
Procedura per calcolare il m.c.m. di due o più numeri naturali
1. si scompongono i numeri in fattori primi
2. si moltiplicano tra loro i fattori comuni e non comuni, presi una sola volta, con il maggiore esponente.

Esempi

- Calcolare il m.c.m.(60, 48, 36).

Scomponendo in fattori i numeri si ha $60=2^2\cdot 3\cdot 5$, $48=2^4\cdot 3$, $36=2^2\cdot 3^2$

Tutti i fattori comuni e non comuni presi una sola volta con l'esponente più grande con cui compaiono: 2^4, 3^2, 5. Il m.c.m. è $2^4\cdot 3^2\cdot 5=720$

- Calcolare il m.c.m.(20, 24, 450).

Scomponendo in fattori si ha $20=2^2\cdot 5$, $24=2^3\cdot 3$, $450=2\cdot 3^2\cdot 5^2$

Moltiplicando i fattori comuni e non comuni con il massimo esponente si ha

$2^3\cdot 3^2\cdot 5^2=1800$

26 Calcola MCD e m.c.m. dei numeri 180, 72, 90

Scomponendo in fattori si ha $180=2^2\cdot 3^2\cdot 5$, $72=2^3\cdot 3^2$, $90=2\cdot 3^2\cdot 5$

M.C.D = $2^{\dots}\cdot 3^{\dots}=\dots$

m.c.m. = $2^{\dots}\cdot 3^{\dots}\cdot 5^{\dots}=\dots$

27 Calcola m.c.m. e M.C.D. Tra i seguenti gruppi di numeri

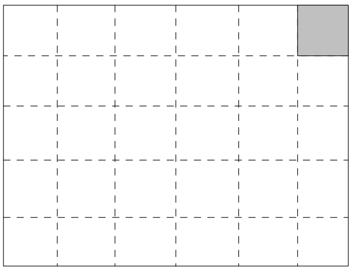
a) 6; 15	R.(30;3)	12; 50	R.(300;2)	1; 6; 10; 14	R.(210;1)
a) 15; 5; 10	R.(5; 30)	2; 4; 8	R.(2; 8)	2; 1; 4	R.(1; 4)
b) 5; 6; 8		24; 12; 16		6; 16; 26	
c) 6; 8; 12		50; 120; 180		20; 40; 60	
d) 16; 18; 32		30; 60; 27		45; 15; 35	
e) 6; 8; 10; 12		30; 27; 45		126; 180	
f) 24; 12; 16		6; 4;10		5; 4; 10	
g) 12; 14; 15		3; 4; 5		6; 8; 12	
h) 15; 18; 21		12; 14; 15		15; 18; 24	
i) 100; 120; 150	R.(600;10)	44; 66; 12	R.(132;2)	24; 14; 40	R.(840; 2)

Esempio

Si vuole pavimentare una stanza a pianta rettangolare di 315 cm per 435 cm con mattonelle quadrate più grandi possibili, senza sprecarne alcuna. Quali sono le dimensioni delle mattonelle? Quante mattonelle sono necessarie?

Poiché le mattonelle devono essere quadrate devono avere il lato tale che entri un numero intero di volte sia nel 315 sia nel 435, pertanto la dimensione delle mattonelle deve essere un divisore comune di 315 e di 435. Poiché è richiesto che le mattonelle siano quanto più grandi possibile, la dimensione deve essere il massimo divisore comune tra 315 e 435.

```
315|3 435|3
105|3 145|5
 35|5  29|29
  7|7   1
  1
```



$315=3^2\cdot 5\cdot 7$ $435=3\cdot 5\cdot 29$ $M.C.D.(315,435)=3\cdot 5=15$

Le mattonelle devono avere il lato di 15cm. Ci vogliono $435:15=29$ mattonelle per ricoprire il lato di 435cm e $315:15=21$ mattonelle per ricoprire il lato da 315cm. In tutto occorrono $29\times 21=609$ mattonelle.

28 Tre funivie partono contemporaneamnte da una stessa stazione sciistica. La prima compie il tragitto di andata e ritorno in 15 minuti, la seconda in 18 minuti, la terza in 20. Dopo quanti minuti partiranno di nuovo insieme? [3h]

29 Due aerei partono contemporaneamente dall'aeroporto di Milano e vi ritorneranno dopo aver percorso le loro rotte: il primo ogni 15 giorni e il secondo ogni 18 giorni. Dopo quanti giorni i due aerei si troveranno di nuovo insieme a Milano? [90]

30 Disponendo di 56 penne, 70 matite e 63 gomme. Quante confezioni uguali si possono fare? Come sarà composta ciascuna confezione?

31 Una cometa passa in prossimità della Terra ogni 360 anni, una seconda ogni 240 anni e una terza ogni 750 anni. Se quest'anno sono state avvistate tutte e tre, fra quanti anni sarà possibile vederele di nuovo tutte e tre nello stesso anno?

►*11.* Espressioni numeriche

Nel linguaggio comune alcune frasi possono risultare ambigue. Per esempio "Luca ha detto Mario è stato promosso" può avere due significati diversi a seconda di come si inserisce la punteggiatura:
scrivendo "Luca, ha detto Mario, è stato promosso" significa che è stato promosso Luca;
scrivendo "Luca ha detto: Mario è stato promosso" significa che è stato promosso Mario.
Anche nella matematica, quando abbiamo più operazioni da eseguire dobbiamo chiarire l'ordine con cui si devono eseguire le operazioni. Per esempio l'espressione $2+3\cdot 4$ può valere 14 se si esegue per prima la moltiplicazione, infatti $2+3\cdot 4=2+12=14$; può valere 20 se si esegue per prima l'addizione, infatti $2+3\cdot 4=5\cdot 4=20$.
Per eliminare queste ambiguità sono state fissate alcune regole.

DEFINIZIONE. Un'**espressione aritmetica** è una successione di operazioni da eseguire su più numeri.

I Se un'espressione contiene solo addizioni, le operazioni si possono eseguire in qualsiasi ordine, e ciò grazie alla proprietà associativa dell'addizione.

- $3+2+5 \;=5+5=10$ si sono eseguite le operazioni nell'ordine in cui compaiono;
- $3+2+5 \;=3+7=10$ è stata eseguita per prima l'ultima addizione. Il risultato è lo stesso.

II Se un'espressione contiene solo moltiplicazioni, le operazioni si possono eseguire in qualsiasi ordine, grazie alla proprietà associativa della moltiplicazione.

- $2\cdot 3\cdot 4 \;=\; 6\cdot 4 \;=\; 24$ in questo caso si è seguito l'ordine in cui compaiono;
- $2\cdot 3\cdot 4 \;=\; 2\cdot 12 \;=\; 24$ in questo caso di è seguito l'ordine opposto. Il risultato è lo stesso.

III Se un'espressione, senza parentesi, contiene più sottrazioni, si deve procedere eseguendole nell'ordine in cui sono scritte, la sottrazione infatti non gode né della proprietà associativa né di quella commutativa.

- $10-6-3 \;=\; 4-3 \;=\; 1$ eseguendo le sottrazioni nell'ordine con cui compaiono;
- $10-6-3 \;=\; 10-3 \;=\; 7$ eseguendo le sottrazioni nell'ordine inverso il risultato è errato.

IV Se un'espressione senza parentesi contiene solo addizioni e sottrazioni, le operazioni si devono eseguire nell'ordine con cui sono scritte.

- $12+6-5-1 \;=\; 18-5-1 \;=\; 13-1 \;=\; 12$

V Se un'espressione senza parentesi contiene solo divisioni, le operazioni si devono eseguire nell'ordine con cui sono scritte.

Esempio

$360:12:3 \;=\; 30:3 \;=\; 10$

VI Se un'espressione senza parentesi contiene addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni, divisioni e potenze, si eseguono prima le potenze, poi moltiplicazioni e divisioni, rispettando l'ordine con cui sono scritte, e poi addizioni e sottrazioni, rispettando l'ordine.

- $18:2:9+5^2-2\cdot 3^2:3-1 \;=\; 18:2:9+25-2\cdot 9:3-1 \;=\; 9:9+25-18:3-1 \;=$
  $1+25-6-1 \;=\; 26-6-1 \;=\; 20-1=19$

VII Se l'espressione contiene una coppia di parentesi si devono eseguire prima le operazioni racchiuse nelle parentesi, rispettando le regole precedenti; si eliminano poi le parentesi e si ottiene un'espressione senza parentesi.

- $5\cdot(4+3^2)-1 \;=\; 5\cdot(4+9)-1 \;=\; 5\cdot 13-1 \;=\; 65-1 \;=\; 64$

VIII Se l'espressione contiene più ordini di parentesi, si eseguono per prima le operazioni racchiuse nelle parentesi tonde, rispettando le regole precedenti, si eliminano le parentesi tonde e si procede con le operazioni racchiuse nelle parentesi quadre. Dopo aver eliminato le parentesi quadre, si eseguono le operazioni nelle parentesi graffe. Si ottiene così un'espressione senza parentesi.

L'uso di parentesi di diverso tipo rende visivamente più semplice l'ordine da seguire nelle operazioni ma in un'espressione tutte le parentesi possono essere tonde. Ciò accade, per esempio, quando si usano gli strumenti di calcolo elettronico come il computer e la calcolatrice.

32 *Quali delle seguenti scritture rappresentano numeri naturali?*

a) 5+3-1 d) 7+2-10 g) 3·4-12 j) 27:9:3
b) 6+4-10 e) 2·5:5 h) 12:4-4 k) 18:2-9
c) 5-6+1 f) 2·3:4 i) 11:3+2 l) 10-1:3

33 *Calcola il risultato delle seguenti operazioni nei numeri naturali; alcune operazioni non sono possibili, individuale*

a) 5 : 5 = e) 10 : 2 = i) 10 : 5 = m) 0 · 0 =
b) 5 : 0 = f) 0 : 5 = j) 1 : 5 = n) 1 · 0 =
c) 1 · 5 = g) 5 · 1 = k) 0 · 5 = o) 1:0 =
d) 1 – 1 = h) 0 : 0 = l) 5 : 1 = p) 1:1 =

34 Esegui le seguenti operazioni rispettando l'ordine

$15+7-2$ $16-4+2$ $18-8-4$ $16\times 2-2$
$12-2\times 2$ $10-5\times 2$ $20\times 4:5$ $16:4\times 2$
$2+2^2+3$ $4\times 2^3+1$ $2^4:2-4$ $(1+2)^3-2^3$
$(3^2)^3-3^2$ 2^4+2^3 $2^3\times 3^2$ $3^3:3^2\times 3^2$

35 Aggiungi le parentesi in modo che l'espressione abbia il risultato indicato

$2+5\cdot 3+2$ R. 35 $2+5\cdot 3+2$ R. 27

36 *Traduci in espressioni aritmetiche le seguenti frasi e calcola il risultato*

a) Aggiungi 12 al prodotto tra 6 e 4. [36]
b) Sottrai il prodotto tra 12 e 2 alla somma tra 15 e 27. [18]
c) Moltiplica la differenza tra 16 e 7 con la somma tra 6 e 8. [126]
d) Al doppio di 15 sottrai la somma dei prodotti di 3 con 6 e di 2 con 5. [2]
e) Sottrai il prodotto di 6 per 4 al quoziente tra 100 e 2. [26]
f) Moltiplica la differenza di 15 con 9 per la somma di 3 e 2. [30]
g) Sottrai al triplo del prodotto di 6 e 2 il doppio del quoziente tra 16 e 4.
h) Il quadrato della somma tra il quoziente intero di 25 e 7 e il cubo di 2
i) La somma tra il quadrato del quoziente intero di 25 e 7 e il quadrato del cubo di 2
j) La differenza tra il triplo del cubo di 5 e il doppio del quadrato di 5

Calcola il valore delle seguenti espressioni

37 $(1+2\cdot 3):(5-2\cdot 2)+1+2\cdot 4$ [16]

38 $(18-3\cdot 2):(16-3\cdot 4)\cdot(2:2+2)$ [9]

39 $2+2\cdot 6-[21-(3+4\cdot 3:2)]:2$ [8]

40 $\{[15-(5\cdot 2-4)]\cdot 2\}:(30:15+1)-\{[25\cdot 4]:10-(11-2)\}$ [5]

41 $[6\cdot(2\cdot 4-2\cdot 3)-6]+\{3\cdot(21:7-2)\cdot[(6\cdot 5):10]-3\cdot 2\}$ [9]

42 $100:2+3^2-2^2\cdot 6$ [35]

43 $2^7:2^3-2^2$ [12]

44 $30-5\cdot 3+7\cdot 2^2-2$ [41]

45 $(3+4)^2-(3^2+4^2)$ [24]

46 $5\cdot 5^3\cdot 5^4:(5^2)^3+5$ [30]

47 $32^5:16^4-2^9$ [0]

48 $[3^0+(2^4-2^3)^2:(4^3:4^2)+3]:(2^6:2^4)$ [5]

49 $[(4^5:4^3)-2^3]\cdot[(3^4\cdot 3^3):(3^2\cdot 3)]:(2^2+2^0+3^1)$ [81]

50 $(12-5^2:5)\cdot 4^2:2^3+2^2-1+[(2^4:2^3)^3+4^3:4+2^5]:7$ [25]

51 $(5^2\cdot 2^2-(2^5-2^5:(2^2\cdot 3+4^2:4)+2^3\cdot(3^2-2^2))):(3\cdot 2)\cdot 5$ [25]

52 $(3^4\cdot 3^3:3^6)^2+(7^2-5^2):2^2$ [15]

53 $(3\cdot 2^2-10)^4\cdot(3^3+2^3):7-10\cdot 2^3$ [0]

54 $(195:15)\cdot\{[3^2\cdot 6+3^2\cdot 4^2-5\cdot(6-1)^2]\}:(4^2-3)$ [73]

55 $5+[(16:8)\cdot 3+(10:5)\cdot 3]\cdot(2^3\cdot 5-1)^2-[(3\cdot 10):6-1]$ [18253]

56 $[4\cdot(3\cdot 2-3\cdot 1^2)-5]-\{2\cdot(14:7+4):[2\cdot(3+2)^2:10+1-4^2:8]\}$ [4]

Risolvi i seguenti problemi

57 Un'automobile percorre 18km con 1 litro di benzina. Quanta benzina deve aggiungere il proprietario dell'auto sapendo che l'auto ha già 12 litri di benzina nel serbatoio, che deve intraprendere un viaggio di 432km e che deve arrivare a destinazione con 4 litri di benzina nel serbatoio?

58 Alla cartoleria presso la scuola una penna costa 10 centesimi più di una matita. Gianni ha comprato 2 penne e 3 matite e ha speso 17 euro. Quanto spenderà Marco che ha comprato 1 penna e 2 matite?

59 In una città tutte le linee della metropolitana iniziano il loro servizio alla stessa ora. La linea rossa fa una corsa ogni 15 minuti, la linea gialla ogni 20 minuti e la linea blu ogni 30 minuti. Salvo ritardi, ogni quanti minuti le tre linee partono allo stesso momento?

60 Tre negozi si trovano sotto lo stesso porticato, ciascuno ha un'insegna luminosa intermittente: la prima si spegne ogni 6 secondi, la seconda ogni 5 secondi, la terza ogni 7 secondi. Se le insegne vengono accese contemporaneamente alle 19.00 e spente contemporaneamente alle 21.00, quante volte durante la serata le tre insegne si spegneranno contemporaneamente?

61 In una gita scolastica ogni insegnante accompagna un gruppo di 12 studenti. Se alla gita partecipano 132 studenti, quanti insegnanti occorrono?

62 Un palazzo è costituito a 4 piani con 2 appartamenti per ogni piano. Se ogni appartamento ha 6 finestre con 4 vetri ciascuna, quanti vetri ha il palazzo?

63 *Spiega brevemente il significato delle seguenti parole*

a) numero primo
b) numero dispari
c) multiplo
d) cifra

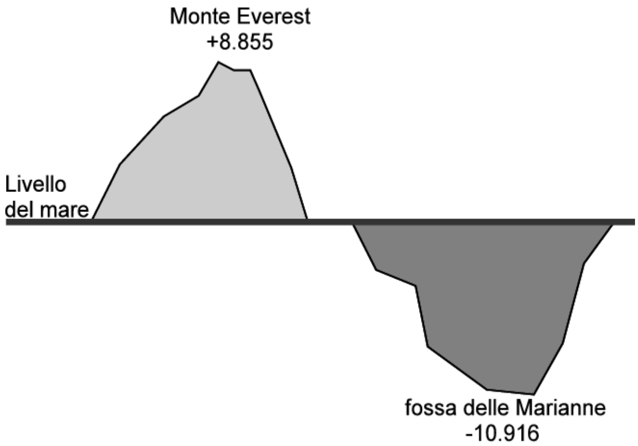
64 *Rispondi brevemente alle seguenti domande*

e) Cosa vuol dire scomporre in fattori un numero?
f) Ci può essere più di una scomposizione in fattori di un numero?
g) Cosa vuol dire scomporre in fattori primi un numero?

►*12.* Numeri interi relativi

I numeri che precedono lo zero

Con i numeri naturali non sempre è possibile eseguire l'operazione di sottrazione. In particolare, non è possibile sottrarre un numero più grande da un numero più piccolo, per esempio 5-12. Tuttavia ci sono situazioni in cui una sottrazione di questo tipo deve essere eseguita.
Per esempio, è possibile acquistare un'auto di 12.000 euro pur avendo soltanto risparmi in banca di soli 5.000 euro. In questo caso si tratta di togliere dai 5.000 euro i 12.000 euro che servono per acquistare l 'auto.
Pensiamo ad una comunicazione dei meteorologi relativa alle previsioni del tempo: “domani la temperatura, a causa di una perturbazione proveniente dai paesi nordici, potrebbe subire un drastico calo e scendere anche di 10 gradi”. Riflettiamo: se oggi la temperatura è di 9 gradi, come possiamo esprimere numericamente la temperatura prevista per domani? Alcuni diranno: “il liquido contenuto nel termometro si posizionerà al di sotto dello zero”, altri “domani la temperatura sarà di un grado sotto lo zero” e altri ancora “la temperatura sarà di –1 grado”.

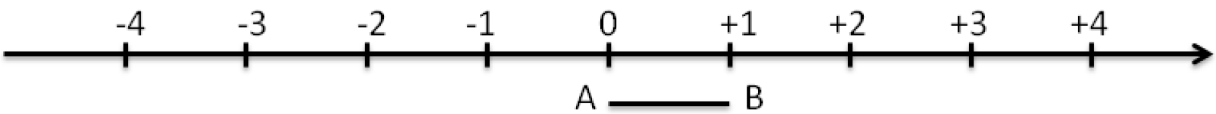


Leggiamo nel testo di geografia: “Il punto più profondo della Terra si trova nella fossa delle Marianne; esso supera di 2 061 metri l'altezza del monte Everest e si trova a 10 916 metri sotto il livello del mare”. Se attribuiamo al livello del mare il valore zero, allora potremmo esprimere la profondità della Fossa con il numero –10916 e l’altezza del monte Everest con il numero +8855.
Per rappresentare le grandezze che hanno due sensi, come temperature, crediti e i debiti, latitudine nord e sud, altezze sopra il livello del mare e profondità marine i numeri naturali non bastano. I matematici in queste situazioni usano i numeri interi relativi che si scrivono utilizzando gli stessi numeri naturali ma preceduti dal segno + se sono numeri maggiori di 0 e dal segno – se sono numeri minori di 0. L'insieme di questi numeri si indica in questo modo:

$$\mathbb{Z}=\{\ldots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ +1,\ +2,\ +3,\ \ldots\}$$

I numeri relativi e la retta

I numeri relativi possono essere rappresentati su una retta. Disegniamo una retta, su di essa prendiamo un punto di riferimento al quale associamo il numero zero, il verso di percorrenza da sinistra verso destra, un segmento AB come un'unità di misura. Riportiamo questa unità di misura più volte partendo da zero e camminando nel verso stabilito aggiungiamo ogni volta uno: ai punti trovati associamo gli interi positivi. Ripetiamo l'operazione partendo dallo zero, ma con il verso di percorrenza a sinistra: ai punti trovati associamo gli interi negativi.



Possiamo interpretare questi numeri come il numero di passi da fare sulla retta, partendo dallo zero verso destra se il segno è positivo, verso sinistra se il segno è negativo.
L'insieme dei numeri relativi si indica con il simbolo $\mathbb{Z}$. In particolare, l'insieme dei soli numeri interi relativi con segno positivo si indica con il simbolo $\mathbb{Z}^+$, l'insieme dei soli numeri interi negativi si indica con il simbolo $\mathbb{Z}^-$.

DEFINZIONE. Due numeri relativi con lo stesso segno sono detti **concordi**, se hanno segni opposti si dicono **discordi.**

Esempi

+3 e +5 sono concordi	+3 e -5 sono discordi
-5 e -2 sono concordi	-3 e +2 sono discordi

DEFINIZIONE. Il **valore assoluto** di un numero relativo è il numero senza il segno: quindi un numero naturale.

Il valore assoluto si indica inserendo il numero relativo tra due barre verticali.
In linguaggio matematico:

$$|a| = a \ \ se \ \ a \geq 0 \qquad\qquad |a| = -a \ \ se \ \ a < 0$$

Esempi

$|+2| = 2$ $\qquad$ $|-5| = 5$ $\qquad$ $|-73| = 73$ $\qquad$ $|+13| = 13$

DEFINIZIONE. Due numeri interi relativi sono **uguali** se hanno lo stesso segno e lo stesso valore assoluto; si dicono **opposti** se hanno lo stesso valore assoluto ma segni diversi.

Sono numeri opposti +3 e -3; +5 e -5; +19 e -19.

Osservazione
Per indicare un numero positivo è possibile scrivere il numero senza il segno +.
Per esempio si può scrivere indifferentemente +1 o 1, +12 o semplicemente 12.

Confronto di numeri relativi

Dati due numeri interi relativi quello più grande è quello che sulla retta è rappresentato più a destra. In particolare,

- ogni numero intero positivo è maggiore di 0 e di ogni numero negativo;
- tra due numeri positivi il più grande è quello che ha valore assoluto maggiore;
- ogni numero negativo è minore di 0 e di ogni numero positivo;
- tra due numeri negativi il più grande è quello che ha valore assoluto minore;
- 0 è minore di ogni numero positivo e maggiore di ogni numero negativo.

Per indicare che un numero è maggiore di un altro si usa separare i due numeri con il simbolo >; per indicare che il primo è minore del secondo si usa mettere tra i due numeri il simbolo <.

Esempi

- $+4 > +2$ i numeri sono positivi, il maggiore è +4 perché ha valore assoluto maggiore.
- $-1 > -3$ i due numeri sono negativi, il maggiore è -1 perché ha valore assoluto minore.
- $+4 > -2$ il numero positivo è maggiore del numero negativo.
- $+4 > 0$ ogni numero positivo è maggiore di 0.
- $0 > -2$ ogni numero negativo è minore di 0.

Usando la rappresentazione dei numeri sulla retta l'ordinamento risulta più facile da verificare: il verso di percorrenza della retta (la freccia) indica la direzione nella quale i numeri crescono.

65 Riscrivi in ordine crescente (dal più piccolo al più grande) i seguenti numeri relativi:

+11 -3 0 +2 -5 -7 +1

66 Riscrivi in ordine decrescente (dal più grande al più piccolo) i seguenti numeri relativi:

-5 -2 +3 -1 0 +7 -9 +13 -21

67 Disponi sulla retta orientata i seguenti numeri relativi: -3; +2; +5; -7; -5; -1; +3



68 *Per ciascuno dei seguenti numeri relativi scrivi il valore assoluto*

a) |+3| = …
b) |-5| = …
c) |-1| = …
d) |+10| = …
e) |-11| = …
f) |+7| = ...

69 *Scrivi tra le seguenti coppie di numeri relativi il simbolo corretto tra > e <*

br) -5 … -2
bs) -3 … +5
bt) -2 … +2
bu) -5 … 0
bv) -3 … -5
bw) -1 … +1
bx) +3 … -3
by) -1 … -5
bz) 0 … +1
ca) +3 … 0
cb) 0 … -2
cc) +7 … +2
cd) -11 … -101
ce) +100 … -99
cf) -101 … +110
cg) -1010 … -1100

►*13.* Le operazioni con i numeri relativi

Con i numeri relativi è sempre possibile eseguire le addizioni, le moltiplicazioni e le sottrazioni. Questo significa che se si addizionano, si sottraggono o si moltiplicano due numeri relativi il risultato si trova sempre nella retta dei numeri relativi.

Addizione

Osserviamo prima di tutto che il simbolo di addizione + è lo stesso che si usa per indicare il segno dei numeri positivi, pertanto occorre prestare attenzione quando si incontra il segno + al significato che esso ha. Almeno all'inizio è bene usare una scrittura del tipo $(+2)+(+5)$ per indicare la somma tra i numeri positivi +2 e +5.
L'addizione di due numeri relativi si esegue in due modi diversi a seconda che gli addendi siano concordi o discordi.
La **somma di due numeri relativi concordi** è il numero che per ha valore assoluto la somma dei singoli valori assoluti e come segno lo stesso segno degli addendi.

Esempi

- $(+3)+(+5)=...$ i due numeri da sommare sono concordi, il loro segno è +, i loro valori assoluti sono 3 e 5, la loro somma è 8 pertanto $(+3)+(+5)=+8$.
- $(-2)+(-5)=...$ i due numeri sono entrambi negativi, quindi sono concordi, i loro valori assoluti sono 2 e 5, la somma ha valore assoluto 7, il segno è -, pertanto $(-2)+(-5)=-7$.

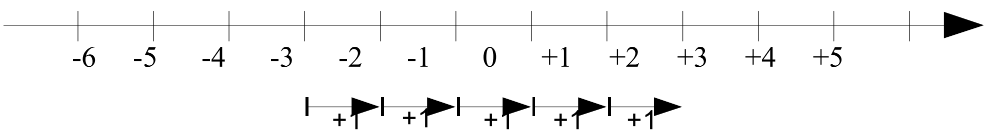
La **somma di due numeri relativi discordi** è il numero che ha per valore assoluto la differenza dei valori assoluti e come segno il segno del numero che ha valore assoluto maggiore.

Esempi

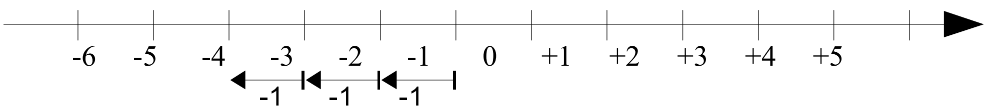
- $(-5)+(+2)=...$ i due numeri da sommare sono discordi, i loro valori assoluti sono 5 e 2, la differenza è 3, il numero che ha valore assoluto maggiore è -5, pertanto il risultato ha lo stesso segno di -5, cioè è negativo, in definitiva $(-5)+(+2)=-3$.
- $(+5)+(-2)=...$ i due numeri da sommare sono discordi, i loro valori assoluti sono 5 e 2, la loro differenza è 3, il numero che ha valore assoluto maggiore è +5, pertanto il risultato ha lo stesso segno di +5, cioè è positivo, in definitiva $(+5)+(-2)=+3$.
- $(+3)+(-7)=...$ i due numeri da sommare sono discordi, i loro valori assoluti sono 3 e 7, la loro differenza è 4, il numero che ha valore assoluto maggiore è -7, quindi il risultato ha segno negativo, in definitiva $(+3)+(-7)=-4$.

L'addizione si può rappresentare nella retta dei numeri come l'azione di muoversi nel verso indicata dal segno del secondo addendo: se è positivo si va verso destra, se è negativo si va verso sinistra iniziando dal punto che rappresenta il primo addendo.

(-3)+(+5) = +2

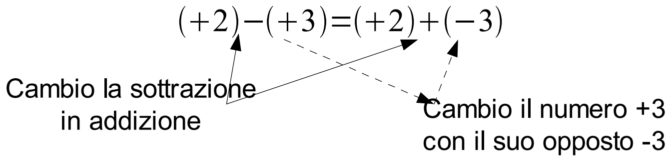


(-1)+(-3) = - 4



Sottrazione

La sottrazione tra due numeri relativi si esegue facendo la somma del primo numero con l'opposto del secondo.



Esempi

- $(+1)-(+3)=(+1)+(-3)=-2$
- $(+3)-(-7)=(+3)+(+7)=+10$
- $(-2)-(-1)=(-2)+(+1)=-1$
- $(-5)-(+5)=(-5)+(-5)=-10$

Somma algebrica

Poiché la sottrazione può essere trasformata in addizione, si può semplificare la scrittura di addizione e sottrazione di numeri relativi utilizzando soltanto l'operazione di addizione e omettendo di scrivere il segno + dell'addizione. Questo tipo di addizione tra numeri relativi si chiama **somma algebrica**.

Esempi

- $(+1)+(-2)$ se omettiamo il segno di addizione + e le parentesi otteniamo $1-2$.
- $(+1)-(+3)$ si trasforma la sottrazione in addizione con l'opposto $(+1)+(-3)$ omettendo il segno di addizione + ed eliminando le parentesi si ottiene $1-3$.
- $(-1)+(+2)+(-3)+(+2)+(-7)+(-5)$ si scrive in modo sintetico $-1+2-3+2-7-5$.

86 *Esegui le seguenti somme algebriche*

a) +3 -1 = +...
b) +2 -3 = -...
c) -5 +2 = -...
d) -2 +2 = … ...
e) -5 -2 = … 7
f) -3 +5 = …2
g) +8 -0 = … …
h) -9 +0 = … …
i) 0 -5 = … …
j) +1 -1 = … …
k) -2 -2 = … …
l) +9 -3 = … 6
m) +7 -6 = +...
n) -101 +9 = -...
o) -10 +5 = … 5

Moltiplicazione

Dati due interi relativi da moltiplicare si chiamano fattori i due numeri e prodotto il risultato dell'operazione.

DEFINIZIONE. Il prodotto di due numeri interi relativi è il numero intero avente come valore assoluto il prodotto dei valori assoluti dei fattori e come segno il segno + se i fattori sono concordi, il segno – se i fattori sono discordi.

Esempi

- $(+3)\cdot(-2)=-6$ il numero 6 si ottiene da 3·2, il segno è negativo perché i fattori sono discordi.
- $(-2)\cdot(-3)=+6$ il numero 6 si ottiene da 3·2, il segno è positivo perché i fattori sono concordi.
- $(+5)\cdot(+3)=+15$ il numero 15 si ottiene da 5·3, il segno è positivo perché i fattori sono concordi.
- $(-1)\cdot(+2)=-2$ il numero 2 si ottiene da 1·2, il segno è negativo perché i fattori sono discordi.

Per determinare il segno di un prodotto si può ricorrere alla seguente regola dei segni: nella prima riga e nella prima colonna sono collocati i segni dei fattori, all'incrocio tra la riga e la colonna c'è il segno del risultato.
Nel caso si debbano eseguire più moltiplicazioni il segno del prodotto è negativo se il segno meno è presente in un numero dispari di fattori; se il segno negativo è presente un numero pari di volte il prodotto è positivo.

•	+	–
+	+	–
–	–	+

Perché meno per meno fa più, una possibile spiegazione

$0=0\cdot(-2)=(-3+3)\cdot(-2)=(-3)\cdot(-2)+(+3)\cdot(-2)=...-6$

Quale valore dobbiamo assegnare a $(-3)\cdot(-2)$ affinche il numero ottenuto sommato a -6 dia 0? Evidentemente il numero +6.

Esempi

- $(+3)\cdot(+2)\cdot(-2)=-12$ il risultato è negativo perché vi è un solo segno - tra i fattori.
- $(-2)\cdot(-3)\cdot(+5)\cdot(-2)\cdot(-1)=+60$ il risultato è positivo perché ci sono quattro segni -.
- $(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot(-2)\cdot(+2)\cdot(-3)=-72$ il risultato è negativo poiché ci sono cinque -.

87 Calcola i seguenti prodotti

a) $(+3)\cdot(-2)=-...$
b) $(-5)\cdot(-2)=+...$
c) $(+2)\cdot(+4)=...8$
d) $(+1)\cdot(-1)=...1$
e) $(+3)\cdot 0=......$
f) $(-2)\cdot(-2)=......$
g) $0\cdot(-3)=......$
h) $(-2)\cdot(+2)=......$
i) $(+10)\cdot(-1)=...$

Divisione

La regola della divisione è del tutto analoga a quella della moltiplicazione. Per dividere due numeri relativi si dividono i valori assoluti e si attribuisce al risultato il segno + se i numeri da dividere sono concordi, il segno – se i numeri sono discordi.
Osserva che mentre addizione, sottrazione e moltiplicazione sono operazioni sempre possibili tra numeri interi relativi, ossia il risultato di queste operazioni è sempre un numero intero relativo, il risultato della divisione non sempre è un numero intero relativo. La divisione tra numeri relativi è possibile se è possibile la divisione tra i loro valori assoluti, ossia se il divisore è diverso da zero ed è un sottomultiplo del dividendo.

Esempi

- $(+8):(+2)=+4$ il risultato è 4 perché 8:2=4, il segno è + perché sono concordi.
- $(+9):(-3)=-3$ il risultato è 3 perché 9:3=3, il segno è – perché sono discordi.
- $(-12):(-4)=+3$ il risultato è 3 poiché 12:4=3, il segno è + perché sono concordi.

Potenza di un numero relativo

La definizione di potenza per un numero relativo è la stessa di quella data per i numeri naturali (in questo caso la base è un numero relativo ma l'esponente è un numero naturale). Si moltiplicano tra di loro tanti fattori uguali alla base quante volte è indicato dall'esponente. L'unica attenzione che dobbiamo avere è quella relativa al segno:

- se la base è un numero positivo il risultato della potenza sarà sempre positivo;
- se la base è un numero negativo il segno dipende dall'esponente: se l'esponente è dispari il risultato è negativo, se l'esponente è pari il risultato è un numero positivo.

Esempi

- $(+3)^2=(+3)\cdot(+3)=+9$
- $(+3)^3=(+3)\cdot(+3)\cdot(+3)=+27$
- $(-2)^2=(-2)\cdot(-2)=+4$
- $(-2)^3=(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)=-8$

Ricordiamo poi che un qualsiasi numero, diverso da 0, elevato a 0 dà come risultato il numero 1 e che qualsiasi numero elevato a 1 rimane invariato.

$$a^0=1 \qquad a^1=a \qquad \text{con } a\neq 0$$

Esempi

$(-3)^0=1$ $(+5)^0=1$ $(-2)^1=-2$ $(+7)^1=+7$

88 *Esegui le seguenti addizioni di numeri relativi*

a) (+3)+(+2) =
b) (-5)+(-5) =
c) (-3)+(+5) =
d) (+12)+(+2) =
e) (-2)+(-3) =
f) (-3)+(+13) =
g) (+10)+(-5) =
h) (+1)+(+1) =
i) (-10)+0 =
j) (-4)+(+4) =
k) (+7)+(-6) =
l) (-9)+(-3) =
m) (-101)+(+2) =
n) 0+(-9) =
o) (-10)+(+10) =

89 *Esegui le seguenti sottrazioni di numeri relativi*

a) (-1)-(+2) =
b) (-5)-(+3) =
c) (-2)-(+5) =
d) (+12)-(+2) =
e) (+1)-(-3) =
f) (-3)-(+1) =
g) (+11)-(-5) =
h) (+21)-(+11) =
i) (-1)-0 =
j) (-3)-(+4) =
k) (+7)-(-2) =
l) (-3)-(-3) =
m) 0-(-11) =
n) (-6)-(-6) =
o) (+5)-(-5) =

90 *Per ognuno dei seguenti numeri relativi scrivi il numero opposto*

a) +3 → …
b) -2 → …
c) +1 → …
d) -11 → …
e) -3 → …
f) +5 → …

91 *Esegui le seguenti somme algebriche*

a) -5 -2 =
b) +3 -4 =
c) -1 +2 =
d) -3 +4 =
e) -6 +7 =
f) -1 -9 =
g) +8 -7 =
h) +2 -1 =
i) -6 +2 =
j) +5 -2 =
k) +4 -3 =
l) +4 +1 =
m) +4 -6 =
n) -10 +5 =
o) -16 -4 =
p) -3 -9 =
q) +14 -7 =
r) -10 -10 =
s) +7-6 -1 =
t) -7-6 -13 =
u) -7+6 +1=
v) 0-2 +2 =
w) -5+0 +5 =
x) +8-11 +3 =
y) -10-10+10 =
z) -5+10-15=
aa) +1-2+3 =

92 *Esegui le seguenti moltiplicazioni*

a) (+3)·(+1) =
b) (+1)·(-2) =
c) (+3)·(-3) =
d) (-5)·(-1) =
e) (+3)·(-3) =
f) (-2)·(+5) =
g) (-1)·(-7) =
h) (+3)·(+11) =
i) (+1)·(-10) =
j) (-4)·(+3) =
k) (+5)·(-6)·(-1) =
l) (-3)·(-2) (+1) =
m) (-1)·(+1)·(-1) =
n) (+10)·(-1)·(-10) =
o) (-10)·(-10)·(-1) =

93 *Esegui le seguenti divisioni*

a) (+4):(+2) =
b) (+5):(-1) =
c) (+6):(+2) =
d) (+8):(-2) =
e) (-8):(+4) =
f) (-4):(+2) =
g) (-10):(+5) =
h) (+10):(-2) =
i) (-12):(+6) =
j) (-12):(+4) =
k) (+12):(-3) =
l) (-12):(+1) =

94 *Calcola il valore delle seguenti potenze*

a) $(+3)^2 =$
b) $(-1)^2 =$
c) $(+1)^3 =$
d) $(-2)^2 =$
e) $(-2)^3 =$
f) $(+2)^3 =$
g) $(-3)^2 =$
h) $(-3)^3 =$
i) $(-4)^1 =$
j) $(+4)^1 =$
k) $(-4)^2 =$
l) $(-2)^4 =$
m) $(-3)^0 =$
n) $(-1)^5 =$
o) $(-2)^4 =$

95 *Applica le proprietà delle potenze*

a) $(-3)^2\cdot(-3)^3=(-3)^{\cdots}$
b) $(-2)^4\cdot(-2)^5=(-2)^{\cdots}$
c) $(-5)\cdot(-5)^2=(-5)^{\cdots}$
d) $(-10)^2\cdot(-5)^2=(\ldots\ldots)^2$
e) $(-3)^4:(-3)^2=(-3)^{\cdots}$
f) $(-7)^3:(-7)^3=(-7)^{\cdots}$
g) $(-2)^4:(-2)^2=(-2)^{\cdots}$
h) $(-6)^4:(+2)^4=(\ldots\ldots)^4$
i) $[(-3)^2]^3=(-3)^{\cdots}$
j) $[(-5)^2]^3=(+5)^{\cdots}$
k) $(-3)^3\cdot(+3)^3=\ldots$
l) $(-8)^2:(-4)^2=\ldots$
m) $(-1)^5\cdot(-1)^4=\ldots$
n) $\{[(-1)^2]^4\}^8$
o) $[(-7)^2]^3:(-7)^3=\ldots$
p) $[(-3)^3]^2:(-3)^4=\ldots$

Completa le seguenti tabelle

96

a	+1	−2	0	+2	−3	+3	−1	+4	−5	−10
b	0	−2	−3	+1	−5	−3	−10	−5	+4	+4
a+b										

97

a	−2	−2	−3	+2	−10	+3	−1	−7	+8	−9
b	0	−3	−3	−5	−5	−1	−10	−5	+8	+4
a-b										

98

a	−2	+2	−1	+2	−10	−5	−1	−7	+8	−9
b	+1	−3	−2	−1	+11	+1	−7	−2	−3	−4
a·b										

99

a	−2	+12	−6	+20	−10	−5	−21	−16	+8	−32
b	+1	−3	−2	−1	−5	+1	−7	−2	−4	−4
a:b										

100

a	−2	+1	+2	−1	+3	−3	−4	−2	+2	−3
b	1	3	2	4	2	3	2	4	5	2
a^b										

101

a	−2	+2	−1	+2	−10	−5	−1	−7	+8	−9
b	+1	−3	−2	−1	+11	+1	−7	−2	−3	−4
c	−3	−5	−6	+1	−1	−2	−2	−5	−3	+2
a-(b+c)										

102

a	−2	+2	−1	+2	−10	−5	−1	−7	+8	−9
b	+1	−3	−2	−1	+11	+1	−7	−2	−3	−4
c	−3	−5	−6	+1	−1	−2	−2	−5	−3	+2
(a+b)·c										

103

a	−2	+12	−6	+20	−10	−5	−21	−16	+8	−12
b	+1	−3	−2	−1	−5	+1	+19	−14	−4	−8
$(a-b)^2$										

104

a	−2	+12	−6	+20	−10	−5	−21	−16	+8
b	+1	−3	−2	−1	−5	+1	+19	−14	−4
(a+b)·(a-b)									

105

a	1	2	-2	-3	4	-5	-1	6	-7	10
b	-1	0	-3	-2	4	-2	1	-4	-3	4
c	0	-1	1	-2	3	-3	4	-5	5	-6
a-(b+c)										
a-b+c										
a-b-c										

106

a	-1	-2	3	0	1	2	-4	5	-5	-3
a^2										
$-a^2$										
$-(-a)^2$										

107

a	-2	-3	3	-1	0	-2	-4	-3	4	5
b	0	1	-1	-2	2	-3	2	-2	-3	-5
a·b										
-ab										
(-a)(-b)										
$-a^2b$										

108

a	0	2	1	-4	-6	-8	10	12	-14	-16
b	1	-1	-1	2	-3	2	-5	6	-7	8
a:b										
-a:b										
-(a:b)										
a:(-b)										

109

a	-2	2	-1	1	0	1	-1	2	-2	3
b	-1	1	0	1	-1	2	-2	3	-3	3
a+b										
-a+b										
-a-b										
-(a+b)										
-(a-b)										
-(-a+b)										

110

a	1	0	-1	2	-2	0	3	-3	4	-10
b	2	0	1	-1	-2	-3	2	3	4	8
c	3	1	1	-2	-2	3	-2	0	0	2
-2a+(b-c)										

►*14.* Le proprietà delle operazioni nell'insieme dei numeri relativi

Proprietà commutativa

Una operazione gode della proprietà commutativa se cambiando l'ordine dei termini il risultato non cambia.

- Somma algebrica $a+b=b+a$ $\quad -3+5=5-3=+2$ **Vale** la proprietà commutativa.
- Moltiplicazione $a\cdot b=b\cdot a$ $\quad (-3)\cdot(-5)=(-5)\cdot(-3)=(+15)$ **Vale** la proprietà commutativa.
- Potenza $a^b\neq b^a$ $\quad 3^2=9 \quad 2^3=8$ **Non vale** la proprietà commutativa.

Proprietà associativa

Un'operazione gode della proprietà associativa se presi tre numeri si ottiene sempre lo stesso risultato indipendentemente da come si raggruppano i numeri per eseguire l'operazione.

- Somma algebrica $(a+b)+c=a+(b+c)$

Dovendo sommare $+3-5-2$
Raggruppando i primi due numeri si ha $(+3-5)-2=-2-2=-4$
Raggruppando gli ultimi due numeri si ha $3+(-5-2)=3-7=-4$
Nella somma algebrica tra numeri relativi **vale** la proprietà associativa

- Moltiplicazione

Dovendo moltiplicare tre o più numeri relativi si può procedere scegliendo a piacere da quale iniziare

$$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$$

Per esempio, dovendo moltiplicare $(-3)\cdot(-5)\cdot(-2)$
Si può cominciare dalla prima moltiplicazione $[(-3)\cdot(-5)]\cdot(-2)=(+15)\cdot(-2)=(-30)$
Oppure si può cominciare dalla seconda moltiplicazione $(-3)\cdot[(-5)\cdot(-2)]=(-3)\cdot(+10)=(-30)$
Nella moltiplicazione tra numeri relativi **vale** quindi la proprietà associativa.

- Sottrazione

Nella sottrazione tra numeri relativi **non vale** la proprietà associativa, infatti

$$(a-b)-c \neq a-(b-c)$$

Per esempio, dovendo sottrarre $(-3)-(+5)-(+8)$
Se eseguiamo per prima la prima sottrazione abbiamo $[(-3)-(+5)]-(+8)=(-8)-(+8)=-16$
Se eseguiamo per prima la seconda sottrazione abbiamo $(-3)-[(+5)-(+8)]=(-3)-(-3)=0$

Elemento neutro

Una operazione su uno specifico insieme numerico ha elemento neutro se esiste, ed è unico, un numero che composto con un qualsiasi altro numero lo lascia inalterato.
Nella somma algebrica l'elemento neutro è 0 sia che si trovi a destra sia che si trovi a sinistra dell'operazione:

- $+3+0=+3 \qquad -2+0=-2 \qquad 0+5=+5 \qquad 0-4=-4$

Nella moltiplicazione l'elemento neutro è +1 sia a destra sia a sinistra .

- $-5\cdot(+1)=-5 \qquad +3\cdot(+1)=+3 \qquad +1\cdot(-3)=-3 \qquad +1\cdot(+7)=+7$

Nella sottrazione 0 è elemento neutro solo a destra

- $-3-0=-3 \qquad +2-0=+2 \qquad 0-(+2)=-2 \qquad 0-(-5)=+5$

Nella divisione l'elemento neutro è +1 solo se si trova a destra $a:(+1)=a \qquad +1:a=...$
Dividendo +1 per un numero intero relativo si ottiene un numero intero solo se il divisore è +1 o -1.

Proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione

Moltiplicare il risultato dell'addizione di più numeri per un altro numero dà lo stesso risultato che moltiplicare ogni addendo per il fattore e addizionare i prodotti ottenuti. Questa proprietà, detta distributiva, vale sia se la somma è a destra sia se è a sinistra.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b + a\cdot c \qquad (a+b)\cdot c=a\cdot c + b\cdot c$$

111 In quali delle seguenti situazioni è utile ricorrere ai numeri relativi?

□ misurare la temperatura
□ contare le persone
□ esprimere la data di nascita di un personaggio storico
□ esprimere l'età di un personaggio storico
□ indicare il saldo attivo o passivo del conto corrente
□ indicare l'altezza delle montagne e le profondità dei mari

112 La somma di due numeri relativi è sicuramente positiva quando

[A] i due numeri sono concordi [B] i due numeri sono discordi
[C] i due numeri sono entrambi positivi [D] i due numeri sono entrambi negativi

113 La somma di due numeri relativi è sicuramente negativa quando

[A] i due numeri sono concordi [B] i due numeri sono discordi
[C] i due numeri sono entrambi positivi [D] i due numeri sono entrambi negativi

114 Il prodotto di due numeri relativi è positivo quando (più di una risposta possibile)

[A] i due numeri sono concordi [B] i due numeri sono discordi
[C] i due numeri sono entrambi positivi [D] i due numeri sono entrambi negativi

115 Il prodotto di due numeri relativi è negativo quando

[A] i due numeri sono concordi [B] i due numeri sono discordi
[C] i due numeri sono entrambi positivi [D i due numeri sono entrambi negativi

116 *Quali delle seguenti affermazioni sono vere?*

- Ogni numero relativo è minore di zero [V] [F]
- La somma di due numeri discordi è zero [V] [F]
- Il cubo di un numero intero relativo è sempre negativo [V] [F]
- La somma di due numeri opposti è nulla [V] [F]
- Il quoziente di due numeri opposti è l'unità [V] [F]
- Il quoziente di due numeri concordi è positivo [V] [F]
- Il prodotto di due numeri opposti è uguale al loro quadrato [V] [F]
- Il doppio di un numero intero negativo è positivo [V] [F]
- La somma di due interi concordi è sempre maggiore di ciascun addendo [V] [F]
- Il quadrato dell'opposto di un intero relativo è uguale all'opposto del suo quadrato [V] [F]

117 *Inserisci l'operazione corretta*

a) (+2) … (-1) = -2
b) (-10) … (+5) = -2
c) (-18) … (-19) = +1
d) (+15) … (-20) = -5
e) (-12) … (+4) = -3
f) (-4) … 0 = 0
g) (+1) … (+1) = 0
h) (+5) … (-6) = +11
i) -8 … (-2) = +16

118 *Inserisci il numero mancante*

a) +5 + (…...) = -5
b) -8 + (…...) = -6
c) +7 - (…...) = 0
d) 0 - (…...) = -2
e) $+3\cdot(......)=-3$
f) $-5\cdot(......)=0$
g) (+16) : (…...) = -2
h) (-6) : (…...) = -1
i) (-10) : (…...) = +5

119 Scrivi tutti i numeri interi relativi

a) interi relativi che hanno valore assoluto minore di 5;
b) interi relativi il cui prodotto è -12
c) interi negativi maggiori di -5

120 Inserisci + o – in modo da ottenere il numero più grande possibile -3 … (-3) … 3 … (-6)

Inserisci le parantesi in modo da ottenere il risultato indicato

121 $-3\cdot-3+1$ R. +10
122 $-3\cdot-1+1$ R. 0
123 $-5\cdot+3-1+2$ R. -20
124 $-5+2\cdot-1+2$ R. +6
125 $-5+7-3+2$ R. 7
126 $-1\cdot+3-5\cdot-1-2$ R. +12
127 $+1-1\cdot1-1+3-2\cdot-3-2$ R. +5

Calcola il valore delle seguenti espressioni

128 $-5+7+4-9$ [-3]

129 $+1-1+1-1+1-1+1$ [+1]

130 $+1-2+3-4+5-6$ [-3]

131 $+1-2+2-3+3-4+5-6+6-7+7-8+8-9+9-10$ [-8]

132 $(-3+10)-(2-3)$ [+8]

133 $(+5-2-1)+(+2+4+6)$ [14]

134 $(-5+7-9)+(+1-2+3)-(+4-6+8)$ [-11]

135 $+4-3-[+2-1-(8-3)-(-5-2)]-(2+3)$ [-7]

136 $-2+(-5+1)+(-7+4)-2\cdot(-6+1)$ [+1]

137 $15-9\cdot(-14+12)+8\cdot(-3+6)+5\cdot(-3+1)$ [+47]

138 $(50-36-25)\cdot(-15+5+20)-10\cdot(-3-7)$ [-10]

139 $[+3-(10-5+25)]\cdot[-16+5-(-2-14)]:(9+6)$ [-9]

140 $20:(+15-5)-30:(-10+5)+40:(15-20)$ [0]

141 $18:(-3)+6\cdot[1-5\cdot(-2+4)+3]:(-6)$ [0]

142 $3\cdot4-3\cdot[18:(-2)-17+(14-26+5)\cdot3-12]+[16-1\cdot(-1-3+5)-37+16]$ [183]

Calcola il valore delle seguenti espressioni e indica dove puoi applicare le proprietà delle potenze.

143 $100:2+3^2-2^2\cdot6$ hai applicato le proprietà delle potenze? ☐SI ☐NO [35]

144 $2^7:2^3-2^2$ hai applicato le proprietà delle potenze? ☐SI ☐NO [12]

145 $30-5\cdot3-7\cdot2^2-2$ hai applicato le proprietà delle potenze? ☐SI ☐NO [-15]

146 $(3^2+4^2)-(-3-4)^2$ …................ ☐SI ☐NO [-24]

147 $5\cdot5^3\cdot5^4:(5^2)^3+5$ …................ ☐SI ☐NO [+30]

148 $32^5:16^4+(-2)^9$ …................... ☐SI ☐NO [0]

149 $(3^4\cdot3^3:3^6)^2+(7^2-5^2):2^2$ …................ ☐SI ☐NO [+15]

150 $(3\cdot2^2-10)^4\cdot(3^3+2^3):7-10\cdot2^3$ ….................. ☐SI ☐NO [0]

Calcola il valore delle seguenti espressioni

151 $-5\cdot(12-3+4)-2\cdot[3-16:(-2+4)]^2$ [-115]

152 $[-3+(-5)\cdot(-1)]^3+[-4-(1-2)]^2$ [+17]

153 $[2\cdot(-3)^2+2\cdot(-3)\cdot(-2)]^2:[2^4-3\cdot(+6)]^2$ [225]

154 $[3\cdot(-1)^2-3\cdot(-3)\cdot(-3)]^3:[2^2+5\cdot(-2)^2]^3$

155 $(-3)^2\cdot(4-1)^5:[(-4)^3:(2^5)-3^3:(-3)^3]$ [-3^7]

156 $[-(-2)\cdot2+(-10)^2:(-5)^2]\cdot[3-5+2\cdot(-3)^2-5]$ [88]

157 $13-3-4\cdot(-2)^2-5^3:5^2+3\cdot(2^3-3^2)-6:(-3)-(4-7+3)^4$ [-12]

158 $-1-3\cdot(-3)^2-4^3:4^2+(-3-3)\cdot(2^2+3^2)-(-12):(-3)$

159 $[10-6\cdot(-2)^2]:(-7)+(3^2:3)\cdot2^3-15:(-3)+[(-3)^3:(-3)^0]$ [+4]

160 $|-5+8|-|-11|+(-|+4|\cdot|-2\cdot(+5)|)^2$ [1592]

161 $(-29+37)^5\cdot(-5+|23-28|)^7$ [0]

162 $-2\cdot(-2\cdot|-2|)^2-(|3-5|\cdot(3-5))^2\cdot(-2)$ [0]

163 $(-1)^3\cdot(-1\cdot|-1|)^2-(|-3-2|\cdot(-5+3))^2\cdot(-2+1)^3$

164 Traduci in una espressione matematica le seguenti frasi e motivane la verità o falsità :

a) Il cubo del quadrato di un numero diverso da zero è sempre positivo. [V] [F]

b) Il quadrato della somma di un numero con il suo opposto è sempre positivo. [V] [F]

c) La differenza tra il triplo di 5 e l'unità è uguale all'opposto di 5. [V] [F]

d) Il prodotto tra il quadrato di un numero negativo e l'opposto dello stesso numero è uguale all'opposto del suo cubo. [V] [F]

165 Sottrarre dal cubo di -3 la somma dei quadrati di +2 e -2. Il risultato è?

166 Sottrarre dalla somma di -15 e +27 il prodotto di -3 e +7.

167 Aggiungere al prodotto di -5 e +3 la somma di +5 e -10.

168 Sottrarre dal prodotto di +7 e +4 la somma di +1 e -8.

169 Moltiplica la somma tra -3 e +3 con la differenza tra +3 e -3.

170 Partendo dal pian terreno scendo di 15 gradini, salgo 12 gradini, scendo di 7 gradini e risalgo di 8. A che punto mi trovo rispetto al pian terreno?

171 Giocando a carte contro due avversari nella prima partita ho vinto 50 gettoni con il primo giocatore e perso 60 gettoni con il secondo giocatore, nella seconda partita ho perso 30 gettoni con il primo e vinto 10 gettoni con il secondo. Quanti gettoni ho vinto complessivamente?

172 Un polpo congelato è stato appena tolto dal congelatore, la sua temperatura è -12°; viene immerso nell'acqua bollente e la sua temperatura media è aumentata di 6°. A quale temperatura media si trova ora il polpo?

173 Una lumaca sale su un muro alto 10 metri, di giorno sale di due metri ma di notte scende di un metro. In quanti giorni la lumaca arriva in cima al muro?

174 Un termometro segna all'inizio -5°, poi scende di 3°, quindi sale di 2°, infine discende di 6°. Quale temperatura segna alla fine? [-6°]

175 Il prodotto di due numeri interi relativi è +80, aumentando di 1 il primo numero il prodotto è +72. Quali sono i due numeri? [-10; -8]

176 Il prodotto di due numeri interi relativi è +6, la loro somma è -5. Quali sono i due numeri?

177 Determina due numeri relativi aventi come prodotto +12 e come somma -7.

178 Determina due numeri relativi aventi come prodotto +2 e come somma +1.

179 Determina due numeri relativi aventi come prodotto +10 e come somma -3.

180 Determina due numeri relativi aventi come prodotto +14 e come somma -9.

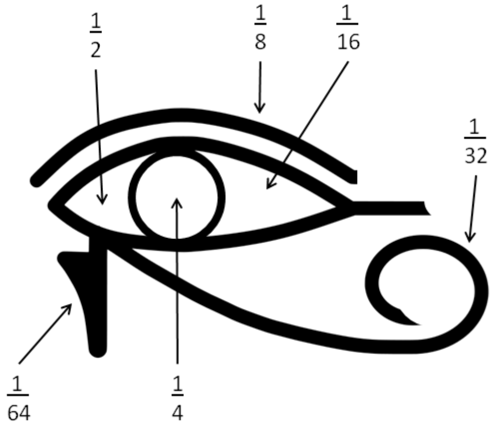
181 Determina due numeri relativi aventi come prodotto -15 e come somma -8.

182 Determina due numeri relativi aventi come prodotto +-7 e come somma +6.

►*15.* Frazioni e numeri razionali

Premessa storica

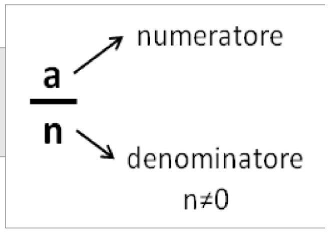
Quando si deve dividere una certa grandezza o totalità in un certo numero di parti uguali non sempre sono sufficienti i numeri interi per rappresentare il risultato della divisione. Per esempio, per dividere l'unità in due parti uguali i numeri interi non sono sufficienti.
Gli antichi hanno affrontato questo tipo di problema utilizzando varie scritture per rappresentare le parti in cui dividere l'unità, ossia le frazioni.
I Babilonesi scrivevano frazioni aventi come denominatore una potenza di 60, la base della loro numerazione; tuttavia non usavano una notazione specifica per le frazioni, ad esempio il simbolo  rappresentava sia il numero 20 sia la frazione 20/60, il valore corretto andava interpretato dal contesto.
Gli Egizi facevano largo uso dei numeri frazionari che rappresentavano come somme di frazioni unitarie, ossia frazioni con numeratore uno. La frazione unitaria $\frac{1}{n}$ (con *n* numero naturale diverso da zero) veniva rappresentata in forma geroglifica ponendo il denominatore n scritto con la normale rappresentazione del numero n sotto ad un ovale. La frazione $\frac{1}{12}$, per esempio, veniva così rappresentata .
Nel papiro di Ahmes (detto anche papiro di Rhind) troviamo una tabella che dà la scomposizione in frazioni unitarie delle frazioni del tipo $\frac{2}{n}$ con *n* dispari: la frazione $\frac{2}{43}$ è rappresentata come somma di frazioni unitarie nel seguente modo: $\frac{2}{43}=\frac{1}{42}+\frac{1}{86}+\frac{1}{129}+\frac{1}{301}$.
Alcune unità frazionarie più comuni venivano indicate con le parti dell'occhio di Horus; secondo la leggenda Horus, nella lotta contro lo zio Seth, reo di avergli ucciso il padre, perse un occhio le cui parti vennero ritrovate e ricomposte dal dio Toth a meno di una piccola parte.



I Romani fecero poco uso dei numeri frazionari; si limitarono a considerare le parti delle misure in uso che venivano divise in 12, 24, 36, 48… Avevano pertanto simboli e nomi particolari per indicare alcune frazioni:
semis per indicare $\frac{1}{2}$ il cui simbolo era S oppure Z;
sextans per indicare 1/6, *dracma* per indicare 1/96 e *obolus* per indicare la sesta parte della dracma.
Furono gli arabi a introdurre l'attuale scrittura delle frazioni e i termini "numeratore" e "denominatore".
La notazione attuale per le frazioni si deve sostanzialmente agli arabi, in Europa fu diffusa da Leonardo Pisano (Fibonacci) che con il suo "Liber Abaci" (1202) scrive e opera con le frazioni come oggi le conosciamo.

Frazioni

DEFINIZIONE. Una **frazione** è una coppia ordinata di numeri naturali in cui il primo si chiama numeratore e il secondo denominatore. Il denominatore deve essere diverso da zero.

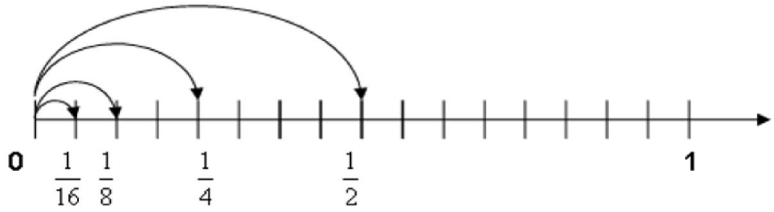


Quando si chiede, per esempio un quarto di litro di latte, $\frac{1}{4}$ *l*, si danno le informazioni su come operare sulla grandezza unitaria litro per ottenere la quantità desiderata. Le frazioni possono essere viste come *operatori* che si applicano a una grandezza fissata, considerata come l'intero o il tutto, per ottenere una nuova grandezza ben determinata e omogenea alla prima.

Una frazione con numeratore uguale a 1 è detta **frazione unitaria**; indicata con *a* una grandezza (segmento,

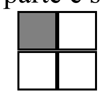
peso, superficie, angolo...) la scrittura $\frac{1}{n}A$ sta ad indicare l'operazione di divisione della grandezza A, intesa come "il tutto", in *n* parti uguali.

Nella figura, il segmento unitario da 0 a 1 è stato diviso in due parti uguali ottenendo la frazione $\frac{1}{2}$; dividendolo in quattro parti uguali si ottiene la frazione $\frac{1}{4}$; dividendolo in otto parti uguali si ottiene la frazione $\frac{1}{8}$; dividendolo in sedici parti uguali si ottiene la frazione $\frac{1}{16}$.



DEFINIZIONE. Il **denominatore** di una frazione è quel numero che indica in quante parti uguali si è diviso l'intero, poiché non ha senso dividere un intero in zero parti, il denominatore deve essere diverso da zero.

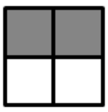
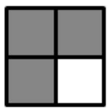
Vediamo un altro esempio. Il quadrato Q della figura è stato diviso in quattro parti uguali e una parte è stata colorata di grigio; questa parte viene indicata con la frazione unitaria $\frac{1}{4}Q$.



Un frazione $\frac{1}{n}A$ significa l'ennesima parte di *A,* dove *A* è il tutto che si deve dividere in *n* parti uguali. In altre parole, A si può ottenere moltiplicando per *n* la *frazione* $\frac{1}{n}A$.

Partendo da $\frac{1}{n}A$ si possono considerare i suoi multipli interi: $\frac{2}{n}A,\ \frac{3}{n}A,\ \ldots,\ \frac{n}{n}A$, che rappresentano il doppio di un ennesimo, il triplo di un ennesimo… l'intera grandezza A.

Riferendoci all'esempio del quadrato

 $\frac{2}{4}Q$  $\frac{3}{4}Q$  $\frac{4}{4}Q$

La frazione $\frac{m}{n}A$ (si legge emme ennesimi di *A*) con $m < n$ indica il multiplo secondo *m* della frazione unitaria $\frac{1}{n}A$ essa indica la grandezza che si ottiene dividendo *A* in *n* parti uguali e prendendone *m*.

DEFINIZIONE. Il **numeratore** di una frazione è quel numero che esprime quante parti, dell'intero suddiviso in parti secondo il denominatore, sono state prese.

Per leggere una frazione si legge prima il numeratore e poi il denominatore, quest'ultimo si legge come numero ordinale (terzo, quarto, quinto, …) fino a 10, se è maggiore di dieci si aggiunge la terminazione "esimo".

Esempi

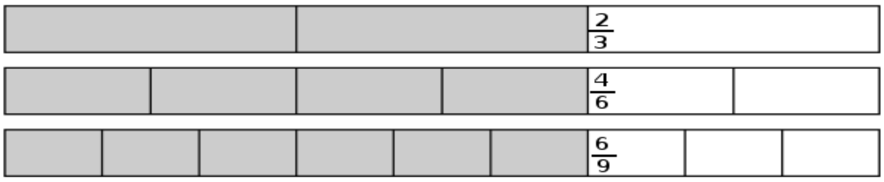
$\frac{1}{2}$ si legge "un mezzo"; $\frac{2}{3}$ si legge "due terzi"; $\frac{5}{7}$ si legge "cinque settimi";

$\frac{1}{10}$ si legge "un decimo"; $\frac{1}{11}$ "un undicesimo" $\frac{1}{12}$ "un dodicesimo"

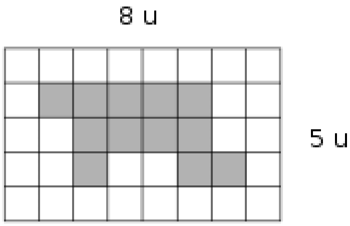
A volte per scrivere le frazioni si utilizza la scrittura del tipo a/b, quindi 2/3; 4/6; 6/9...

DEFINIZIONE. Si chiamano **proprie** le frazioni che hanno il numeratore minore del denominatore. Esse rappresentano sempre una grandezza minore dell'intero.

Vi sono frazioni che pur essendo formate da numeratori e denominatori diversi rappresentano la stessa parte dell’intero.

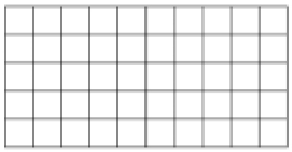


183 Da un cartoncino rettangolare quadrettato di lati rispettivamente 5 unità e 8 unità viene ritagliata la forma colorata in grigio, come mostrato nella figura.



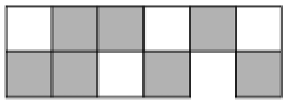
Quale delle seguenti espressioni ti sembra più corretta per esprimere la relazione tra il cartoncino e la forma ritagliata?
[A] "La forma ottenuta è più piccola del cartoncino."
[B] "La forma ottenuta è un poligono con un numero maggiore di lati rispetto al cartoncino dato."
[C] "La forma ottenuta rappresenta i 12/40 del cartoncino."
Sbaglio se affermo che la parte colorata è i 3/10 del cartoncino?

184 Il monte-premi di una lotteria è di 50.000 €; il primo premio è di 25.000 €, il secondo di 10.000 €, il terzo di 5.000 €, il quarto di 4.000 €, il quinto e il sesto premio sono uguali.
Nella figura un quadretto rappresenta 1.000 €



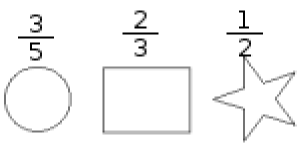
1. Colora con colori diversi i quadretti quanti servono per rappresentare i sei premi, un colore per ogni premio.
2. Quale parte del monte-premi è stata incassata da chi ha vinto il secondo premio? Esprimi questa parte con una frazione.
3. Marco ha vinto il sesto premio: quanto ha vinto?

185 La figura seguente è composta da 11 quadratini, alcuni bianchi altri grigi. Completa:



La figura è divisa in due parti mediante la colorazione: la parte grigia rappresenta .... dell'intera figura, mentre la parte bianca ne è ....

186 Di ciascuna figura colora la parte indicata dalla frazione



DEFINIZIONE. Si dicono **equivalenti** due frazioni che rappresentano la stessa parte dell'intero.

PROPRIETA' INVARIANTIVA DELLE FRAZIONI. **Se si moltiplica, o si divide, numeratore e denominatore di una stessa frazione per uno stesso numero diverso da zero si ottiene una frazione equivalente alla frazione data.**

Per trovare una frazione equivalente a una frazione assegnata è sufficiente moltiplicare per uno stesso numero il numeratore e il denominatore della frazione assegnata.

Esempio

Trovare due frazioni equivalenti a $\frac{4}{7}$.

Moltiplicando numeratore e denominatore per 2 si ha la frazione equivalente $\frac{4\cdot 2}{7\cdot 2}=\frac{8}{14}$.

Moltiplicando numeratore e denominatore per 3 si ha la frazione equivalente $\frac{4\cdot 3}{7\cdot 3}=\frac{12}{21}$.

DEFINIZIONE. Una frazione si dice **ridotta ai minimi termini** se numeratore e denominatore sono due interi primi tra loro.

Per ridurre ai minimi termini una frazione occorre dividere numeratore e denominatore per il loro Massimo Comune Divisore.

Esempio

Ridurre ai minimi termini la frazione $\frac{8}{12}$.

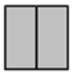
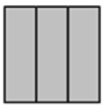
Scompongo in fattori 8 e 12, ottengo $8=2^3$ e $12=3\cdot 2^2$; calcolo il M.C.D. prendendo i fattori comuni con l'esponente più piccolo, in questo caso 2^2 cioè 4; divido numeratore e denominatore per 4:

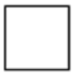
$$\frac{8}{12}=\frac{8:4}{12:4}=\frac{2}{3}\ .$$

Tutte le frazioni che hanno il denominatore (numero di parti in cui va divisa l'unità) uguale al numeratore (numero delle parti che vanno considerate) rappresentano l'intero:

$$\frac{2}{2}=\frac{3}{3}=\frac{10}{10}=1$$

Per esempio, se divido un quadrato in due parti uguali e ne prendo due parti ottengo l'intero; se divido un quadrato in tre parti uguali e ne prendo tre parti ottengo l'intero, ...

 $\frac{2}{2}=1$  $\frac{3}{3}=1$.

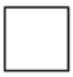
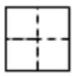
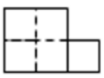
187 Cosa significa costruire la grandezza $\frac{6}{2}$ del quadrato  ? Costruisci il disego.

Tutte le frazioni che hanno il numeratoreè multiplo del denominatore rappresentano un multiplo dell'intero:

$$\frac{6}{2}=3;\ \frac{15}{3}=5;\ \frac{72}{6}=12$$

DEFINIZIONE. Si chiamano **apparenti** le frazioni che hanno il numeratore multiplo del denominatore; esse rappresentano una grandezza multipla di quella presa come intero unitario.

Le frazioni che hanno il numeratore maggiore del denominatore rappresentano grandezze più grandi dell'intero. Infatti le parti da considerare (indicate dal numeratore) sono di più delle parti in cui è divisa l'unità (indicate dal denominatore).

Per esempio $\frac{5}{4}$ di  si ottiene dividendo il quadrato in 4 parti uguali  e prendendone 5, si ha  . La grandezza ottenuta è formata da $\frac{4}{4}$ con l'aggiunta di $\frac{1}{4}$. Cioè $\frac{5}{4}=\frac{4}{4}+\frac{1}{4}$

DEFINIZIONE. Si chiamano **improprie** le frazioni che hanno il numeratore maggiore del denominatore; esse rappresentano una grandezza maggiore della grandezza assegnata come intero.

188 Indica se queste frazioni sono proprie [P], improprie [I] o apparenti [A]

a) $\frac{3}{4}$ [P] [I] [A] c) $\frac{12}{3}$ [P] [I] [A] e) $\frac{5}{3}$ [P] [I] [A]

b) $\frac{8}{3}$ [P] [I] [A] d) $\frac{5}{2}$ [P] [I] [A] f) $\frac{3}{2}$ [P] [I] [A]

189 Trova le frazioni equivalenti completando

a) $\frac{3}{4}=\frac{...}{12}$ b) $\frac{12}{16}=\frac{3}{...}$ c) $\frac{5}{2}=\frac{...}{10}$ d) $\frac{21}{35}=\frac{...}{5}$

190 Indica almeno tre frazioni equivalenti a ciascuna delle seguenti

$\frac{5}{6}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{12}{60}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{5}{2}$

191 Riduci ai minimi termini le seguenti frazioni

a) $\frac{4}{6}$ $\frac{8}{2}$ $\frac{2}{10}$ $\frac{18}{16}$ $\frac{3}{12}$ $\frac{6}{20}$

b) $\frac{80}{100}$ $\frac{8}{12}$ $\frac{9}{6}$ $\frac{10}{15}$ $\frac{14}{49}$ $\frac{15}{21}$

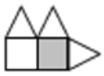
c) $\frac{16}{6}$ $\frac{18}{15}$ $\frac{20}{12}$ $\frac{21}{9}$ $\frac{24}{30}$ $\frac{25}{15}$

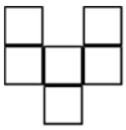
d) $\frac{27}{21}$ $\frac{28}{14}$ $\frac{30}{16}$ $\frac{32}{24}$ $\frac{35}{10}$ $\frac{36}{81}$

e) $\frac{40}{6}$ $\frac{42}{21}$ $\frac{45}{27}$ $\frac{48}{60}$ $\frac{12}{30}$ $\frac{135}{77}$

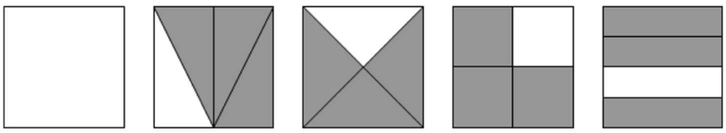
f) $\frac{121}{22}$ $\frac{87}{99}$ $\frac{15}{360}$ $\frac{110}{30}$ $\frac{240}{75}$ $\frac{140}{294}$

192 Nella figura che segue il quadratino colorato rappresenta 1/4 del quadrato grande; costruisci una figura che rappresenti 8/4 del quadrato grande accostando opportunamente altri quadrati uguali  .

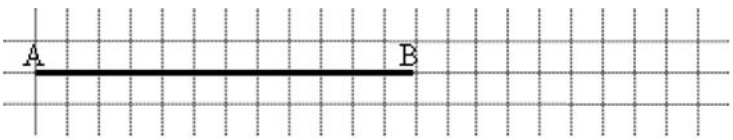
193 La parte colorata in grigio della figura corrisponde a $\frac{1}{5}$ della figura stessa? 

194 Costruisci una figura che corrisponde a $\frac{11}{6}$ della figura .

195 Per ciascuno dei seguenti disegni la parte colorata in grigio rappresenta sempre la frazione $\frac{3}{4}$ del quadrato bianco?



196 Il segmento nel disegno rappresenta i 3/5 dell'intero. Ti basta questa informazione per costruire l'intero? Come procederesti?

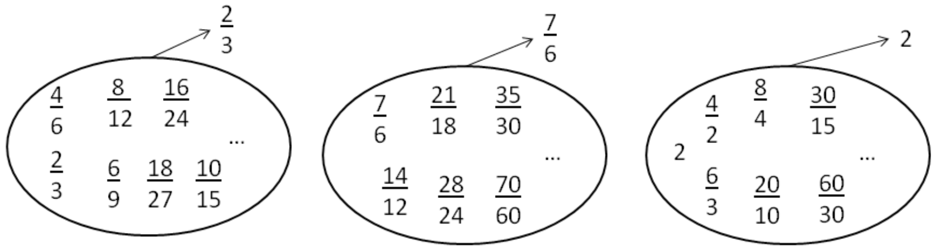


197 Disegna un segmento come grandezza unitaria e dimostra che la frazione 3/5 è equivalente a 6/10 ma non a 9/25.

198 Usando una grandezza unitaria arbitraria, stabilisci quale delle seguenti frazioni rappresenta l'intero e quale un suo multiplo: $\frac{2}{4}$ $\frac{6}{3}$ $\frac{5}{5}$ $\frac{8}{4}$ $\frac{9}{4}$

►*16.* Dalle frazioni ai numeri razionali

Come abbiamo visto, ci sono delle frazioni che, pur essendo diverse tra di loro, rappresentano la stessa parte dell'intero: queste frazioni vengono chiamate "frazioni equivalenti". Possiamo formare dei raggruppamenti di frazioni tra loro equivalenti, come nel disegno.



DEFINIZIONE. Ogni raggruppamento di frazioni equivalenti è definito come un **numero razionale assoluto** ed è rappresentato da una qualunque frazione del raggruppamento; solitamente si sceglie la frazione ridotta ai minimi termini.

Nell' esempio $\frac{2}{3}$ è il numero razionale rappresentante del raggruppamento $\left\{\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{10}{15}, \frac{14}{21}, \ldots\right\}$

In questo modo abbiamo dato al simbolo a/b un nuovo significato, quello di numero e come tale la scrittura a/b rappresenta il quoziente indicato tra i due numeri naturali a e b. Scriveremo 2:3= 2/3

DEFINIZIONE. Un numero razionale assoluto preceduto dal segno è detto **numero razionale**. L'insieme dei numeri razionali relativi si indica con il simbolo $\mathbb{Q}$.

Il segno del numero razionale relativo è quello che si ottiene dalla regola della divisione dei segni tra numeratore e denominatore.

Esempi

$$\frac{-2}{-3}=+\frac{2}{3} \quad ; \qquad \frac{2}{-3}=-\frac{2}{3} \quad ; \qquad \frac{-2}{3}=-\frac{2}{3} \quad .$$

Le frazioni proprie, che hanno numeratore minore del denominatore, rappresentano sempre un numero compreso tra 0 e 1.
Le frazioni improprie, che hanno numeratore maggiore del denominatore, si possono scrivere come somma di un numero naturale e di una frazione propria:

- il numero naturale è il risultato della divisione intera tra numeratore e denominatore;
- il numeratore della frazione unitaria è il resto della divisione tra numeratore e denominatore;
- il denominatore della frazione unitaria è il denominatore stesso della frazione.

Esempi

- $\frac{11}{3}$ osserva che 11:3 = 3 con resto di 2, quindi $\frac{11}{3}=3+\frac{2}{3}$
- $\frac{19}{7}$ osserva che 19:7= 2 con resto di 5, quindi $\frac{19}{7}=2+\frac{5}{7}$

Le frazioni apparenti, del tipo $\frac{2}{2}; \frac{6}{3}; \frac{20}{5}; \frac{12}{4}; \frac{12}{3}; \ldots$ corrispondono a un numero intero, rispettivamente a 1, 2, 4, 3, 4.

199 Raggruppa le seguenti frazioni in insiemi di frazioni equivalenti. Etichetta l'insieme con un numero razionale, prendendo per ogni gruppo la frazione ridotta ai minimi termini

$$\frac{1}{3}; \frac{2}{4}; -\frac{5}{2}; \frac{6}{-14}; \frac{-12}{4}; \frac{3}{6}; \frac{-3}{-9}; \frac{10}{-4}; \frac{10}{20}; \frac{-18}{42}; \frac{5}{15}; -\frac{9}{21}; -\frac{15}{6}; \frac{4}{12}$$

200 Riscrivi le seguenti frazioni improprie come somma di un numero naturale e una frazione propria $\frac{10}{3}; \frac{17}{9}; \frac{11}{2}; \frac{25}{3}; \frac{17}{10}; \frac{15}{6}$

►*17.* La scrittura dei numeri razionali

I numeri razionali, rappresentati finora come frazioni, possono essere scritti come numeri decimali: basta fare la divisione tra numeratore e denominatore, il quoziente ottenuto è la rappresentazione della frazione sotto forma decimale.

$\frac{1}{3}=0,3333...$

```
1          | 3
10         |0,3333...
  10       |
    10     |
      10   |
       ... |
```

$\frac{11}{8}=1,375$

```
11       | 8
 3       |1,375
  30     |
   60    |
    40   |
     0   |
```

I numeri decimali che si ottengono sono di due tipi: numeri decimali finiti come $1,375$ e numeri decimali periodici come $1,333333333...$, quest'ultimo si scrive mettendo un barra sulla parte periodica $1,\overline{3}$ oppure racchiudendo la parte periodica tra parentesi tonde $1,(3)$.

I numeri decimali finiti si ottengono dalle frazioni il cui denominatore ha come fattori solo il 2, solo il 5 o entrambi, eventualmente elevati a una potenza.
I numeri decimali periodici semplici si ottengono dalle frazioni il cui denominatore non ha per fattori né 2 né 5.
I numeri decimali periodici misti si ottengono dalle frazioni il cui denominatore contiene altri fattori oltre al 2 e al 5.

Esempi

$\frac{11}{8}=\frac{11}{2^3}=\frac{11\cdot 5^3}{2^3\cdot 5^3}=\frac{1375}{1000}=1,375$

$\frac{13}{40}=\frac{13}{2^3\cdot 5}=\frac{13\cdot 5^2}{2^3\cdot 5^3}=\frac{325}{1000}=0,325$

$\frac{7}{25}=\frac{7}{5^2}=\frac{7\cdot 2^2}{5^2\cdot 2^2}=\frac{28}{100}=0,28$

$\frac{50}{7}=\frac{...}{10}$ non è possibile

201 Senza eseguire le divisioni indica quali di queste frazioni possono essere scritte come numero decimale finito [DF], quali come numero decimale periodico [DP] e quali come numeri intero [I] :

a) $-\frac{3}{2}$ [DF] [DP] [I] e) $\frac{5}{6}$ [DF] [DP] [I]

b) $-\frac{6}{5}$ [DF] [DP] [I] f) $-\frac{5}{12}$ [DF] [DP] [I]

c) $\frac{2}{25}$ [DF] [DP] [I] g) $\frac{12}{6}$ [DF] [DP] [I]

d) $\frac{5}{8}$ [DF] [DP] [I] h) $\frac{5}{10}$ [DF] [DP] [I]

Procedura per trasformare una frazione in numero decimale

1. **eseguire la divisione tra numeratore e denominatore;**
2. **se la divisione ha un resto mettere la virgola al quoziente e moltiplicare per 10 il resto;**
3. **continuare la divisione finché il resto è zero oppure fino a che non si trova un resto già trovato prima;**
4. **se la divisione si conclude con resto 0 si ottiene un numero decimale finito;**
5. **se la divisione si conclude perché si è ritrovato un resto ottenuto in precedenza si ottiene un numero decimale periodico.**

Esempi

```
113|20          17 |6          15 |7
100 5,65        12  2,83       14  2,142857
 130             50             10
 120             48              7
  100             20             30
  100             18             28
    0              2              20
                                  14
                                   60
                                   56
                                    40
                                    35
                                     50
                                     49
                                      1
```

$\frac{113}{20}=5{,}65$
numero decimale finito

$\frac{17}{6}=2{,}8\overline{3}$
numero decimale periodico misto di periodo 3

$\frac{15}{7}=2{,}\overline{142857}$
numero decimale periodico di periodo 142857

Viceversa un numero decimale finito o periodico può essere sempre scritto sotto forma di frazione.

Procedura per trasformare un numero decimale finito in una frazione

1. **contare le cifre significative dopo la virgola**
2. **moltiplicare numeratore e denominatore per la potenza del 10 che ha esponente uguale al numero delle cifre significative dopo la virgola.**

Per facilitare questa operazione possiamo considerare i numeri decimali finiti come frazioni particolari che hanno il numeratore uguale al numero decimale e il denominatore uguale a 1.

1,360 ha due cifre significative dopo la virgola $\frac{1{,}36}{1}=\frac{1{,}36\cdot 10^2}{1\cdot 10^2}=\frac{136}{100}=\frac{34}{25}$

0,00043000 ha cinque cifre significative dopo la virgola $\frac{0{,}00043}{1}=\frac{0{,}00043\cdot 10^5}{1\cdot 10^5}=\frac{43}{100000}$

Un numero decimale periodico, generalmente, presenta tre elementi:

- **la parte intera**, composta dalle cifre poste prima della virgola;
- **il periodo**, che è composto da una o più cifre che si ripetono all'infinito dopo la virgola;
- **l'antiperiodo**, la parte, talvolta assente, composta da una o più cifre poste tra la virgola e il periodo.

Per esempio, nel numero 253,485795795795795... la parte intera è 253, il periodo è 579, l'antiperiodo è 48. Dato che il numero è infinito non può essere scritto con tutte le sue cifre, si usano due modi per scriverlo in forma compatta, mettendo una lineetta sopra le cifre del periodo o racchiudendo le cifre del periodo tra parentesi tonde.

Il numero 253,485795795795795... può essere scritto $253{,}48\overline{579}$, oppure $253{,}48(579)$.

I numeri decimali periodici si dividono in:

- **semplici** se subito dopo la virgola è presente il periodo $2{,}\overline{3}$
- **misti** se dopo la virgola è presente l'antiperiodo $2{,}5\overline{12}$

Anche i numeri periodi possono essere trasformati in una frazione, che si dice **frazione generatrice** del numero:

Procedura per determinare la frazione generatrice di un numero periodico

1. **scrivere il numero senza la virgola** $\mathbf{2{,}5\overline{12} \rightarrow 2512}$;
2. **il numeratore della frazione si ottiene sottraendo dal numero senza la virgola il numero costituito dalle cifre che precedono il periodo** $\mathbf{2512-25=2487}$;
3. **Il denominatore della frazione si ottiene scrivendo tanti 9 quante sono le cifre del periodo e tanti 0 quante sono le eventuali cifre dell'antiperiodo:** $\mathbf{2{,}5\overline{12}=\frac{2487}{990}}$.

Ma perché questa regola? Una possibile spiegazione

Consideriamo il numero periodico semplice $2,\overline{3}$. Considero la frazione $\frac{2,\overline{3}}{1}$ moltiplico numeratore e denominatore per 10 $\frac{2,\overline{3}\cdot 10}{1\cdot 10}$ e ottengo $\frac{23,\overline{3}}{10}$.

L'obiettivo è quello di eliminare dal numeratore della frazione la parte decimale, per ottenere questo risultato tolgo $2,\overline{3}$ da $23,\overline{3}$ cioè $23,\overline{3}-2,\overline{3}=21$.

Come mai $2,\overline{3}$ e non $1,\overline{3}$ o $0,\overline{3}$? Perché in questo modo posso sapere quanto vale il denominatore: se $23,\overline{3}$ è il risultato della moltiplicazione di $2,\overline{3}\cdot 10$, 21 è il risultato della moltiplicazione di $2,\overline{3}\cdot 9$ in quanto $21=23,\overline{3}-2,\overline{3}$. In definitiva $2,\overline{3}=\frac{23-2}{9}=\frac{21}{9}=\frac{7}{3}$.

Possiamo usare lo stesso procedimento per il numero periodico misto. $2{,}5\overline{12}$.

Considero la frazione $\frac{2{,}5\overline{12}}{1}$ moltiplico numeratore e denominatore per 1000 e ottengo: $\frac{2512,\overline{12}}{1000}$

L'obiettivo è quello di eliminare dal numeratore della frazione la parte decimale che contiene il periodo che si ripete all'infinito e per ottenere questo risultato tolgo da $2512,\overline{12}$ questa volta $25,\overline{12}$ cioè $2512,\overline{12}-25,\overline{12}=2487$. Per avere una frazione equivalente occorre che al denominatore abbia 990 in quanto dal numeratore ho tolto 10 volte $2{,}5\overline{12}$.

$2{,}5\overline{12}=\frac{2512-25}{990}=\frac{2487}{990}$.

Numeri periodici particolari

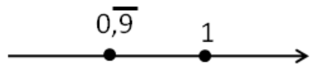
Numeri periodici particolari sono quelli che hanno come periodo il numero 9, come $2,\overline{9}$, $1{,}1\overline{9}$, $21{,}22\overline{9}$ ecc. Se, per esempio, applichiamo la regola per il calcolo della frazione generatrice al numero periodico $2,\overline{9}$ otteniamo un risultato inatteso.

$$2,\overline{9}=\frac{29-2}{9}=\frac{27}{9}=3$$

Quindi $2,\overline{9}$ coincide con il numero intero 3.

Per lo stesso motivo $1{,}1\overline{9}=1{,}2$, $21{,}22\overline{9}=21{,}23$.

Questo fatto si può anche dimostrare in modo grafico, rappresentando, ad esempio, il numero $0,\overline{9}$ e il numero 1 sulla retta reale.



Se i due numeri fossero veramente diversi sarebbero rappresentati da due punti distinti come in figura. Dato che la retta reale non può avere "buchi", tra un suo punto e un altro ci deve essere almeno un altro numero compreso tra i due. Ma qual è questo numero? Qualunque numero decimale minore di 1 è sicuramente superato dal numero $0,\overline{9}$, ad esempio 0,9999999998 è sicuramente più piccolo di $0,\overline{9}$. Quindi non esiste nessun numero tra $0,\overline{9}$ e 1 , di conseguenza i due numeri coincidono.

202 Trasforma le seguenti frazioni in numeri decimali

a) $\frac{13}{2}=$ $\frac{11}{3}=$ $\frac{3}{5}=$ $\frac{15}{6}=$ $\frac{17}{7}=$ $\frac{15}{8}=$

b) $\frac{12}{9}=$ $\frac{127}{10}=$ $\frac{122}{11}=$ $\frac{13}{12}=$ $\frac{35}{121}=$ $\frac{121}{35}=$

c) $\frac{12}{10}=$ $\frac{127}{100}=$ $\frac{122}{1100}=$ $\frac{13}{100}=$ $\frac{35}{1000}=$ $\frac{121}{10000}=$

d) $\frac{12}{5}=$ $\frac{13}{7}=$ $\frac{15}{4}=$ $\frac{5}{8}=$ $\frac{32}{9}=$ $\frac{21}{20}=$

e) $\frac{37}{18}=$ $\frac{2}{21}=$ $\frac{16}{5}$

203 *Trasforma in frazioni i seguenti numeri decimali*

a) 12,5	4,2	6,25	3,75	0,1	12,5
b) 12,3	1,13	2,25	3,24	4,75	5,21
c) 100,100	0,12	1,1030	0,00100	100,001	0,0001
d) 1,25	0,08	1,002	15,675	1,7	1,46
e) 0,13	0,149	5,015	3,21	2,3	1,086

Alcuni risultati: 25/2; 21/5; 25/4; 15/4; 1/10; 25/2

204 Completa la tabella

Numero decimale	Parte intera	Parte decimale	periodo	antiperiodo	frazione
1,7521					
$3,\overline{75}$					
$12,1\overline{24}$					
$1,0\overline{5}$					
$0,13\overline{57}$					

205 Trasforma i seguenti numeri decimali in frazioni.

a)	$-1,25$	$0,03$	$-2,\overline{1}$	$0,\overline{13}$
b)	$5,080$	$3,7\overline{52}$	$-0,38$	$11,\overline{175}$
c)	$0,01\overline{02}$	$0,12\overline{345}$	$100,\overline{100}$	$100,00\overline{1}$
d)	$0,08$	$0,2$	$0,1$	$0,03$
e)	$23,\overline{5}$	$22,\overline{32}$	$0,25$	$31,\overline{02}$
f)	$0,\overline{21}$	$2,3\overline{4}$	$3,21\overline{8}$	$0,03\overline{4}$

206 Scrivi la frazione generatrice di $12,3\overline{45}$, qual è la 614-ma cifra decimale del numero?

207 Calcola $0,\overline{9}-3,\overline{9}$. Cosa osservi?

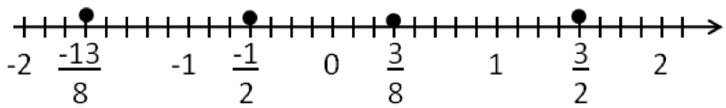
►*18.* I numeri razionali e la retta

Anche i numeri razionali si possono rappresentare su una retta orientata. Per fare questo occorre scegliere un punto **O** sulla retta e associare ad esso il numero zero. Fissiamo poi un segmento unitario e scegliamo un verso di percorrenza.

Dato un numero razionale positivo, rappresentato dalla frazione $\frac{a}{n}$ il punto corrispondente al numero razionale sulla retta viene determinato nel seguente modo. Dividiamo il segmento unitario *u* in tante parti uguali quante sono quelle indicate dal denominatore *n* della frazione, ottenendo così la frazione unitaria $\frac{1}{n}$. A partire dal punto O procedendo verso destra, si contano *a* frazioni unitarie. L'ultimo punto rappresenta il numero razionale $\frac{a}{n}$.

Per le frazioni improprie la singola unità *u* non è sufficiente, occorre prendere la unità successiva di *u* e dividere anche questa in *n* parti. Il procedimento si ripete fino a che si considerano tutte le frazioni unitarie indicate da ***a*.** Anche in questo caso, il punto individuato dall'ultima frazione unitaria rappresenta il numero razionale $\frac{a}{n}$. In alternativa si può scomporre la frazione impropria nella somma di un numero intero e di una frazione propria, quindi si rappresenta la frazione impropria a partire dal suo numero intero invece che partire da 0. Per esempio, per rappresentare la frazione $\frac{3}{2}$ trasformiamo la frazione in $1+\frac{1}{2}$, quindi rappresentiamo $\frac{1}{2}$ partendo dal numero 1 invece che da 0.

Se il numero razionale è negativo, ci comportiamo come prima con l'avvertenza di muoverci nel senso opposto a quello precedente cioè da destra verso sinistra.



208 Rappresenta su una retta orientata, dopo aver scelto una opportuna unità di misura, i seguenti gruppi di numeri razionali, ciascun gruppo su una retta

a) $\frac{2}{3};\ -\frac{3}{4};\ \frac{5}{2};\ -\frac{7}{12};\ \frac{3}{2};\ -\frac{11}{6};\ \frac{9}{4}$

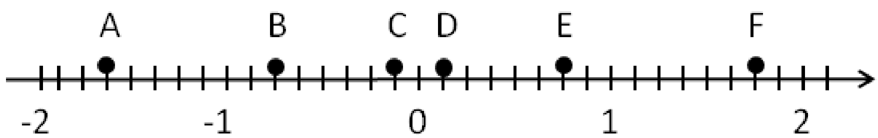
b) $\frac{0}{4};\ \frac{5}{4};\ \frac{9}{4};\ \frac{1}{2};\ \frac{19}{8};\ \frac{3}{2};\ \frac{7}{4};\ \frac{4}{2}$

c) $\frac{10}{3};\ \frac{5}{3};\ 2;\ \frac{0}{3};\ \frac{4}{3};\ \frac{2}{3};\ \frac{5}{6};\ \frac{13}{6}$

d) $\frac{1}{2};\ \frac{3}{4};\ -\frac{5}{4};\ -\frac{1}{2};\ \frac{7}{8};\ -\frac{5}{16}$

e) $\frac{8}{5};\ \frac{1}{2};\ \frac{3}{10};\ -\frac{7}{4};\ -\frac{3}{5};\ -\frac{11}{10}$

209 Scrivi i numeri razionali rappresentati dai punti segnati sulla retta nella figura



210 Disegna su una retta orientata i seguenti numeri decimali, ciascun gruppo su una retta

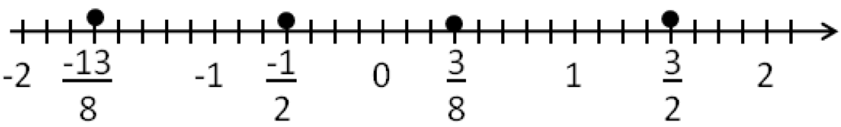
a) 0,6	2,3	-1,2	-0,06	1,1
b) +1,4	-0,3	-1,5	0,2	-2,01
c) -0,8	-1,6	+4,91	-1,17	+3,9
d) 1,55	2,01	-3,0	-2,10	0,25

►*19.* Confronto tra numeri razionali

Il numero razionale rappresentato dalla frazione $\frac{a}{n}$ **è minore** del numero razionale rappresentato dalla frazione $\frac{b}{m}$, se nella retta orientata il punto che corrisponde alla frazione $\frac{a}{n}$ precede il punto che corrisponde alla frazione $\frac{b}{m}$ e si scrive $\frac{a}{n} < \frac{b}{m}$. Viceversa $\frac{a}{n}$ **è maggiore** di $\frac{b}{m}$, se nella retta orientata il punto che corrisponde a $\frac{a}{n}$ segue il punto che corrisponde a $\frac{b}{m}$ e si scrive $\frac{a}{n} > \frac{b}{m}$.

Il numero razionale $\frac{a}{n}$ **è equivalente** a $\frac{b}{m}$ se nella retta orientata i punti che corrispondono alle due frazioni coincidono.

Esempio



$$-\frac{13}{8} < -\frac{1}{2}; \quad \frac{3}{8} > -\frac{1}{2}; \quad \frac{3}{8} < \frac{3}{2} \quad -1 > -\frac{13}{8};$$

Per certe frazioni è facile vedere se una frazione precede o segue un'altra. Per altre non è così semplice. Consideriamo per esempio le frazioni $\frac{7}{9}$ e $\frac{6}{7}$. Quale frazione precede e quale segue? Il confronto non è immediato perché con la prima frazione si conta per unità frazionarie di tipo $\frac{1}{9}$, con la seconda per unità frazionarie di tipo $\frac{1}{7}$.

In generale, senza ricorrere alla rappresentazione sulla retta, come si possono confrontare i numeri razionali? Conviene sostituire le frazioni date con altre equivalenti che hanno unità frazionarie dello stesso tipo: cioè occorre ridurre le frazioni allo stesso denominatore.

Procedura per confrontare due frazioni
1. si calcola il minimo comune multiplo dei denominatori delle frazioni;
2. si trasforma ciascuna frazione come segue:
2.1 il nuovo denominatore è il m.c.m. trovato
2.2 il nuovo numeratore si ottiene dividendo il m.c.m. per il denominatore della frazione data e moltiplicando il quoziente ottenuto per il numeratore della frazione data;
3. si confrontano i nuovi numeratori: la frazione più grande è quella che ha il numeratore più grande.

Un altro modo per confrontare due frazioni consiste nel 'moltiplicare in croce' numeratori e denominatori delle frazioni, come nel seguente esempio:

Esempio

- Confronta $\frac{3}{2}$ con $\frac{5}{3}$

Moltiplichiamo il numeratore della prima frazione con il denominatore della seconda frazione e il denominatore della prima frazione per il denominatore della seconda, così:

$$\frac{3}{2} < \frac{5}{3} \quad \text{perché} \quad 3 \cdot 3 < 2 \cdot 5$$

Esempio

- Confronta le frazioni $\frac{7}{9}$ e $\frac{6}{7}$.

$$m.c.m.(7,9) = 63 \quad \frac{7}{9} = \frac{7 \cdot 7}{9 \cdot 7} = \frac{49}{63} \quad \frac{6}{7} = \frac{6 \cdot 9}{7 \cdot 9} = \frac{54}{63} \quad \text{quindi} \quad \frac{54}{63} > \frac{49}{63} \rightarrow \frac{6}{7} > \frac{7}{9}$$

211 Inserisci tra le seguenti coppie di numeri razionali i simboli di maggiore(>), minore(<) o uguale(=).

a) $\frac{4}{5} \cdots \frac{5}{7}$; $-\frac{9}{5} \cdots -\frac{8}{3}$; $-1 \cdots \frac{1}{12}$; $\frac{2}{7} \cdots \frac{6}{21}$;

b) $-\frac{1}{2} \cdots -\frac{3}{4}$ $\frac{3}{5} \cdots \frac{6}{9}$ $\frac{2}{3} \cdots \frac{3}{4}$ $-\frac{3}{2}; \ldots -\frac{4}{3}$

212 Quale dei seguenti numeri razionali è il maggiore? $\frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{5}{8}; \frac{3}{5}; \frac{7}{12}$

213 Quale dei seguenti numeri razionali è il minore? $-\frac{2}{3}; -\frac{3}{4}; -\frac{5}{6}; -\frac{1}{2}; -\frac{2}{5}$;

214 Scrivi in ordine crescente (dal più piccolo al più grande) $-\frac{2}{3}; \frac{3}{4}; -\frac{5}{6}; \frac{1}{2}; -1; -\frac{2}{5}; 0$

215 Scrivi in ordine decrescente (dal più grande al più piccolo) $-\frac{3}{2}; \frac{4}{3}; -\frac{6}{5}; \frac{2}{5}; -1; \frac{5}{2}; 0$

216 Qual è la minore delle seguenti frazioni? $\frac{2}{3}$; $\frac{2}{7}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{1}{2}$

217 Metti in ordine le seguenti frazioni $\frac{3}{4}; \frac{4}{3}; \frac{11}{12}; \frac{5}{3}$

218 Ordina dal più piccolo al più grande

a) 10,011 10,110 11,001 11,100

b) 10,01 11,11 10,101 10,001

c) 0,101 0,011 0,110 0,011

d) 1,0101 1,1001 1,0011 1,0110

219 Scrivi una frazione molto vicina a $-\frac{2}{9}$

220 Scrivi una frazione compresa tra:

a) $\frac{3}{5}$ e $\frac{7}{10}$ b) $\frac{5}{3}$ e $\frac{1}{7}$ c) $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{3}$

221 Quali disuguaglianze sono vere?

[A] $-\frac{7}{6} < -\frac{6}{7}$ V F [B] $+\frac{7}{6} < -\frac{6}{7}$ V F

[C] $-\frac{7}{6} > +\frac{6}{7}$ V F [D] $+\frac{7}{6} < +\frac{6}{7}$ V F

[E] $-\frac{7}{6} < +\frac{6}{7}$ V F [F] $+\frac{7}{6} > -\frac{6}{7}$ V F

222 Quale dei seguenti numeri è più vicino a 1?

[A] 0,10 [B] 0,99 [C] 0,01 [D] 0,90

223 Quale dei seguenti numeri è più vicino alla frazione $\frac{1}{10}$?

[A] 0,01 [B] 0,90 [C] 1,01 [D] 0,19

224 *Scrivi due numeri compresi tra*

a) 2,3 e 3,4 b) 3,4 e 3,6 c) $2,\overline{3}$ e $2,\overline{4}$

d) $1,1\overline{3}$ e $1,2\overline{3}$ e) $3,\overline{4}$ e $3,\overline{6}$ f) $1,\overline{35}$ e $1,\overline{36}$

225 Rappresenta su una opportuna retta numerica le seguenti frazioni e poi riscrivile in ordine crescente

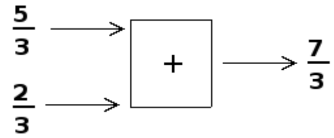
$$\frac{3}{4}; \frac{3}{8}; \frac{1}{3}; \frac{5}{4}; \frac{2}{5}; \frac{6}{3}; \frac{5}{6}; \frac{12}{4}; \frac{19}{8}; \frac{16}{5}$$

►*20.* Le operazioni con i numeri razionali

Con i numeri razionali è sempre possibile eseguire le addizioni, le moltiplicazioni, le sottrazioni e le divisioni. In altre parole, poiché un numero razionale può essere scritto sotto forma di frazione, se si addizionano, si moltiplicano, si sottraggono, si dividono due frazioni il risultato è sempre una frazione.

Addizione

Se due frazioni hanno la stessa unità frazionaria allora è sufficiente sommare i numeratori delle frazioni e prendere come denominatore l'unità frazionaria comune.

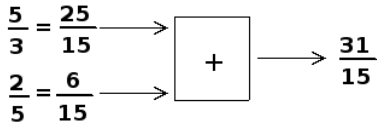


Per esempio, è noto che mezz'ora più mezz'ora fa un'ora: $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$.

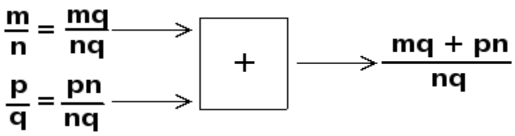
Anche un quarto d'ora più tre quarti d'ora fanno un'ora: $\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=\frac{4}{4}=1$

DEFINIZIONE. La **somma di due frazioni con lo stesso denominatore** è una frazione che ha per denominatore lo stesso denominatore delle frazioni date e per numeratore la somma dei numeratori.

Se le unità frazionarie sono diverse dobbiamo considerare frazioni equivalenti a quelle date che abbiano la stessa unità frazionaria e poi eseguire l'addizione come indicato nel punto precedente e cioè sommando i numeratori e lasciando lo stesso denominatore comune.



In generale data l'addizione di due frazioni $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}$ la somma si può scrivere come $\frac{mq+pn}{nq}$:



Quando si sommano due frazioni si può scegliere un qualsiasi denominatore comune, tuttavia per semplificare i calcoli conviene scegliere il più piccolo possibile, cioè il *minimo comune multiplo* .

Procedura per sommare due o più frazioni:

1. **ridurre le frazioni ai minimi termini;**
2. **calcolare il minimo comune multiplo dei denominatori;**
3. **mettere il minimo comune multiplo come denominatore della frazione somma;**
4. **per ogni frazione dividere il m.c.m. per il suo denominatore e moltiplicare il risultato per il**
5. **numeratore della frazione mantenendo il segno;**
6. **calcolare la somma algebrica di tutti i numeri trovati;**
7. **mettere la somma ottenuta come numeratore della frazione somma;**
8. **ridurre ai minimi termini la frazione ottenuta.**

Esempio

- *Sommare le frazioni* $\frac{8}{12}-\frac{5}{6}+\frac{8}{5}-1$

Passo 1: riduco ai minimi termini le frazioni $\frac{2}{3}-\frac{5}{6}+\frac{8}{5}-\frac{1}{1}$

Passo 2: calcolo $mcm(3,6,5,1)=30$

Passo 3: la frazione somma avrà come denominatore il m.c.m. trovato $\frac{...}{30}$

Passo 4: per ogni frazione divido il m.c.m. per il suo denominatore e moltiplico il risultato per il numeratore:

$$\frac{2\cdot(30:3)-5\cdot(30:6)+8\cdot(30:5)-1\cdot(30:1)}{30}=\frac{2\cdot10-5\cdot5+8\cdot6-1\cdot30}{30}=\frac{20-25+48-30}{30}$$

Passo 5: calcolo la somma algebrica dei numeri ottenuti al numeratore +13

Passo 6: metto la somma ottenuta al numeratore della frazione somma $+\frac{13}{30}$

Passo 7: vedo se posso ridurre la frazione, in questo caso no, il risultato è $+\frac{13}{30}$.

Sottrazione di frazioni

La sottrazione di frazioni si può sempre trasformare in una addizione tra la prima frazione e l'opposto della seconda frazione. Come per i numeri relativi, quando si parlerà di somma di frazioni si intenderà sempre somma algebrica di frazioni.

226 *Calcola le seguenti somme algebriche tra frazioni:*

a) $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}$ $\frac{7}{11}+\frac{4}{11}$ $\frac{3}{2}-\frac{5}{2}$ $\frac{8}{18}+\frac{5}{9}$

b) $\frac{6}{5}+0$ $-\frac{3}{2}+\frac{4}{3}$ $-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$ $\frac{4}{3}-\frac{6}{5}$

c) $\frac{2}{5}+\frac{5}{8}$ $\frac{5}{8}+\frac{5}{6}$ $\frac{5}{6}-\frac{5}{12}$ $1-\frac{3}{2}$

d) $\frac{11}{5}+5$ $\frac{7}{3}-\frac{6}{4}$ $3-\frac{2}{3}$ $\frac{1}{5}-1$

e) $4+\frac{3}{2}-\frac{3}{4}$ $\frac{4}{3}+3-\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}+\frac{1}{4}-\frac{5}{4}$ $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$

227 Calcola le seguenti somme algebriche fra numeri razionali.

a) $1,\overline{6}+\frac{2}{3}$ $5,1-1,\overline{5}$ $0,03+\frac{0}{3}$ $0,1\overline{6}-1,\overline{45}$

b) $50\%+\frac{1}{2}$ $\frac{2}{5}-1,2+5\%$ $-1,\overline{2}+25\%+\frac{5}{18}$ $\frac{3}{2}-13\%+0,15$

c) $1,\overline{2}+1,2$ $\frac{1}{2}+1,2\%$ $7,9892+3,0,1218$ $3,999+\textit{un centesimo}$

228 *Completa la seguente tabella*

a	$-\frac{2}{3}$	$+\frac{3}{4}$	-1	0	$-1,\overline{6}$	-5	$-0,21$
b	$+\frac{7}{3}$	$-\frac{5}{8}$	$+\frac{2}{5}$	15%	$+2,\overline{3}$	$+\frac{17}{3}$	$+\frac{3}{5}$
$a+b$							
$a-b$							
$b-a$							
$-a-b$							
$-a+b$							

229 Calcola a mente

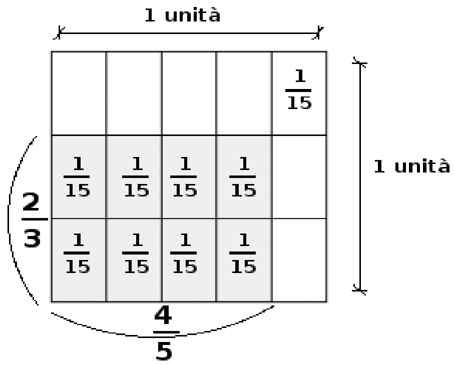
0,1+0,1 = 0,2+0,8 = 0,01+0,9 = 0,91+0,19 =

1,10+1,01= 0,999+0,10 = 1,1-0,9 = 100-0,99 =

2-0,1 = 3-1,1 = 4-1,4 = 10-0,10 =

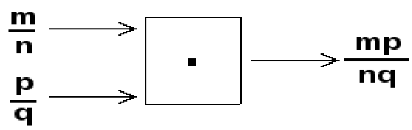
Moltiplicazione

Il risultato della moltiplicazione tra frazioni può essere interpretato come l'area di un rettangolo in cui le frazioni fattori sono la base e l'altezza.



Moltiplicare $\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}$ è come calcolare l'area del rettangolo di base $\frac{4}{5}$ e altezza $\frac{2}{3}$. Ogni rettangolino di base $\frac{1}{5}$ e altezza $\frac{1}{3}$ ha area $\frac{1}{15}$. I rettangolini da prendere in considerazione sono 8. Il risultato è quindi $\frac{8}{15}$.

Il prodotto di due frazioni è una frazione che ha per numeratore il prodotto dei numeratori e per denominatore il prodotto dei denominatori.



230 *Calcola i seguenti prodotti fra frazioni:*

a) $\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}$ c) $-\frac{6}{5}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)$ e) $\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{8}\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)$

b) $6\cdot\frac{5}{2}$ d) $\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{9}$ f) $\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{8}{9}\right)\cdot\frac{5}{6}$

231 Calcola i seguenti prodotti fra numeri razionali.

$-1,\bar{1}\cdot\frac{18}{5}$ $2\%\cdot 5\%$ $-\frac{3}{4}\cdot 1{,}4\cdot(-120\%)$

232 Completa la seguente tabella.

a	$-\frac{2}{3}$	$+\frac{3}{4}$	$-\frac{5}{8}$	15%	$-1,\bar{6}$	$+\frac{17}{3}$	−0,21
b	$+\frac{7}{3}$		$-\frac{5}{2}$		$+2,\bar{3}$		$+\frac{5}{3}$
$a\cdot b$		1		−1		0	

233 Calcola a mente

$0{,}1\cdot 0{,}1$ $\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}$ $0{,}1\cdot 100$ $1\cdot 0{,}1$ $2\cdot 0{,}1$ $20\cdot 0{,}02$

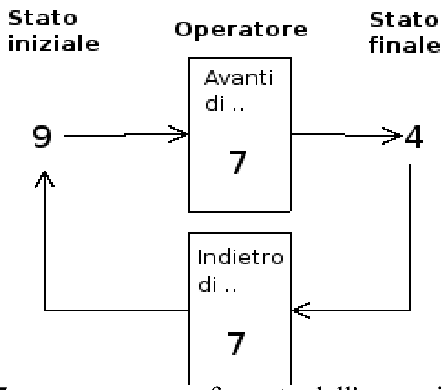
$0{,}01\cdot 10$ $\frac{1}{100}\cdot 10$ $0{,}1\cdot 0{,}2$ $\frac{3}{10}\cdot 30$ $0{,}01\cdot 0{,}1$ $1000\cdot 0{,}0001$

Operazione inversa e aritmetica dell'orologio

La divisione è l'operazione inversa della moltiplicazione. Ma cosa significa operazione inversa?
Una operazione può essere interpretata come qualsiasi azione che provoca un cambiamento di stato.
Consideriamo come esempio l'addizione nell'orologio che segna le ore dodici (12 = 0). Addizionare significa spostare le lancette in avanti di un determinato numero di ore.
Si riporta la tabella dell'addizione dell'orologio.

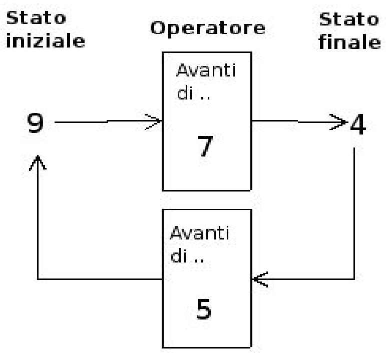
+	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2
4	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3
5	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4
6	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5
7	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6
8	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8
10	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
11	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

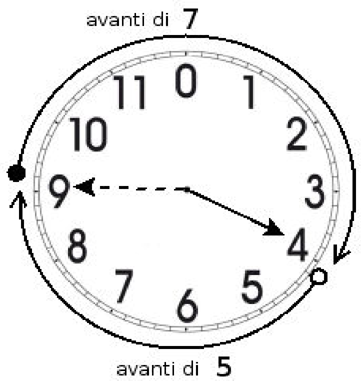




Consideriamo l'addizione $9+7=4$
Il primo elemento 9 può essere interpretato come *stato iniziale*, + 7 come *operatore* formato dall'operazione “spostare le lancette avanti di...” e dall'argomento 7; il risultato 4 è lo *stato finale.*
Si indica come operazione inversa quella operazione che applicata allo stato finale con argomento uguale a quello precedente dell'operazione diretta, riporta allo stato iniziale.
Notiamo che anche nella matematica dell'orologio l'addizione gode della proprietà commutativa e associativa, ha l'elemento neutro che è 0, ogni numero ha l'inverso.

L'inverso di 0 è 0 perché 0+0=0
L'inverso di 1 è 11 perché 1+11=0
L'inverso di 2 è 10 perché 2+10=0
L'inverso di 3 è 9 perché 3+9=0
L'inverso di 4 è 8 perché 4+8=0
L'inverso di 5 è 7 perché 5+7=0
e così via.
L'elemento inverso è molto importante in quanto ci permette di sostituire l'operazione inversa, con l'operazione diretta che ha come argomento l'elemento inverso dell'argomento dell'operazione diretta.

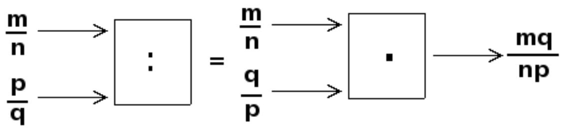




Così per tornare allo stato iniziale invece di operare con portare indietro le lancette di 7, otteniamo lo stesso risultato portando avanti le lancette di 5 che è appunto l'inverso di 7.

Divisione

La divisione è l'operazione inversa della moltiplicazione. Dato che nell'insieme dei numeri razionali esiste sempre l'inverso di una frazione rispetto alla moltiplicazione, esclusa la frazione zero, si può sempre eseguire la divisione di due qualsiasi frazioni:



$$\frac{m}{n}:\frac{p}{q}=\frac{m}{n}\cdot\frac{q}{p}=\frac{mq}{np}$$

Il quoziente di due frazioni è la frazione che si ottiene moltiplicando la prima frazione per l'inverso della seconda frazione.

Esempi

- $\frac{2}{3}:\frac{7}{4}$ il reciproco di $\frac{7}{4}$ è $\frac{4}{7}$ pertanto $\frac{2}{3}:\frac{7}{4}=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{7}=\frac{8}{21}$.
- $-\frac{2}{3}:\left(-\frac{3}{4}\right)$ il reciproco di $-\frac{3}{4}$ è $-\frac{4}{3}$ pertanto $-\frac{2}{3}:\left(-\frac{3}{4}\right)=-\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)=+\frac{8}{9}$.
- $\frac{2}{3}:0$ il reciproco di 0 non esiste quindi la divisione non è eseguibile.
- $0:\frac{2}{3}$ il reciproco di $\frac{2}{3}$ è $\frac{3}{2}$ pertanto $0:\frac{2}{3}=0\cdot\frac{3}{2}=0$

234 Calcola i seguenti quozienti fra frazioni

a) $\frac{3}{2}:\frac{4}{3}$ $\qquad -\frac{6}{5}:\left(-\frac{2}{3}\right)$ $\qquad \left(\frac{+3}{2}\right):\left(\frac{-3}{2}\right)$ $\qquad \frac{2}{5}:\frac{5}{8}:\left(-\frac{5}{6}\right)$

235 Calcola i seguenti quozienti fra numeri razionali.

a) $-1,\overline{1}:\frac{18}{5}$ $\qquad 2\%:5\%$ $\qquad \frac{1}{2}:0,5$ $\qquad -\frac{3}{4}:1,4:(-120\%)$

236 Completa la seguente tabella

a	$-\frac{2}{3}$	$+\frac{3}{4}$	-1	0	$-1,\overline{6}$	-5	$-0,21$
b	$+\frac{7}{3}$	$-\frac{5}{8}$	$+\frac{2}{5}$	15%	$+2,\overline{3}$	$+\frac{17}{3}$	$+\frac{3}{5}$
$a:b$							
$b:a$							

237 *Calcola a mente*

a) $0,30\cdot 0,40=$ $\qquad 0,5\cdot 0,2=$ $\qquad 0,4\cdot 3=$ $\qquad 0,5\cdot 20=$

b) $0,5:0,1=$ $\qquad 0,1\cdot 0,1=$ $\qquad 0,1:0,1=$ $\qquad 0,1\cdot 0,010=$

Potenza di una frazione

Come per ogni numero, anche per le frazioni, la potenza di una frazione non è altro che un prodotto di tante frazioni identiche alla frazione data quanto è il valore dell'esponente, pertanto si trova elevando il numeratore e il denominatore della frazione all'esponente della potenza.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdots\frac{a}{b}}_{n} = \frac{a^n}{b^n}$$

Esempi

- $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{8}{27}$
- $-\frac{2^3}{3} = -\frac{8}{3}$
- $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 = +\frac{4}{9}$

Potenza con esponente uguale a 0

La definizione di potenza si estende anche al caso in cui l'esponente è zero. Dividendo due potenze con la stessa base e con lo stesso esponente, si ha: $a^n : a^n = 1$ infatti dividendo due numeri uguali si ha 1. D'altra parte, applicando le proprietà delle potenze $a^n : a^n = a^0$. Possiamo allora concludere che per ogni frazione o numero razionale *a* diverso da zero $a^0 = 1$.

Non è invece possibile la potenza 0^0.

Potenza con esponente un numero intero negativo

La definizione di potenza si può estendere anche al caso in cui l'esponente sia uguale a un numero intero negativo: $a^{-n} = a^0 : a^n = 1 : a^n = \frac{1}{a^n} = \frac{1^n}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$.

Si può definire allora per ogni numero razionale diverso da zero $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$.

La potenza di un numero diverso da zero elevato a un esponente intero negativo è uguale a una potenza che ha per base il reciproco della base e per esponente l'opposto dell'esponente.

Non è definita invece la potenza con esponente negativo di 0 , il numero 0 infatti non ha il reciproco. Pertanto, 0^{-n} è una scrittura priva di significato.

238 Calcola il valore delle seguenti potenze

a) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2$ $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$ $-\left(\frac{3}{2}\right)^2$ $\left(\frac{1}{2}-1\right)^3$ $\left(-\frac{3}{5}\right)^0$ $\left(-\frac{3}{5}\right)^1$

b) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}$ $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$ $-\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$ -2^{-4} $-\left(\frac{5}{6}\right)^{-1}$ $\left(\frac{1}{10}\right)^{-3}$

239 Indica quali proprietà delle potenze sono state applicate nelle seguenti uguaglianze

a) $\left(-\frac{3}{2}\right)^2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^3 = \left(-\frac{3}{2}\right)^5 = -\frac{3^5}{2^5}$ $\left(-\frac{3}{2}\right)^2 : \left(-\frac{3}{2}\right)^3 = \left(-\frac{3}{2}\right)^{-1} = -\frac{2}{3}$

b) $\left(\left(-\frac{3}{2}\right)^2\right)^3 = \left(-\frac{3}{2}\right)^6 = +\frac{3^6}{2^6}$ $\left(\frac{5}{2}\right)^2 : \left(\frac{25}{10}\right)^2 = \left(\frac{5}{2} : \frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\cdot\frac{2}{5}\right)^2 = 1^2$

240 Completa la seguente tabella.

a	a^2	a^{-2}	$-a^2$	$(-a)^3$	a^{-1}	a^0	a^3
$-\frac{2}{3}$							
$-1,\overline{6}$							
-0,1							
$\frac{3}{10}$							

241 *Calcola a mente*

a) $3,4\cdot10^2=$ $0,34\cdot10^4=$ $0,34:10^3=$ $3,04\cdot10=$

b) $3,4:10^2=$ $34,4:10^2=$ $34,10\cdot10^3=$ $0,34:10^2=$

242 Calcola le seguenti potenze prestando particolare attenzione ai segni

a) $-(-2)^2$ $[-(-1)^2]^3$ $-(-2)^{-4}$ $-[-(-1)^{-1}]^{-2}$

b) $\frac{2^{-1}+3^{-2}}{2^{-2}+3^{-1}}$ $\frac{2^{-2}-3^{-1}}{2^{-2}+3^{-1}}$ $(-1)^3\cdot\frac{2^{-2}-5^{-1}}{2^{-2}+5^2}$ *R.* $\frac{22}{11};-\frac{1}{7};-\frac{1}{505}$

Esercizi di ripasso sulle operazioni con le frazioni

243 *Esegui le seguenti operazioni con le frazioni, quando è possibile*

a) $\frac{2}{3}\cdot 0$ $\quad \frac{1}{2}-\frac{1}{2}$ $\quad \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{0}$ $\quad \frac{1}{2}\cdot\frac{0}{2}$ $\quad \frac{1}{2}:\frac{1}{2}$ $\quad \frac{2}{3}:0$

b) $\frac{2}{3}-0$ $\quad 1:\frac{2}{3}$ $\quad \frac{1}{4}\cdot 4$ $\quad \frac{1}{4}:4$ $\quad 0{,}3:3$ $\quad 1{,}5:1{,}\bar{5}$

c) $1{,}5:1{,}5$ $\quad 1{,}5^0$ $\quad (1-1)^0$ $\quad (-1)^{-1}$ $\quad 3^0:2^0$ $\quad (-2)^{-2}:(-1)^{-1}$

244 Verifica le seguenti uguaglianze trovando la frazione generatrice

$\frac{1{,}\bar{7}}{1{,}\bar{3}}=1{,}\bar{3}$ $\quad \frac{2{,}\bar{7}}{1{,}\bar{6}}=1{,}\bar{6}$ $\quad \frac{1{,}1\bar{6}}{2{,}\bar{3}}=0{,}5$ $\quad \frac{2{,}\bar{3}}{1{,}\bar{6}}=1{,}4$

245 Sottolinea le frazioni equivalenti a $\frac{3}{5}$ tra le seguenti $\frac{6}{10};\ \frac{25}{100};\ \frac{12}{10};\ \frac{5}{25}$

246 Completa le seguenti uguaglianze

a) $\frac{3}{5}=\frac{...}{10}$ $\quad$ b) $\frac{75}{10}=\frac{...}{100}$ $\quad$ c) $\frac{7}{...}=\frac{1}{2}$ $\quad$ d) $3=\frac{24}{...}$

247 Completa $\frac{3}{4}+\ ...\ =1$ $\quad 1-\ ...\ =\frac{4}{13}$ $\quad \frac{11}{12}\cdot\ ...\ =\frac{8}{55}$ $\quad ...\ :\frac{5}{3}=\frac{3}{5}$

248 Correggi le seguenti operazioni $\frac{3}{4}+\frac{2}{7}=\frac{3\cdot 7+4\cdot 2}{4+7}$ $\quad \frac{8}{25}-\frac{3}{10}=\frac{8-3}{50}$ $\quad 3\cdot\frac{11}{13}=\frac{33}{39}$

Completa le seguenti tabelle:

249

minuendo	sottraendo			
-	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{2}$
$\frac{10}{3}$				
$\frac{23}{12}$				
$\frac{13}{2}$				
$\frac{9}{4}$				

250

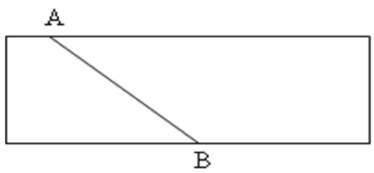
Primo fattore	Secondo fattore			
x	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{11}{4}$
$\frac{3}{4}$				
$\frac{5}{2}$				
$\frac{7}{3}$				
$\frac{8}{5}$				

251 Riscrivi in simboli e motiva la verità o falsità di ciascuna proposizione

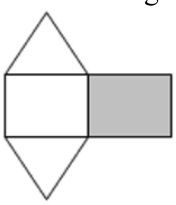
a) Il triplo di un terzo è l'unità.
b) La somma di un quinto con il doppio di un mezzo è sei quinti.
c) Un ottavo è maggiore di un quinto.

252 Relativamente alla figura a fianco, quale proposizione è vera?

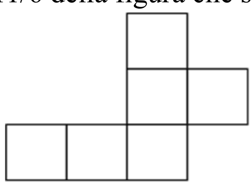
- Il segmento AB la divide in due parti uguali
- Il segmento AB la divide in due quadrilateri



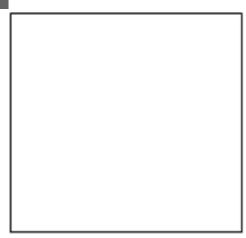
253 La parte in grigio rappresenta 1/4 della figura?



254 Costruisci una figura che sia gli 11/6 della figura che segue:



255 Colora i 3/4 della figura



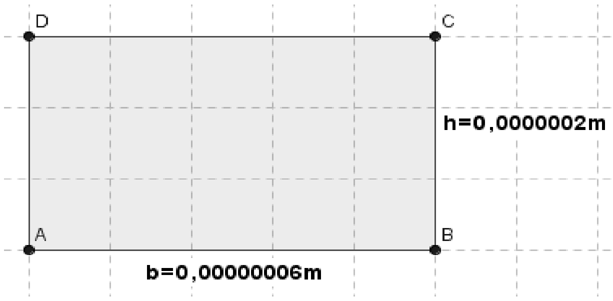
►*21.* Notazione scientifica e ordine di grandezza

Le discipline scientifiche quali la fisica, la biologia, l'astronomia etc., si trovano spesso a doversi confrontare con misurazioni di grandezze espresse da numeri molto grandi. Per esempio:

- il raggio della Terra è circa 6 400 000 m;
- la velocità della luce nel vuoto è 299 790 000 m/s;
- un globulo rosso ha il diametro di 0,000007 m.

I primi due numeri sono "molto grandi", mentre l'ultimo è "molto piccolo" e operare con numeri simili, non è affatto semplice.
Per renderci conto di ciò, consideriamo un rettangolo di dimensioni
b = 0,00000006 m e h = 0,0000002 m e calcoliamone l'area:

$$A=b\cdot h=0{,}00000006\cdot 0{,}0000002=0{,}000000000000012 .$$



Come si può notare, per scrivere il risultato di un'operazione tra due numeri in questo caso "molto piccoli", è necessario fare particolare attenzione in quanto, per l'eccessiva quantità di cifre decimali, è facile commettere degli errori.
Per risolvere questo problema, si preferisce utilizzare una scrittura compatta che permette di scrivere questo tipo di numeri in forma più agevole. Una tale scrittura prende il nome di **notazione scientifica**.

DEFINIZIONE. Un numero α è scritto in **notazione scientifica** se si presenta nella forma: $\alpha = K\cdot 10^n$ dove *k* è un numero decimale compreso tra 1 e 9 ed *n* è un numero intero.

Esempi

I numeri $3{,}5\cdot 10^7$ e $8{,}9\cdot 10^{-5}$ sono scritti in notazione scientifica, mentre i numeri $0{,}5\cdot 10^3$ e $11{,}3\cdot 10^{-8}$ non sono scritti in notazione scientifica in quanto il numero davanti alla potenza di 10 nel primo caso è 0,5 che è minore di 1, nel secondo caso è 11,3 che è maggiore di 10.

Come trasformare un numero in notazione scientifica?

Consideriamo la misura del diametro del globulo rosso, ovvero 0,000007 m. Per esprimere questa misura in notazione scientifica basta considerare la sua frazione generatrice, ovvero:

$$0{,}000007\,m = 7\cdot\frac{1}{1000000}\,m = 7\cdot\frac{1}{10^6}\,m = 7\cdot 10^{-6}\,m$$

Allo stesso modo il numero 0,000000026 viene scritto in notazione scientifica come segue:

$$0{,}000000026 = 2{,}6\cdot\frac{1}{100000000} = 2{,}6\cdot\frac{1}{10^8} = 2{,}6\cdot 10^{-8}$$

Si osservi che in questo secondo caso abbiamo preso in considerazione il valore 2,6 anziché 26, in quanto il numero *k* deve essere compreso tra 1 e 9.
Consideriamo ora la misura del raggio della Terra, ovvero 6.400.000 m, la sua espressione in notazione scientifica sarà: $6{,}4\cdot 10^6$.
Allo stesso modo il numero 340 000 000 000 viene scritto in notazione scientifica $3{,}4\cdot 10^{11}$.
Si osservi che in questo secondo caso abbiamo preso in considerazione il valore 3,4 anziché 34, in quanto, come si è già detto, il numero *k* deve essere compreso tra 1 e 9.

Osservazione
A numeri "piccoli", corrisponde una potenza di dieci con esponente negativo; a numeri "grandi", corrisponde una potenza di dieci con esponente positivo.

Esempio

Riprendendo il problema della lamina rettangolare, le sue dimensioni in notazione scientifica vengono scritte come: $\begin{matrix} b &=& 6\cdot 10^{-8}\,m \\ h &=& 2\cdot 10^{-7}\,m \end{matrix}$ L'area sarà quindi:

$$A = b\cdot h = 6\cdot 10^{-8}\times 2\cdot 10^{-7}\ m^2 = 12\cdot 10^{-15}\ m^2 = 1{,}2\cdot 10^1\cdot 10^{-15}\ m^2 = 1{,}2\cdot 10^{-14}\ m^2$$

Com'è possibile vedere, utilizzando le note proprietà delle potenze, si riesce ad eseguire l'operazione in maniera molto agevole.

Procedura per scrivere un numero decimale positivo *a* in notazione scientifica

- **se** $a>1$, per esempio 348.000.000.000.000
  - si divide il numero decimale per una potenza del 10 in modo da avere un numero decimale compreso tra 1 e 9;
  - per trovare la potenza del 10 per la quale dividere il numero bisogna contare le cifre significative del numero prima della eventuale virgola e togliere 1. Per esempio le cifre significative di 348.000.000.000.000 sono 15, si divide quindi il numero per 10^{14} , si ottiene $348.000.000.000.000 : 10^{14} = 3,48$;
  - per scrivere il numero *a* in notazione scientifica occorre moltiplicare il numero trovato al passo precedente per la potenza di 10 utilizzata. Nell'esempio precedente $3,48\cdot10^{14}$
- **se** $0<a<1$, per esempio 0,000034
  - si moltiplica il numero decimale per una opportuna potenza del 10 in modo da ottenere un numero compreso tra 1 e 9;
  - per trovare la potenza del 10 bisogna contare gli zeri che si trovano tra la virgola e la prima cifra significativa del numero. Nel caso di 0,000034 gli zeri sono 4, si moltiplica allora il numero per 10^5 e si ottiene $0,000034\cdot10^5=3,4$;
  - per scrivere il numero a in notazione scientifica occorre moltiplicare il numero ottenuto al passo precedente per la stessa potenza di 10 utilizzata presa però con esponente negativo. Nell'esempio considerato si ottiene $3,4\cdot10^{-5}$.

256 Esprimere in notazione scientifica i seguenti numeri

a) $780000000000000=7,8\cdot10^{\cdots}$
b) $423000000000=4,23\cdot10^{\cdots}$
c) $76000000000000=\ldots\cdot10^{\cdots}$
d) $0,00000000098=9,8\cdot10^{\cdots}$
e) $0,0000045=4,5\cdot10^{\cdots}$
f) $0,000000987=\ldots\cdot10^{\cdots}$

257 Quale tra i seguenti numeri non è scritto in notazione scientifica?

[A] $5,67\cdot10^{-12}$ [B] $4,28\cdot10^8$ [C] $10,3\cdot10^{-2}$ [D] $9,8\cdot10^7$

258 Determina in notazione scientifica l'area di una lamina di ferro quadrata di lato 0,00000000021 m.

259 Scrivi in notazione scientifica i seguenti numeri

34000 0,000054 260000 0,0000157 99000000

260 Trasforma i numeri in notazione scientifica e scrivi nella stessa forma il risultato

$0,00036\cdot20000000=\ldots$ $900000000:0,0003=\ldots$

$84000:42=\ldots$ $3:10000000=\ldots$

Esempio

Calcola il risultato e scrivilo in forma esponenziale $\dfrac{3000:6\,milioni}{5000\cdot0,000002}$

$$\frac{3000:6\,milioni}{5000\cdot0,000002}=\frac{3\cdot10^3:(6\cdot10^6)}{5\cdot10^3\cdot(2\cdot10^{-6})}=\frac{3:6\cdot10^{-3}}{5\cdot2\cdot10^{-3}}=\frac{0,5}{10}\cdot10^{-3+3}=0,05\cdot10^0=0,05=5\cdot10^{-2}$$

261 Calcola ed esprimi il risultato in notazione scientifica

$3\cdot10^{24}+4\cdot10^{24}$ $0,3\cdot10^{104}+4\cdot10^{103}$ $6\cdot10^{101}\cdot0,15\cdot10^{101}$ $12\cdot10^{2000}:6\cdot10^{200}$

Trasforma i numeri in notazione scientifica e scrivi nella stessa forma il risultato

262 $\dfrac{(0,00002)^2:30.000.000\cdot(0,1)^5}{4000\cdot0,02:0,000003}$ $R.\ 5\cdot10^{-32}$

263 $\dfrac{(3.000)^2:0,000003:20.000.000}{0,00002:0,00000004}$ $R.\ 3\cdot10^2$

264 $\dfrac{(2000)^3\cdot(0,000001)^5:20}{(0,0003)^2:3.000.000}$ $R.\ 1,3\cdot10^{-8}$

265 $\dfrac{4000^2\cdot0,000012}{3\cdot10^9\cdot2000^3}$ $R.\ 4\cdot10^{-21}$

266 Disponi in ordine di distanza dal Sole i seguenti pianeti, in base alla distanza media riportata tra parentesi: Mercurio $(5,8\cdot10^7)$, Nettuno $(4,5\cdot10^9)$, Giove $(7,8\cdot10^8)$, Plutone $(6,1\cdot10^9)$, Urano $(2,7\cdot10^9)$, Terra $(1,5\cdot10^8)$, Marte $(2,3\cdot10^8)$.

Ordine di grandezza

Spesso, nel trattare i numeri “molto grandi” o “molto piccoli”, non è importante conoscere la misura con precisione, ma basta conoscere “quanto è grande”, cioè l’entità della sua grandezza. Per fare ciò si introduce il seguente concetto.

DEFINIZIONE. Dato un numero, si definisce **ordine di grandezza** (abbreviato con la sigla **o.d.g.**), la potenza di 10 più vicina al numero.

Procedura per determinare l’ordine di grandezza di un numero

1. scrivi il numero dato in notazione scientifica $k \cdot 10^n$;

2. se $k < 5$ l’ordine di grandezza è 10^n

3. se $k \geq 5$ l’ordine di grandezza è 10^{n+1} .

Esempio

- Determinare l’ordine di grandezza dei numeri 0,000074 e 47000000000.

Scriviamo dapprima i numeri in notazione scientifica: $0{,}000074 = 7{,}4 \cdot 10^{-5}$, $47000000000 = 4{,}7 \cdot 10^{10}$

l’o.d.g. del primo numero è 10^{-4} in quanto il numero 7,4 è maggiore di 5.

l’o.d.g del secondo numero è 10^{10} in quanto il numero 4,7 è minore di 5.

267 Determina l’ordine di grandezza dei seguenti numeri

126 000 000 0,0000098 7 000 000 0,0000000027

268 Completare la seguente tabella:

Numero	26 000 000	0,000083	490 000	0,0000081
Notazione scientifica				
o.d.g.				

269 Determina l’ordine di grandezza del risultato dei seguenti calcoli

$5{,}3 \cdot 10^5 \cdot 1{,}2 \cdot 10^3 - 2{,}5 \cdot 10^6$ $\quad\quad$ $\left(5 \cdot 10^2 \cdot 4 \cdot 10^3\right)^3$

►22. Problemi con le frazioni

Problemi diretti. Nei problemi diretti si conosce il valore di una grandezza e se ne deve calcolare la parte che corrisponde a una frazione. In questo caso basta moltiplicare la frazione per la grandezza intera.

Esempio

Una pasticceria produce 568 cornetti a settimana: i 3/4 sono alla crema, 1/8 sono al cioccolato e 1/8 alla marmellata. Quanti cornetti di ciascun tipo produce?

Per risolvere il problema occorre calcolare la parte che corrisponde a ciascuna frazione:

Cornetti alla crema: $\frac{3}{4}\cdot 568=426$

Cornetti al cioccolato: $\frac{1}{8}\cdot 568=71$

Cornetti alla marmellata: 71.

Problemi inversi. Nei problemi inversi si conosce il valore numerico di una frazione di una certa grandezza si deve calcolare il valore dell'intera grandezza. In questo caso occorre dividere il valore numerico dato per la frazione, si ottiene così l'intero.

Esempio

Mario ha speso 21€ che corrispondono ai 3/5 della somma che possedeva. Quanto possedeva?

In questo problema si sa che 21€ corrispondono ai 3/5 della somma da cercare. E' sufficiente dividere 21 per la frazione:

$21\,€ : \frac{3}{5} = 21\,€ \cdot \frac{5}{3} = 35\,€$.

Esempio

Giuseppe possiede 150 euro. Se spende i 3/5 della somma posseduta e poi i 2/3 della somma rimanente, quanto gli rimane?

Per risolvere il problema si può procedere in più modi: calcoliamo prima i 3/5 di 150, cioè $\frac{3}{5}\cdot 150\,€=90\,€$. Quindi la prima volta Giuseppe spende 90 €, perciò gliene rimangono 60. La seconda volta spende i 2/3 di 60 €, cioè $\frac{2}{3}\cdot 60\,€=40\,€$. In tutto ha speso 90€+40€=130€, gli rimangono 20€.

Un altro modo per risolvere il problema è tenere conto che, se la prima volta ha speso i $\frac{3}{5}$ della somma che possedeva, significa che gli rimane la frazione $1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$. La seconda volta spende i $\frac{2}{3}$ dei $\frac{2}{5}$, cioè $\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$. In tutto ha speso la frazione $\frac{3}{5}+\frac{4}{15}=\frac{3\cdot 3+4}{15}=\frac{13}{15}$, gli rimane perciò la frazione $\frac{2}{15}$, pertanto gli rimangono $\frac{2}{15}\cdot 150\,€=20\,€$.

270 La distanza Roma - Bari è di 450 km. Se ho percorso i 2/5 del tragitto quanti chilometri mancano ancora da percorrere?

271 Lucia ha letto 3/5 di un libro, gli rimangono da leggere 120 pagine. Quante pagine ha il libro? [R.42]

272 Una persona possiede 525 euro. Se spende i 3/5 della somma e poi i 2/3 della rimanente, quale somma di denaro gli rimane?

273 Luigi ha 18 anni, cioè i 3/7 dell'età di sua madre, che a sua volta ha i 4/5 dell'età de marito. Quali sono le età del padre e della madre di Luigi?

►*23.* Le percentuali

Avrai sentito parlare spesso che il prezzo di un oggetto è stato scontato del 10 per cento, oppure che un partito politico ha preso il 25 per cento di voti e altre espressioni simili che coinvolgono le percentuali.
Le percentuali sono un altro modo per scrivere le frazioni.

DEFINIZIONE. **Le percentuali** sono frazioni che hanno come denominatore 100 e come numeratore un numero intero o decimale.

La percentuale si indica con un numero intero o decimale seguita dal simbolo %.

$$35\% = \frac{35}{100};\ 7\% = \frac{7}{100};\ 12{,}5\% = \frac{12{,}5}{100} = \frac{125}{1000}$$

- Per passare dalla scrittura percentuale alla scrittura decimale basta dividere per 100 il numero che esprime la percentuale:
$$35\% = \frac{35}{100} = 0{,}35;\ 7\% = \frac{7}{100} = 0{,}07;\ 12{,}5\% = \frac{12{,}5}{100} = 0{,}125$$
- Per passare dalla scrittura decimale alla scrittura in percentuale basta moltiplicare numeratore e denominatore per 100:
$$0{,}02 = \frac{0{,}02}{1} = \frac{2}{100} = 2\%;\ 0{,}23 = \frac{0{,}23}{1} = \frac{23}{100} = 23\%;\ 1{,}21 = \frac{1{,}21}{1} = \frac{121}{100} = 121\%$$
- Per passare da una frazione alla percentuale conviene prima scrivere la frazione come numero decimale e poi da questo passare alla percentuale:
$$\frac{2}{3} = 0{,}\bar{6} = \frac{0{,}\bar{6}}{1} = \frac{66{,}\bar{6}}{100} = 66{,}\bar{6}\%$$

275 Trasforma i seguenti numeri percentuali in numeri decimali.
$12\%;\ 0{,}03\%;\ 4{,}3\%;\ 80\%;\ 3{,}5\%;-0{,}2\%\ \ 15\%;\ -0{,}38\%$

276 Trasforma i seguenti numeri decimali in percentuali.
$-1{,}25;\ 0{,}03;\ -2{,}\bar{1};\ 0{,}\overline{13};\ 5{,}080;\ 3{,}7\overline{52};\ -0{,}38$

277 Trasforma i seguenti numeri percentuali in frazioni ridotte ai minimi termini.
$12\%;\ 0{,}03\%;\ 4{,}3\%;\ 80\%;\ 3{,}5\%;-0{,}2\%\ \ 15\%;\ -0{,}38\%$

278 Trasforma le seguenti frazioni in numeri percentuali.
$-\frac{3}{2};\ \frac{4}{3};\ -\frac{6}{5};\ \frac{2}{25};\ \frac{5}{8};\ \frac{5}{6};\ -\frac{5}{12}$

Problemi con le percentuali

Per calcolare la percentuale di una grandezza è sufficiente moltiplicare il valore della grandezza per la percentuale espressa in frazione.

Esempio

In una scuola che ha 857 alunni ne sono stati promossi il 95%. Quanti sono stati i promossi?

Per rispondere alla domanda si moltiplica il numero totale di alunni per la frazione 95/100. Precisamente $\frac{95}{100}\cdot 857 = 814{,}15$. Poiché il risultato non è un numero intero la percentuale è stata approssimata. Gli alunni promossi sono stati 814.

A volte è nota una parte della grandezza e si vuole conoscere che percentuale è la parte nota rispetto al totale. In questo caso occorre dividere la parte nota per l'intera grandezza, moltiplicare il risultato per 100 ed esprimere il numero in percentuale.

Esempio

Di una scolaresca di 652 alunni ben 126 hanno avuto il debito in matematica. Qual è la percentuale di alunni che hanno avuto il debito in matematica?

Per rispondere alla domanda eseguiamo i seguenti calcoli $\frac{126}{652}\cdot 100\% \approx 0{,}19\cdot 100\% = 19\%$.

Problemi con gli sconti

Esempio

Un pantalone costava 70€ e viene venduto con il 20% di sconto, a quanto viene venduto?

Si tratta di calcolare prima lo sconto e po il prezzo scontato.

Lo sconto è dato da $20\%\cdot 70€=\frac{20}{100}\cdot 70€=14€$. Il prezzo scontato è 70€ - 14€ = 56€.

In alternativa si può tenere conto che, se 20% esprime lo sconto, la parte rimanente, quella da pagare, è 100%-20%=80%. Quindi per calcolare quanto costano i pantaloni scontati si può calcolare

$80\%\cdot 70€=\frac{80}{100}\cdot 70€=56€$.

Esempio

Un paio di scarpe da 120€ viene venduto scontato a 75€ Qual è stata la percentuale di sconto praticato?

Per rispondere alla domanda, calcolo lo sconto = 120€ - 75€ = 45€.

Calcolo la percentuale che 45€ rappresentano di 120€, $\frac{45}{120}\cdot 100\%=0{,}375\cdot 100\%=37{,}5\%$.

Esempio

Mario ha trovato in un negozio il computer che stava cercando; per fortuna era scontato del 15%, ha risparmiato così 120 euro. Quanto costa il computer di listino?

120€ corrisponde al 15% del prezzo di listino. Per calcolare il prezzo di listino occorre dividere 120 per la frazione che corrisponde a 15%.

$120:15\%=120:\frac{15}{100}=120\cdot\frac{100}{15}=800€$.

279 A una scuola di ballo si sono iscritte 120 persone; il 20% frequentano i corsi di ballo liscio. In quanti frequentano i corsi di liscio?

280 Una scuola attiva dei corsi di lingue. 32 studenti si iscrivono al corso di inglese, 24 al corso di francese e 16 al corso di tedesco. Qual è la percentuale degli alunni iscritti al corso di inglese, rispetto al totale degli iscritti?

281 A una scuola di ballo sono iscritte 120 persone. Di queste il 68% sono donne. Quanti sono gli uomini?

282 Una bici viene venduta con uno sconto del 10%, il prezzo di listino prima dello sconto era 175 €. Quanto costa ora?

283 Una canna da pesca da 125 € è in vendita promozionale a 70 €. Qual è la percentuale di sconto applicata?

284 Per l'acquisto di un armadio Maria è riuscita a spuntare, dopo lunghe discussioni, uno sconto del 25% risparmiando ben 120 €. Qual era il prezzo senza sconto dell'armadio?

285 Completa la seguente tabella

prezzo di listino	sconto	sconto in %	prezzo scontato
120€	12€	10%	108€
250€	10€		…
125€	5€	…	...
170€	…	10%	…
1.100€	…	15%	...
220€	…	…	20€
12.000€	…	…	700€
…	15€	15%	…
…	30€	…	50€
…	…	25%	140€
…	120€	30%	…

286 Calcola:

a) il 10% di 100 b) il 30% di 700 c) il 20% di 500

d) il 15% di 150 e) il 25% di 1250 f) il 16% di 120

287 Quale percentuale è

a) 10 bocciati su 120 alunni: la percentuale di bocciati è …

b) 15 alunni su 45 giocano a calcio: la percentuale di alunni che giocano a calcio è …

c) 10 alunni su 28 suonano il piano: la percentuale di alunni che suonano il piano è …

d) 20 alunni su 120 frequentano il corso di teatro: la percentuale di alunni che fanno teatro è ...

288 Se aumenta al prezzo

a) un chilo di pane lo scorso anno costava 1,20€, quest'anno è aumentato del 3%, allora costa … … €

b) un litro di benzina lo scorso anno costava 1,514 €, quest'anno costa 1,629€ allora è aumentata del …... %

c) un litro di latte lo scorso anno costava 1,25€, quest'anno è aumentato di 0,05%, allora costa …… €

d) un chilo di formaggio parmigiano lo scorso anno costava 23,50€ quest'anno costa 25,80€ allora è aumentato del …...%

289 Se il prezzo diminuisce

a) un chilo di pomodori lo scorso anno costava 1,20€, quest'anno è diminuito del 5%, allora costa …...€

b) un chilo di peperoni lo scorso anno costava 2,10€, quest'anno costa 1,80€ allora è diminuito del …...%

c) un chilo di cicoria lo scorso anno costava 0,80€, quest'anno due chili costano 1,20 €, allora la cicoria è diminuita del …...%

d) un chilo di arance lo scorso anno costava 1,40 €, quest'anno le arance sono diminuite del 15%, allora costano al chilo …...€.

290 Dato il costo di un oggetto IVA esclusa calcola il prezzo IVA inclusa e viceversa

costo iva esclusa	iva %	costo iva inclusa
€ 130	21%	… … ...
€ 1250	21%	… … ...
€ 17,40	4%	… … ...
… …	21%	€ 170
… …	21%	€ 12240
€ 110,00	…	€ 105,60

291 Dati imponibile (costo senza iva) e iva determina il costo comprensivo di iva, e viceversa

imponibile	iva %	iva	totale
100	21%	21	121
1100	21%	…	…
…	23%	…	1100
1000	…	…	1100
…	21%	141	…
1100	…	100	...

292 La seguente tabella riporta i dati relativi alla provenienza di una classe prima di una scuola secondaria

	Scuola di provenienza			
Sesso	Scuola A	Scuola B	Scuola C	Altre scuole
M	6	4	4	2
F	5	3	4	2

Qual è la percentuale di alunni provenienti dalla Scuola A?

Qual è la percentuale di maschi provenienti dalla Scuola C?

Qual è la percentuale di alunni che non provegono dalle scuole A o B o C?

Qual è la percentuale di alunni che provengono dalle scuola A o C?

293 Agli esami di stato un gruppo di allievi ha riportato i seguenti punteggi in centesimi

punteggi	60	64	68	70	74	75	80	82	83	84	85	86	87	88	89	90	92	94	98	100
allievi	2	3	1	5	4	2	1	2	3	2	4	1	3	2	1	3	2	4	6	8

Per poter partecipare a un concorso occorre aver conseguito il diploma con un punteggio superiore a 75. Quale la percentuale di diplomati potrà partecipare al concorso? Se solo il 10% di quelli che si sono presentati al concorso lo hanno superato, quanti degli allievi hanno superato il concorso?

294 Tra i dipendenti di un'azienda si effettua un sondaggio per decidere se è opportuno introdurre un nuovo tipo di turno di lavoro. Nella tabella sono riportati i risultati del sondaggio.

	favorevoli	contrari
uomini	75	49
donne	81	16

Tra le donne, qual è la percentuale di lavoratrici favorevoli al nuovo turno?

Qual è la percentuale di lavoratori (uomini e donne) che non sono favorevoli al nuovo turno?

295 Sapendo che $\overline{AB}=12\text{cm}$ e che $\overline{BC}=\frac{3}{4}\overline{AB}$ calcola la lunghezza di BC.

296 Sapendo che $\overline{AB}=36\text{cm}$ e che $\overline{AB}=\frac{6}{5}\overline{BC}$ calcola la lunghezza di BC.

297 Sapendo che $\overline{AB}+\overline{BC}=15\text{cm}$ e che $\overline{AB}=\frac{2}{3}\overline{BC}$ calcola le lunghezze di AB e di BC.

298 Sapendo che $\overline{AB}-\overline{BC}=4\text{cm}$ e che $\overline{AB}=\frac{4}{3}\overline{BC}$ calcola le lunghezze di AB e di BC.

299 Determina le ampiezze di due angoli complementari sapendo che uno è la metà dell'altro.

300 Determina le ampiezze di due angoli supplementari sapendo che uno è i 2/3 dell'altro.

301 Determina le misure dei due lati di un rettangoli sapendo che ha perimetro di 128cm e che l'altezza è 3/2 della base.

302 La superficie della Toscana è divisa tra le seguenti provincie, calcola per ciascuna di esse la percentuale del territorio posseduta: Arezzo (3.235 km^2), Firenze (3.514 km^2), Grosseto (4.504 km^2), Livorno (1.211 km^2), Lucca (1.773 km^2), Massa e Carrara (1.156 km^2), Pisa (2.444 km^2), Pistoia (965 km^2), Prato (365 km^2), Siena (3.821 km^2).

303 La superficie dellaTerra è per il 70% ricoperta di acqua e per il 30% di terraferma. Per 1/5 la terraferma è coperta da ghiaccio e deserto, per 2/3 da foreste e montagna. La parte rimanente è terreno coltivato. Qual è in percentuale la parte della superficie terrestre coltivata?

304 In 30 kg di sapone concentrato al 30% quanta acqua e quanto sapone ci sono? [R. 21kg, 9kg]

305 Una soluzione di 6kg concentrata al 45% per avere una nuova soluzione concnetrata al 60%.

306 Quanto solvente bisogna aggiungere a una soluzione di 2kg concentrata al 12% per ottenere una nuova soluzione concentrata al 10%

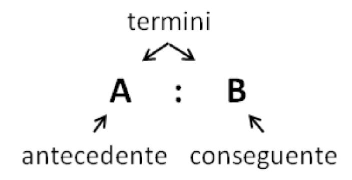
307 Si hanno due soluzioni delle stesse sostanze, una concentrata al 10% e l'altra al 30%. In quale proporzione occore miscelare le due soluzioni in modo da ottenere 6kg di soluzione concentrata al 15%?

308 Una società ha acquistato dei PC nuovi per i propri dipendenti. Pagandoli in contanti ha ottenuto uno sconto dell’8%, versando di conseguenza l'importo di 24.500 €. Qual è il valore iniziale della merce acquistata?

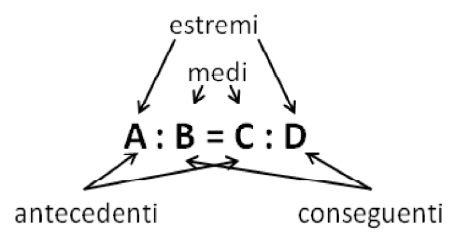
309 Una persona paga un tappeto 1200 €, lo stesso tappeto l’anno precedente costava 900 €. Quanto è stato l’aumento percentuale da un anno all’altro?

310 Quanto vale il 2012% di 2012?

►*24.* Proporzioni



DEFINIZIONE. Il rapporto tra due numeri, di cui il secondo è diverso da zero, è il quoziente che si ottiene dividendo il primo numero per il secondo. Il primo numero si dice antecedente, il secondo conseguente.



DEFINIZIONE. Una **proporzione** è una uguaglianza tra due rapporti, del tipo A : B = C : D, che si legge A sta a B come C sta a D” con B e D diversi da zero.

Esempi

- 4 : 2 = 12 : 6, formano una proporzione perché i due quozienti valgono entrambi 2.
- 7 : 14 = 16 : 4 NON formano una proporzione perché il primo rapporto vale 0,5 mentre il secondo rapporto vale 4.

PROPRIETA' FONDAMENTALE DELLE PROPORZIONI. In ogni proporzione il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi.

$$A:B=C:D \;\rightarrow\; A\cdot D=B\cdot C$$

Esempi

- 4 : 6 = 6 : 9, il prodotto dei medi è $6\cdot 6=36$ il prodotto degli estremi è $4\cdot 9=36$, quindi è una proporzione.
- 20 : 30 = 30 : 40, il prodotto dei medi è $30\cdot 30=900$ il prodotto degli estremi è $20\cdot 40=800$, quindi non è una proporzione.

PROPRIETÀ DEL PERMUTARE. Se in una proporzione scambiamo tra di loro i medi otteniamo ancora una proporzione; in modo analogo otteniamo ancora una proporzione se scambiamo tra di loro gli estremi, o ancora se scambiamo tra di loro sia i medi sia gli estremi.

$$A:B=C:D \;\rightarrow\; A:C=B:D \;\rightarrow D:B=C:A \;\rightarrow D:C=B:A$$

Esempio

Data la proporzione 12 : 16 = 18 : 24

- scambiando tra di loro i medi si ottiene la proporzione 12 : 18 = 16 : 24
- scambiando tra di loro gli estremi si ottiene la proporzione 24 : 16 = 18 : 12
- scambiando tra di loro sia i medi sia gli estremi si ottiene la proporzione 24 : 18 = 16 : 12

PROPRIETÀ DELL'INVERTIRE. Se in una proporzione scambiamo ogni antecedente con il rispettivo conseguente otteniamo ancora una proporzione.

$$A:B=C:D \;\rightarrow\; B:A=D:C$$

Esempio

Data la proporzione 15 : 9 = 5 : 3
applicando la proprietà dell'invertire otteniamo la proporzione 9 : 15 = 3 : 5

PROPRIETÀ DEL COMPORRE. In una proporzione la somma dei primi due termini sta al primo termine come la somma del terzo e del quarto termine sta al terzo termine. Analogamente, la somma dei primi due termini sta al secondo termine come la somma del terzo e del quarto termine sta al quarto termine.

$$A:B=C:D \rightarrow (A+B):A=(C+D):C$$
$$A:B=C:D \rightarrow (A+B):B=(C+D):D$$

Esempio

Data la proporzione 16 : 10 = 40 : 25, applicando la proprietà del comporre si ottengono le proporzioni: 26 : 16 = 65 : 40 26 : 10 = 65 : 25

Analogamente alla proprietà del comporre si ha la seguente

PROPRIETÀ DELLO SCOMPORRE. In una proporzione la differenza dei primi due termini sta al primo termine come la differenza del terzo e del quarto termine sta al terzo termine. Analogamente, la differenza dei primi due termini sta al secondo termine come la differenza del terzo e del quarto termine sta al quarto termine.

$$A:B=C:D \rightarrow (A-B):A=(C-D):C$$
$$A:B=C:D \rightarrow (A-B):B=(C-D):D$$

Esempio

Data la proporzione 16 : 10 = 40 : 25, applicando la proprietà dello scomporre si ottengono le proporzioni: 6 : 16 = 15 : 40 6 : 10 = 15 : 25

Calcolo di un medio o un estremo incognito

Il medio incognito di una proporzione si calcola moltiplicando gli estremi e dividendo per il medio noto:

$a:b=x:d \rightarrow x=\frac{a\cdot d}{b}$.

L'estremo incognito di una proporzione si calcola moltiplicando i medi e dividendo per l'estremo noto:

$x:b=c:d \rightarrow x=\frac{b\cdot c}{d}$.

Esempi

Calcola il termine incognito di ciascuna proporzione

- 5 : 7 = 20 : x $\quad x=\frac{7\cdot 20}{5}=28$
- 2 : x = 3 : 16 $\quad x=\frac{2\cdot 16}{3}=\frac{32}{3}$
- $\frac{2}{3}:\frac{1}{2}=x:\frac{5}{6}$ $\quad x=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}:\frac{1}{2}=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{2}{1}=\frac{10}{9}$

DEFINIZIONE. Una proporzione si dice **continua** se ha i medi uguali.

Una proporzione continua è del tipo A : B = B : C, per esempio

3 : 9 = 9 : 27 5 : 10 = 10 : 20 4 : 16 = 16 : 64

Calcolo del medio in una proporzione continua

In una proporzione continua il medio proporzionale incognito si ottiene moltiplicando gli estremi e calcolando la radice quadrata del prodotto ottenuto.

$$a:x=x:d \rightarrow x=\sqrt{a\cdot d}$$

Esempio

Trovare il valore di x nella seguente proporzione continua 36 : x = x : 9

Svolgimento $x=\sqrt{36\cdot 9}=18$

Calcolo di un termine incognito per mezzo delle proprietà del comporre e dello scomporre

Esempio

- (11-x) : x = 15 : 5 applicando la proprietà del comporre si ha la proporzione (11-x+x) : x = (15+5): 5 da cui 11 : x = 20 :5 da cui si ricava $x=\frac{11\cdot 5}{20}=\frac{11}{4}$.

- $\left(\frac{1}{2}+x\right):\frac{5}{8}=x:5$ permutando i medi si ha $\left(\frac{1}{2}+x\right):x=\frac{5}{8}:5$ applicando la proprietà dello scomporre si ha $\left(\frac{1}{2}+x-x\right):x=\left(\frac{5}{8}-5\right):5$ eseguendo le operazioni nelle parentesi si ha $\frac{1}{2}:x=\frac{-35}{8}:5$ da cui $x=\frac{1}{2}\cdot 5:\left(\frac{-35}{8}\right)=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot\left(-\frac{8}{35}\right)=-\frac{4}{7}$.

Grandezze direttamente e inversamente proporzionali

Si consideri il perimetro di un triangolo equilatero; sappiamo che esso varia al variare della lunghezza del suo lato. Se si indica con l la lunghezza del lato del triangolo, allora il perimetro è dato dalla relazione:

$$2p=3l$$

È possibile notare che se raddoppia il lato, raddoppia anche il perimetro; se si triplica il lato, allora triplica anche il perimetro etc.

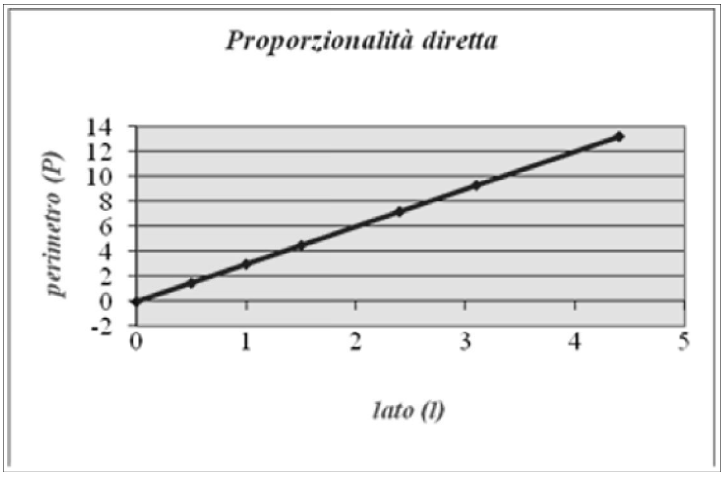
Lato l	0,5	1	1,5	2,4	3,1	4,4
Perimetro $2p$	1,5	3	4,5	7,2	9,3	13,2
Rapporto $\frac{2p}{l}$	3	3	3	3	3	3

DEFINIZIONE. Due grandezze x e y si dicono **direttamente proporzionali** se il loro rapporto è costante, cioè $\frac{y}{x}=k$ con $k\in\mathbb{R}-\{0\}$.

In generale, da quest'ultima scrittura, possiamo dedurre che una proporzionalità diretta è espressa da una formula del tipo:

$$y=kx \quad \text{con} \quad k\in\mathbb{R}-\{0\}$$

Graficamente un tale tipo di proporzionalità è rappresentato da una retta che passa per l'origine di un sistema di assi cartesiani ortogonali:

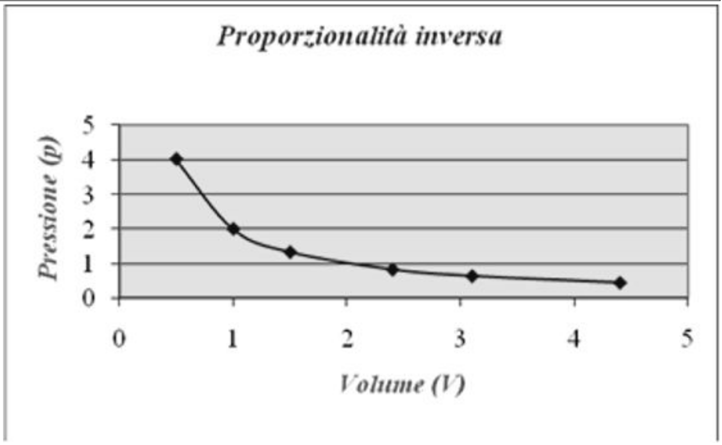


Esaminiamo ora un altro esempio. Se quando vai a fare benzina allo scooter chiedi ogni volta 10 € di benzina, noterai che se aumenta il prezzo della benzina diminuirà la quantità di carburante che ricevi e viceversa se diminuisce il prezzo aumenterà la quantità di carburante che ricevi. Ciò che rimane costante è il prodotto tra il prezzo della benzina e la quantità di benzina ricevuta che deve essere sempre 10 €.

Prezzo benzina al litro p	1,126€	1,156€	1,212€	1,248€
Benzina ricevuta b	8,881 l	8,650 l	8,251 l	8,013 l
Costo $c=p\cdot b$	€ 10,00	€ 10,00	€ 10,00	€ 10,00

DEFINIZIONE. Due grandezze x e y si dicono **inversamente proporzionali** se il loro prodotto è costante, cioè se: $x \cdot y = k$ con $k \in \mathbb{R} - \{0\}$.

In generale, da quest'ultima scrittura, possiamo dedurre che una proporzionalità diretta è espressa da una formula del tipo: $y = \frac{k}{x}$ con $k \in \mathbb{R} - \{0\}$.
Graficamente un tale tipo di proporzionalità è rappresentato da un ramo d'iperbole equilatera in un sistema di assi cartesiani ortogonali:



311 Verifica se i gruppi di numeri formano nell'ordine scritto una proporzione

a) $\frac{1}{5}; \frac{3}{5}; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}$ $\qquad$ $\frac{3}{5}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{5}{6}$ $\qquad$ $\frac{1}{5}; \frac{4}{3}; \frac{4}{27}; \frac{8}{9}$

b) 35; 7; 48; 6 $\qquad$ 14; 3,5; 4; 1

312 Applica la proprietà fondamentale delle proporzioni per verificare quale delle seguenti scritture formano una proporzione:

a) 10 : 11 = 12 : 13 [SI] [NO] $\qquad$ d) 18 : 15 = 12 : 10 [SI] [NO]
b) 7 : 14 = 21 : 42 [SI] [NO] $\qquad$ e) 10 : 6 = 5 : 3 [SI] [NO]
c) 64 : 48 = 8 : 6 [SI] [NO] $\qquad$ f) 1,2 : 1,4 = 3,6 : 4,2 [SI] [NO]

313 Disponi opportunamente i numeri in modo che formino una proporzione:

a) 7 5 20 28 $\qquad$ d) 3 5 9 15
b) 8 3 2 12 $\qquad$ e) 6 7 2 21
c) 5 6 2 15 $\qquad$ f) 3 8 6 16

314 Completa la seguente tabella

1° termine	2° termine	antecedente	conseguente	rapporto	Rapporto inverso
32	8	32	8	32:8=4	$\frac{8}{32} = \frac{1}{4}$
12	13				
$\frac{3}{5}$	3				
				$\frac{1}{4} : \frac{3}{2}$	
					$\frac{7}{10} = \frac{21}{4}$

315 Completa la seguente tabella

proporzione	antecendenti	conseguenti	medi	estremi	valore del rapporto
3 : 5 = 21 : 35	3, 21	5, 35	5, 21	3, 35	0,6
54 : 12 = 36 : 8					
7 : 21 = 9 : 27					
$\frac{5}{4} : \frac{15}{8} = 4 : 6$					

Calcola il termine incognito delle seguenti proporzioni:

316 2 : 24 = 3 : x

317 $x:0,\overline{6}=0,8:1,\overline{3}$

318 $\frac{7}{3}:x=\frac{4}{3}:\frac{8}{35}$

319 $\left(1-\frac{5}{12}\right):\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{3}\right)=x:\left(\frac{9}{8}-\frac{5}{8}\right)$

320 $\left(\frac{3}{20}+\frac{3}{8}\right):x=\left(1-\frac{1}{3}\right):\left(\frac{11}{3}+\frac{1}{7}\right)$

321 $\left(1+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right):\left(\frac{5}{8}+\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{5}{8}+\frac{1}{2}\right):x$

322 $\left(\frac{4}{5}+1\right):\left(3-\frac{1}{5}\right)=x:\left(2+\frac{1}{3}\right)$

323 $\left(\frac{5}{3}+\frac{8}{3}-3\right):x=x:\left(1+\frac{5}{16}+\frac{3}{8}\right)$ $\left[\pm\frac{3}{2}\right]$

324 $\left\{\frac{5}{2}:\left[\frac{1}{2}\left(3+\frac{1}{3}:\frac{5}{3}-\frac{14}{5}\right)\right]\right\}:x=x:\left\{\frac{3}{11}\left[\left(5-\frac{3}{2}\right)\frac{2}{21}+\frac{3}{2}\right]\right\}$ $\left[\pm\frac{5}{2}\right]$

325 $(70-x):6=x:8$ [40]

326 $\left(\frac{5}{6}-x\right):\left(1-\frac{1}{2}\right)=x:\left(\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\right)$ [25/48]

327 x : y = 5 : 3 con x+y =24 [x=15; y=9]

328 $\left(6+\frac{3}{5}\right):y=\left(\frac{4}{3}-\frac{2}{15}\right):x$ con $x+y=\frac{13}{4}$ [x=1/2; y=11/4]

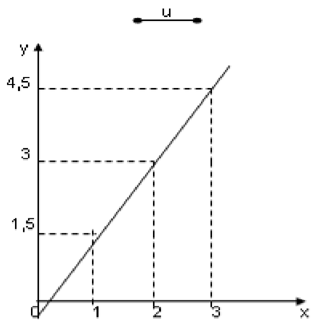
329 $\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{6}\right):\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{20}\right)=x:y$ con $x-y=\frac{1}{3}$ [x=5/6; y=1/2]

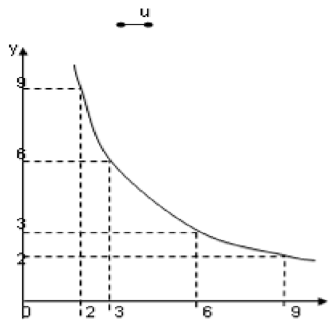
330 $x:\frac{2}{7}=y:\frac{1}{2}=z:\frac{3}{14}$ con $x+y+z=\frac{1}{2}$ [x=1/7; y=1/4; z=3/28]

331 Per ciascuna funzione costruisci la tabella dei valori (almeno 5) e stabilisci se sono riferite a grandezze direttamente proporzionali, inversamente proporzionali o nessuno dei due casi

a) $y=5x$
b) $y=\frac{1}{12x}$
c) $y=\frac{2}{3}x$
d) $y=\frac{1}{x}+3$
e) $y=6x+1$
f) $y=\frac{24}{x}$
g) $y=4x$
h) $y=\frac{18}{x}$
i) $y=\frac{1}{2}x$
j) $y=\frac{6}{x}$
k) $y=5+x$
l) $y=3x+2$
m) $y=\frac{2}{x}$
n) $y=2x$
o) $y=2x-1$
p) $y=\frac{1}{2x}+1$
q) $y=2x-2$

332 Osserva i grafici e rispondi alle domande





a) Quale grafico rappresenta una funzione di proporzionalità diretta e quale di proporzionalità inversa?
b) Qual è il coefficiente di proporzionalità? Del primo grafico è … … del secondo è … …
c) Qual è la funzione? Del primo grafico è … … … del secondo grafico è … … …

333 La tabella seguente riporta alcuni valori che esprimono il variare della grandezza y al variare di x:

x	1	2	3	4	6	8	12	24
y			8		4		2	1

a) Completa la tabella sulla base dei valori noti
b) Si tratta di grandezze direttamente o inversamente proporzionali?
c) Qual è la legge che lega y a x?
d) Rappresenta su un piano cartesiano questa relazione

334 La tabella seguente riporta alcuni valori che esprimono il variare dello spostamento s (espresso in km) in funzione del tempo t (espresso in ore) relativo a un corpo che si muove con velocità costante:

t	1	2	3	4	5	6	7	8
s	7		21		35		49	56

a) Completa la tabella sulla base dei valori noti
b) Si tratta di grandezze direttamente o inversamente proporzionali?
c) Qual è la legge che lega y a x?
d) Rappresenta su un piano cartesiano questa relazione

►*25.* Espressioni con le frazioni

Esempio

$$\left\{\frac{3}{20}\times\left[\left(\frac{4}{9}-\frac{1}{3}\right):5+\left(\frac{3}{7}-\frac{2}{5}\right):\frac{1}{14}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{9}\right]+\frac{2}{15}\right\}:2=$$

$$=\left\{\frac{3}{20}\times\left[\left(\frac{4-3}{9}\right):5+\left(\frac{15-14}{35}\right):\frac{1}{14}+\frac{1}{45}\right]+\frac{2}{15}\right\}:2=$$

$$=\left\{\frac{3}{20}\times\left[\frac{1}{9}:5+\frac{1}{35}:\frac{1}{14}+\frac{1}{45}\right]+\frac{2}{15}\right\}:2=\left\{\frac{3}{20}\times\left[\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{35}\cdot\frac{14}{1}+\frac{1}{45}\right]+\frac{2}{15}\right\}:2=$$

$$=\left\{\frac{3}{20}\times\left[\frac{1}{45}+\frac{1}{\cancel{35}^{5}}\cdot\frac{\cancel{14}^{2}}{1}+\frac{1}{45}\right]+\frac{2}{15}\right\}:2=\left\{\frac{3}{20}\times\left[\frac{1}{45}+\frac{2}{5}+\frac{1}{45}\right]+\frac{2}{15}\right\}:2=$$

$$=\left\{\frac{3}{20}\times\left[\frac{1+18+1}{45}\right]+\frac{2}{15}\right\}:2=\left\{\frac{3}{20}\times\left[\frac{\cancel{20}^{4}}{\cancel{45}^{9}}\right]+\frac{2}{15}\right\}:2=\left\{\frac{3}{20}\times\frac{4}{9}+\frac{2}{15}\right\}:2=$$

$$=\left\{\frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{20}^{5}}\times\frac{\cancel{4}^{1}}{\cancel{9}^{3}}+\frac{2}{15}\right\}:2=\left\{\frac{1}{15}+\frac{2}{15}\right\}:2=\frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{15}^{5}}:2=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{10}$$

Esempio

$$\left[\frac{13}{5}:\left(3+\frac{9}{10}\right)+\frac{7}{8}+\left(\frac{13}{4}-2\right)\times\frac{4}{15}-\frac{7}{8}\right]\times\frac{11}{3}:\left(6-\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\left[\frac{13}{5}:\left(\frac{30+9}{10}\right)+\frac{7}{8}+\left(\frac{13-8}{4}\right)\times\frac{4}{15}-\frac{7}{8}\right]\times\frac{11}{3}:\left(\frac{12-1}{2}\right)=$$

$$=\left[\frac{13}{5}:\frac{39}{10}+\frac{7}{8}+\frac{5}{4}\times\frac{4}{15}-\frac{7}{8}\right]\times\frac{11}{3}:\frac{11}{2}=$$

$$=\left[\frac{13}{5}\times\frac{10}{39}+\frac{7}{8}+\frac{\cancel{5}^{1}}{\cancel{4}^{1}}\times\frac{\cancel{4}^{1}}{\cancel{15}^{3}}-\frac{7}{8}\right]\times\frac{11}{3}\times\frac{2}{11}=$$

$$=\left[\frac{\cancel{13}^{1}}{\cancel{5}^{1}}\times\frac{\cancel{10}^{2}}{\cancel{39}^{3}}+\frac{7}{8}+\frac{1}{3}-\frac{7}{8}\right]\times\frac{11}{3}\times\frac{2}{11}=$$

$$=\left[\frac{2}{3}+\frac{7}{8}+\frac{1}{3}-\frac{7}{8}\right]\times\frac{\cancel{11}^{1}}{3}\times\frac{2}{\cancel{11}^{1}}=$$

$$=\left[\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right]\times\frac{2}{3}=1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

Esempio

$$\left[\left(\frac{7}{5}-\frac{1}{2}\right)^2:\left(\frac{9}{10}\right)^2-\left(1+\frac{2}{3}-2\right)^2\right]^2:\left(\frac{10}{9}\right)^2-\left(1+\frac{8}{5}+\frac{1}{25}\right)=$$

$$=\left[\left(\frac{14-5}{10}\right)^2:\left(\frac{9}{10}\right)^2-\left(\frac{3+2-6}{3}\right)^2\right]^2:\left(\frac{10}{9}\right)^2-\left(\frac{25+40+1}{25}\right)=$$

$$=\left[\left(\frac{9}{10}\right)^2:\left(\frac{9}{10}\right)^2-\left(-\frac{1}{3}\right)^2\right]^2:\left(\frac{10}{9}\right)^2-\left(\frac{66}{25}\right)=$$

$$=\left[1-\frac{1}{9}\right]^2:\left(\frac{10}{9}\right)^2-\left(\frac{66}{25}\right)=$$

$$=\left[\frac{8}{9}\right]^2\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^2-\frac{66}{25}=$$

$$=\left(\frac{4}{5}\right)^2-\frac{64}{25}=\frac{16}{25}-\frac{66}{25}=-\frac{50}{25}=-2$$

335 $\left(-1+\frac{1}{2}\right):\left(\frac{3}{2}+\frac{5}{4}\right)$ R. $-\frac{2}{11}$

336 $\left(-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)$ R. $\frac{1}{24}$

337 $\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\right):\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{4}\right)$ R. $\frac{5}{6}$

338 $\frac{1}{3}-\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{6}\right)+\frac{3}{2}-\left[\frac{3}{4}-\left(\frac{7}{30}-\frac{4}{5}\right)+\frac{5}{6}\right]$ R. $-\frac{3}{20}$

339 $\frac{5}{6}-\frac{2}{3}\cdot\frac{12}{5}+\frac{3}{2}\cdot\left[\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{12}{7}-\frac{5}{2}\right)+\frac{5}{6}\right]$ R. $-\frac{673}{1680}$

340 $\frac{5}{6}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{12}{5}-\frac{3}{4}:\left[0{,}75-\frac{5}{6}\right]$ R. $\frac{31}{3}$

341 $\frac{1}{3}:\left(\frac{3}{2}-\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{6}-\frac{1}{15}$ R. $\frac{1}{2}$

342 $-\left(\frac{3}{4}+1{,}4\right)\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{8}\right)+\frac{6}{5}$ R. $\frac{55}{96}$

343 $\left(\frac{2}{3}-\frac{7}{6}\right)-\left(1+\frac{5}{6}\right):\left(2-\frac{1}{3}\right)$ R. $-\frac{8}{5}$

344 $\left(\frac{5}{3}-\frac{7}{2}\right)\cdot\frac{4}{5}+\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{15}\right)\cdot\frac{5}{2}\right]^2$ R. $-\frac{46}{45}$

345 $\left(3-\frac{18}{5}-\frac{5}{6}\right)\cdot\left(-\frac{9}{4}+\frac{3}{4}\right)-\frac{2^2}{3}+\frac{1}{60}$ R. $\frac{5}{6}$

346 $\left[\frac{2}{3}-\left(-\frac{1}{4}+\frac{2}{5}\right)\right]-\left[\frac{3}{5}-\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\right)\right]$ R. $\frac{1}{3}$

347 $2-\left[3+1-\left(2-\frac{1}{2}\right)\right]-\left(-2-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}+\frac{1}{6}\right):\left(-\frac{1}{2}\right)$ R. $-\frac{1}{12}$

348 $\frac{63}{55}\times\frac{44}{45}+\frac{14}{75}\times\frac{15}{35}+\frac{2}{25}\times10-\frac{16}{25}:\frac{3}{5}+\frac{1}{15}$ R. 1

349 $\left\{\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right):\left(\frac{5}{6}-\frac{5}{12}\right)\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right]:\frac{1}{4}\right\}-\frac{2}{3}\cdot(-0{,}6)$ R. $\frac{13}{5}$

350 $\frac{4}{5}-\frac{27}{7}\times\frac{1}{12}+\frac{8}{21}:\frac{8}{6}+\frac{13}{2}\times\frac{1}{7}-\frac{9}{14}+\frac{1}{7}-\frac{12}{25}:\frac{3}{5}$ R. $\frac{11}{28}$

351 $\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)\times\frac{7}{2}-\left(\frac{10}{18}-\frac{7}{15}\right):\frac{2}{9}\right]:\frac{14}{15}\times\frac{1}{4}+1$ R. $\frac{15}{14}$

352 $\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{7}{5}+\frac{3}{4}\right)-\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{4}\cdot\frac{3}{7}\right):\frac{2}{14}-\frac{1}{400}$ R. $\frac{5}{3}$

353 $\left(\frac{3}{5}-1\right)-\left(\frac{1}{8}+\frac{7}{5}-\frac{17}{20}\right)+\left(\frac{7}{6}-\frac{2}{5}\right):\frac{4}{15}-\left(\frac{3}{2}-\frac{5}{2}:\frac{1}{5}\right):\frac{22}{17}-\frac{3}{10}$ R. 10

354 $\frac{19}{3}\cdot\left(\frac{3}{5}+\frac{3}{2}-2\right):\left(\frac{3}{10}-\frac{5}{4}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}-1\right)+\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{3}{10}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)^2$ R. $\frac{13}{15}$

355 $\left[\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{10}\right):\frac{37}{5}+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{3}\right]^2:\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{5}{12}\right)^2\right]$ R. $\frac{1}{50}$

356 $\left[\left(1+\frac{1}{2}\right):3-\left(2+\frac{3}{2}\right)+1\right]+(3-0{,}75)+\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{2}\right)-1\left(-2+\frac{3}{2}\right)^2$ R. $\frac{11}{6}$

357 $\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{6}\right)^{-1}-\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{8}\right)+\frac{10}{8}\cdot\left(\frac{5}{7}\right)^{-2}+\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}\cdot\frac{1}{6^2}$ R. $\left[\frac{139}{40}\right]$

358 $\left\{\left(\frac{2}{5}\right)^4\times\left[\left(\frac{2}{5}\right)^8:\left(\frac{2}{5}\right)^3\right]^2\right\}^2:\left[\left(\frac{2}{5}\right)^3\times\frac{2}{5}\times\left(\frac{2}{5}\right)^3\right]^4$ R. 1

359 $1-\left[\left(\frac{3}{2}\right)^3\times\left(\frac{3}{2}\right)^2:\left(\frac{3}{2}\right)^4-\left(\frac{4}{5}\right)^3:\left(\frac{4}{5}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^4:\left(\frac{1}{3}\right)^3\right]$ R. $\frac{1}{6}$

360 $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}+\frac{2^2}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}-\frac{(-2)^{-2}}{5}-2^4$ R. $\left[\frac{9}{20}\right]$

361 $\left\{\left[\frac{1}{6}+\frac{1}{2}:\left(0{,}75+1-\frac{3}{4}\right)\right]^3\cdot\left(\frac{3}{5}-\frac{3}{8}\right)+\frac{3}{5}\right\}:\frac{1}{5}$ R. $\frac{10}{3}$

362 $\left\{\frac{1}{2}+\frac{15}{2}:\left[\frac{1}{2}:\left(1-\frac{3}{4}\right)+1\right]\right\}\cdot\left[\left(\frac{1}{3}\right)^5:\left(\frac{1}{3}\right)^4\right]^2$ R. $\frac{1}{3}$

363 $\left\{\left[\left(\frac{5}{4}\right)^2:\left(\frac{1}{2}\right)\right]\cdot\left[\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}\right)\cdot\frac{4}{5}\right]\cdot\frac{1}{14}\right\}^2:\left(1-\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{10}\right)^2$ R. $\frac{1}{144}$

364 $\left[(0{,}4-1)^2:0{,}01-\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}\right]\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{-4}$ R. $[630]$

365 $\frac{7}{15}\left\{\left(\frac{9}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}-\frac{11}{16}:\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right):\left[\left(\frac{4}{7}+\frac{5}{4}\right):\frac{17}{7}\right]\right\}\cdot\frac{9}{5}$ R. $\frac{77}{50}$

366 $\left(2+\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(2-\frac{1}{2}\right)^{-2}+\left[\left(2+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{7}{3}\right)^{-2}\right]^{-1}$ R. $\left[\frac{46}{9}\right]$

367 $\left[\left(3+\frac{1}{2}-\frac{5}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]:\left\{\frac{3}{2}-\left[\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{11}+\frac{5}{22}+\frac{7}{33}\right):\frac{82}{33}+\frac{1}{12}\right]^5\right\}^3:\frac{1}{4}$ R. $\frac{44}{3}$

368 $\left\{\left[\left(\frac{8}{3}\right)^{10}:\left(\frac{8}{3}\right)^6\right]^2\cdot\left[\left(\frac{8}{3}\right)^8:\left(\frac{8}{3}\right)^3\right]\right\}:\left(\frac{8}{3}\right)^{11}$ R. $\frac{64}{9}$

369 $\left(1+\frac{3}{2}\right)^2\cdot\left(2-\frac{5}{2}\right)^{-2}\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^{-2}$ R. $[400]$

370 $\left(\frac{1}{3}-1\right)-\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{6}{5}-\left(\frac{2}{9}-\frac{1}{5}\right)\cdot3-\frac{1}{30}$ R. $-\frac{2}{3}$

371 $\frac{\left(1+\frac{2}{3}\right):5+\left(2-\frac{2}{3}\right)}{3+\left(\frac{1}{2}-1\right)}:\frac{\left(5-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{7}{3}-\frac{2}{35}\right)}{\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(3-\frac{1}{3}\right)}$ R. $\frac{100}{303}$

372 $8{,}75\left(\frac{2}{5}-0{,}2\right)\left\{\left[2-1{,}\bar{6}-\left(0{,}2+\frac{2}{3}\right)\right]\left(\frac{1}{7}-\frac{17}{4}\right)\right\}-\frac{2}{3}\left(2-\frac{1}{2}\right)+7{,}5-0{,}\bar{3}$ R. 10

373 $\left(\frac{1}{6}+0{,}1\right)\cdot0{,}16\cdot(1-1{,}0\bar{1})^{-1}$ R. $[-4]$

374 $\left(\frac{4}{3}-2\right)\left(-\frac{1}{2}\right):\left[\frac{5}{7}\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{6}\right)+\left(2+\frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{4}-\frac{4}{3}+\frac{1}{2}\right)\right]:\frac{11}{6}$ R. $-\frac{60}{11}$

375 $\left(1-\frac{1}{2}\right)^{-2}\cdot\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)^2\right]^{-2}:\left(\frac{5}{2}-2\right)^{-3}$ R. $\left[\frac{8}{81}\right]$

376 $\left\{\left[\left(1-\frac{3}{5}\right)^3:\left(\frac{2}{5}\right)^4\right]:\left(\frac{3}{5}-1\right)^2\right\}^6:\left\{\left[\left(\frac{4}{5}-\frac{2}{5}\right)^4\cdot\left(\frac{7}{5}-1\right)^2\right]^2\cdot\left[\left(1-\frac{3}{5}\right)^5:\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)^4\right]^2\right\}^2$ R $\left(\frac{2}{5}\right)^{-46}$

377 $\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{4}\right)\left(-1-\frac{1}{3}\right)+\left[\left(1+\frac{4}{3}\right)\cdot\left(4-\frac{9}{2}\right)\right]\cdot\frac{3}{4}+3-\left(\frac{2}{27}\cdot\frac{9}{10}-\frac{1}{10}\right)-\frac{9}{40}$ R. 2

378 $[0{,}625+4{,}5\cdot(0{,}75-0{,}\bar{6})]:[0{,}875+0{,}75\cdot(2{,}5-2{,}\bar{3})]$ R. 1

379 $\left\{3-\left[0{,}\bar{6}-\left(0{,}1\bar{6}+\frac{5}{12}\right)\right]:0{,}25\right\}^2\cdot(0{,}\bar{6}-0{,}625)$ R. $\frac{8}{27}$

380 $\left(\frac{12}{9}-1\right)^2\cdot\left(\frac{2}{81}:3\right)^{-1}\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{7}{4}\right)^3\cdot\left[-\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{49}-\frac{3}{147}\right)\right]-\frac{1}{(-4)^2}$ R. $\left[\frac{25}{4}\right]$

381 $\left(\frac{1}{5}\right)^2-\left(\frac{1}{6}\right)^{-1}-\frac{\left(\frac{1}{3}+0,5\right)^{-2}}{\left(\frac{1}{3}-0,5\right)^{-2}}+\left(\frac{0,5-0,1}{1-0,5}\right)^{-2}-4^{-2}$ R. $\left[-\frac{9}{2}\right]$

382 $\left[0,1\overline{6}+\left(0,1\overline{36}+0,41\overline{6}-0,2\overline{27}\right):0,3\overline{90}\right]:\left[0,\overline{36}+2,25\cdot\left(0,\overline{5}-0,\overline{27}\right)\right]$ R. 1

383 $\frac{1,6-0,5\cdot\left(0,\overline{6}-0,5\right):\left(1-0,\overline{6}\right)^2-0,7}{3\cdot\left(1-0,5\right)^2+0,875-\left(1-0,5\right)^2:0,2-0,6\cdot0,5}$ R. 2

384 $0,1\overline{6}^2+\left[1,5:1,5^2+(1,\overline{6}-0,5):(2-0,\overline{3})+(0,\overline{6}+0,5-0,2)\cdot0,75:5,8\right]\cdot0,\overline{6}$ R.38/45

385 $\left\{0,8\overline{3}-\left[0,\overline{6}+\left(0,75-0,\overline{6}^2-(1-2,\overline{3}\cdot0,25)\right)\right]+0,\overline{6}:0,\overline{8}\right\}:1,02\overline{7}$ R. 40/37

386 $\left[\frac{-0,\overline{3}+2\cdot1,\overline{3}}{1,\overline{3}}+2+\frac{1,\overline{3}+2\cdot0,\overline{3}}{-0,\overline{3}}\right]\cdot\frac{(1,\overline{3})(-0,\overline{3})}{1,\overline{3}-0,\overline{3}}$ R. 1

387 $\frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}}+\frac{1}{\sqrt{13^2-12^2}}-\sqrt{\frac{1}{36}+\frac{1}{8}-\frac{1}{24}}$ R. $\frac{1}{15}$

388 $\sqrt{20-2\cdot(2+3)+(2+1)\cdot5}+\sqrt{48:6-3\cdot2+10:5}$ R. 7

389 $\left(\frac{4}{5}\right)^2-\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{4}-1+0,5\right):(0,75+2,5+1-1,125)-\left(\frac{3}{25}+\overline{0},3\right)$ R. 0

390 $\left(\frac{1}{3}+1\right):(0,\overline{1}6+0,25)-(0,3+0,7)-\left(2+\frac{1}{5}\right)$ R. 0

391 $3^4\cdot\left[\left(\frac{5}{6}\right)^2\right]^3\cdot\left[\left(\frac{2}{15}\right)^3\right]^2:\left(\frac{1}{9}\right)^4$ R. 1

392 $2^2\cdot(1,75)^2\cdot\left(\frac{2}{7}\right)^2\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^2:[(0,5)^2]^3$ R. 1

393 $2\left(1-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{7}{6}-2\right)\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)\left[1-\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+1,5\right]+\frac{14}{5}\left(\frac{2}{7}-1\right)$ R. $\frac{5}{6}$

394 $0,\overline{3}\frac{(0,\overline{1}+0,2\overline{7})}{\left(0,8\overline{3}-\frac{7}{9}\right)\cdot(0,\overline{27}+1,\overline{6}+0,\overline{39})}$ R. 1

395 $\left(1-\frac{3}{2}\right)^2\left(1+\frac{1}{3}\right)^2:\left(-\frac{1}{3}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)^3:\left(-\frac{1}{2}\right)$

396 $\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)^2\left(1-\frac{1}{2}\right)^2\right]^3\cdot\frac{2^{12}}{3^6}+\left[\left(-\frac{3}{4}\right)^{-3}:\left(-\frac{3}{4}\right)^{-2}\right]\cdot\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^2:\left(-\frac{2}{3}\right)^3\right]^2$

397 $\left\{\left[\left(\frac{3}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^3\right]:\left[\left(\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]\right\}:\left(2+\frac{4}{9}\right)$

398 $3^2\left\{\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{7}{6}\right):\left(\frac{9}{11}\right)\right]:\left(\frac{1}{3}-\frac{7}{9}\right)\right\}\cdot\left(\frac{14}{11}-\frac{4}{3}\right)$ R. -1

399 $\frac{(-2+0,5)[0,3(1+0,5)+(0,4-\overline{0},3-0,2)]}{2,5-(8-0,25)(1-0,8)}$ R. $-\frac{1}{2}$

400 $\left(-2+\frac{1}{2}\right):\left(-3+\frac{3}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{8}\right):\left(-\frac{3}{4}-\frac{3}{2}\right)+\frac{8}{5}:\left(-\frac{2}{3}-2\right)$ R. $-\frac{1}{10}$

401 $\left(-2+\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(4-\frac{3}{2}+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}-2\right)^2\left(3-\frac{1}{4}\right)$

402 $\sqrt{\frac{1}{9}\cdot\left\{\left[\frac{11}{3}-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\right]:\left[\left(2-\frac{7}{4}\right)+\frac{10}{3}\right]\right\}}$ R. $\frac{1}{3}$

403 $\sqrt{\left\{\left[\left(\frac{5}{4}\right)^2:\left(\frac{1}{4}\right)^2\right]\cdot\left[\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}\right)\cdot\frac{4}{5}\right]\cdot\frac{1}{4}\right\}^2:\left(1-\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{10}\right)^2}$ R. $\frac{7}{3}$

404 $\left(-\frac{3}{2}-1\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}+1\right)+\left(\frac{3}{4}-2\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}-2\right)\cdot\frac{4}{11}+$
$+\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\right)-\left[\frac{1}{9}-\left(\frac{3}{2}-\frac{2}{3}\right):\left(\frac{9}{4}+1+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\right)+\frac{2}{3}:\left(\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+\frac{1}{3}\right)\right]+\left(\frac{7}{6}-1\right)^2$ R. $\frac{5}{9}$

405 $\left[-\left(-\frac{1}{5}\right)^2:\left(\frac{3}{5}-1\right)^{-2}\right]\cdot\left(-1-\frac{1}{5}\right)^{-2}\cdot(-2)^{-2}\cdot 30^2-\bigg\{-\bigg[\left(-3-\frac{1}{4}+\frac{13}{4}\right)^2:(-4)^{-2}\bigg]\bigg]\bigg\}$ R. $[-1]$

406 $\left[-(-1)^3+\left(\frac{2}{3}-1\right)^{-2}\right]\cdot\left(-1-\frac{1}{7}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{-1}{5}\right)^2+\left\{-\frac{1}{2}\cdot\left[\left(-1-\frac{1}{2}\right)^{-2}\cdot\left(-\frac{3}{2}-1\right)^2\right]^{-1}:(-5)^{-2}\right\}^2$ R. $\left[\frac{199}{10}\right]$

407 $\left\{\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(1+\frac{1}{5}\right)^2\left(1-\frac{1}{6}\right)^2-\frac{1}{2}\right]^2\cdot\left(\frac{5}{8}\right)^{-2}\right\}^{-1}:\frac{5}{2}$ R. $\frac{1}{10}$

408 $\left(5+\frac{1}{3}\right)^{-2}:\left\{\left(\frac{11}{15}-\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(1-\frac{3}{5}\right)^{-2}-\left[2-\frac{5}{8}-\left(\frac{4}{3}\right)^{-2}\right]\right\}^2$ R. 1

409 $\left[\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{10}:3+\left(\frac{7}{2}:2\right)\left(\frac{2}{7}:3\right)\right]^2\cdot\frac{12}{5}:\left(\frac{20}{16}\cdot\frac{4}{15}+\frac{1}{9}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3$ R. $\frac{5}{8}$

410 $\left(\frac{7}{6}-\frac{5}{4}\right):\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{10}+\left\{\left[2-\left(2+\frac{1}{2}-\frac{3}{4}+\frac{1}{8}\right):\left(-\frac{1}{2}\right)\right]\cdot 2-\frac{7}{10}\right\}\cdot\left(-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)+$
$+\left[\frac{1}{3}+\left(1-\frac{1}{4}\right):\left(-\frac{9}{2}\right)+\frac{1}{15}\right]$ R. $-\frac{5}{3}$

411 $1-\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)^2-\left[\frac{3}{4}+\left(-\frac{1}{2}\right)^3-1+\frac{4}{5}\right]:\left[-\left(\frac{4}{5}\right)^0-\left(\frac{7}{5}-2\right)^2\right]-\frac{3}{2}+\left[\left(-\frac{4}{5}\right)^{-3}\right]^2:\left(-\frac{4}{5}\right)^{-5}$ R. $-\frac{3}{2}$

412 $3-\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{7}\right)-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}+2}\left(2-\frac{9}{5}\right)\left(\frac{1}{7}\right)^{-2}$ R. 1

413 $\frac{\left\{\left[\frac{1}{2}-\left(2-\frac{11}{4}\right)\right]:(-3{,}5)\right\}\cdot\left(1-\frac{4}{5}\right):7^{-2}}{\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}(-3)^2(-1)^2:(-3)^2}$ R. $-\frac{2}{27}$

414 $\frac{\left(1+\frac{4}{3}\right)^5\left(2-\frac{1}{3}\right)^6+\frac{4}{7}(2)^3}{\left\{\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)^2:\left(2-\frac{1}{2}\right)^4\right]\left(-\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{3}\right\}^3}$

415 $\left(1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)^{-2}\cdot\left(1-\frac{1}{1+\frac{1}{2}}\right)^2\cdot\left(4-\frac{9}{2}\right)^{-3}$ R. $\left[-\frac{8}{81}\right]$

416 $\left[\left(2+\dfrac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right)^{-3}\cdot\left(\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{\frac{3}{2}-\frac{5}{3}}-\dfrac{1}{8}\right)\cdot\left(-\dfrac{3}{10}\right)^{-2}\right]^{-2}$ R. $[100]$

417 $\dfrac{\left[-\left(\frac{9}{4}+\frac{9}{5}\right)-\frac{1}{20}\right]\left(\frac{11}{4}-\frac{5}{2}\right)}{1-\left[1-\left(-\frac{17}{7}\right)\right]-\left(-1+\frac{2}{7}-\frac{1}{14}\right)}-\left[\left(\dfrac{1}{7}+\dfrac{33}{21}\right)-\left(1-\dfrac{1}{5}-\dfrac{2}{7}\right)\right]$ R. $-\dfrac{1}{2}$

418 $\dfrac{\left[\frac{8}{3}-5\left(1-\frac{7}{15}\right)+\left(1+\frac{5}{6}\right)\cdot 3\right]\cdot\frac{1}{11}+1+\frac{1}{24}-\frac{5}{3}}{\frac{5}{4}+\frac{3}{10}:\left(\frac{8}{5}-1\right)+\left(\frac{3}{8}-\frac{1}{2}-1-\frac{1}{4}\right):\left(4+\frac{3}{2}\right)}$ R. $-\dfrac{1}{12}$

419 $\dfrac{(-1{,}5)^{-1}\left\{\frac{2}{3}-\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)-(-3)^{-1}\right]\right\}-\left(\frac{1}{2}+0{,}75\right)^{0}}{(1-0{,}\bar{3})\left\{-1-\left[-\frac{2}{3}+\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot 3^{-1}\right]\right\}+1}:\left[\left(\dfrac{9}{6}\right)^{3}:\left(\dfrac{6}{9}\right)^{-2}-2{,}\bar{6}\right]$ R. $\dfrac{18}{13}$

420 $\dfrac{\left[\frac{1}{2}-\left(1+\frac{8}{7}+\frac{1}{14}\right)\right]\cdot(-3{,}5)\cdot(3-2{,}8)\cdot 6^{-2}}{(-5)^{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}:(-0{,}1)^{-2}}$ R. $\dfrac{1}{30}$

421 $\dfrac{\frac{1}{10}+\frac{8}{15}:\left(\frac{5}{9}-0{,}\bar{1}6-\frac{1}{2}\right)}{2\cdot 5^{2}\cdot\left(\frac{3}{10}+0{,}25\right)\left(\frac{7}{11}-\frac{1}{3}+\frac{5}{11}\right)}-\dfrac{\left[\left(\frac{3}{7}\cdot\frac{14}{15}-\frac{1}{10}\right):\frac{3}{10}\right]}{\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}}$ R. $-\dfrac{12}{25}$

422 Calcola il valore dell'espressione E = A- B, dove

$$A=\left(\left(\left(-\frac{3}{7}\right)^{4}:\left(-\frac{7}{3}\right)^{-2}\right)\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^{-1}\right)^{-2}\qquad B=\left(\left(\frac{3}{7}\right)^{-6}\cdot\left(1-\frac{4}{7}\right)^{5}\right)^{2}$$

423 L'età di Paolo è i 5/11 di quella della madre che ha 44 anni. Quanti anni ha Paolo? [20]

424 L'età di Marco è 1/2 di quella di Paolo che è 1/3 di quella del padre che ha 54 anni. Quanti anni ha Marco? [9]

425 I 2/5 del libro che stiamo leggendo è la parte più noiosa, le rimanenti 63 pagine sono invece le più avvincenti. Di quante pagine è formato il libro? [105]

426 Gli alunni del primo e del secondo anno di una scuola media sono rispettivamente i 3/7 e i 2/7 del totale. Sapendo che gli alunni che frequentano la terza media sono 54, quanti sono tutti gli alunni della scuola? [189]

427 Al supermercato ho speso 7/10 della somma di denaro che possedevo; successivamente ho incassato un credito uguale ai 13/20 della somma iniziale e ho speso 2/15 sempre della somma iniziale per un rifornimento di benzina. Sapendo che sono rimasto con 220,50 euro, quale somma di denaro possedevo inizialmente? [270]

428 In una fattoria ci sono vitelli, capre e animali da cortile per un totale di 75 capi. I vitelli sono i 2/5 di tutti gli animali, mentre le capre sono i 2/3 degli animali da cortile. Quanti vitelli, capre e animali da cortile ci sono? [30, 18, 27]

429 Tre casse pesano complessivamente 220 kg; la seconda pesa 1/2 della prima e la terza pesa 1/3 della seconda. Calcola il peso di ciascuna cassa. [132; 66; 22]

430 Tre operai devono eseguire un lavoro. Il primo da solo lo farebbe in 12 giorni, il secondo in 18 giorni e il terzo in 36 giorni. Lavorando insieme, in quanti giorni i tre operai potrebbero eseguire tutto il lavoro? [6]

431 Un collezionista vende i 3/7 della sua collezione costituita da 385 pezzi. Quanti pezzi gli rimangono? [220]

432 In un terreno agricolo sono stati piantati ulivi e mandorli per 266 alberi complessivi. Se gli ulivi sono i 4/10 degli alberi di mandorle, quanti sono gli ulivi e i mandorli? [76; 190]

433 Il prezzo di copertina di un libro è di 29 euro; quanto verrà pagato con uno sconto del 15 % [24,65]

434 Su 1020 alunni di una scuola, 153 sono stati respinti; qual è la percentuale dei promossi? [85%]

435 La differenza di età fra Marco e Antonio è di 18 anni e l'età di Marco è i 7/4 di quella di Antonio. Quanti anni hanno Marco e Antonio? [42; 24]

436 Un oggetto è costituito da una lega di zinco e , il suo peso è di 280 g, la percentuale di rame è %. Quanti grammi di zinco contiene?

437 Mario va in pizzeria e, nell'attesa di essere servito, conta le persone che vi si trovano: gli uomini sono i 5/9 delle donne, queste superano gli uomini di 8 unità, infine vi sono 17 bambini. Quante persone ci sono in tutto? Quanti sono gli uomini e le donne? [45, 10, 18]

438 Gino compra un auto da 5.400 euro. Paga i 4/9 in contanti ed il resto in 5 rate. Qual è l'ammontare di ogni rata? A quale frazione corrisponde ogni rata? [600 €; 1/9]

439 Il serbatoio di una macchina contiene benzina per i 3/4 della sua capacità. Dopo aver consumato i 2/3 della benzina che c'è, si fa un pieno aggiungendone 66 litri. Qual è la capacità del serbatoio? [88]

440 Un misurino contiene 1/8 di kg di farina. Quanti misurini di farina sono necessari per riempire un sacchetto di 5 kg?

441 Due gruppi di scavatori scavano una galleria, ciascun gruppo comincia da una delle due parti opposte; se fino a oggi hanno scavato rispettivamente 5/9 e 3/7 dell'intera galleria e restano ancora da scavare 2 m, quanto è lunga l'intera galleria? [126]

442 L'aria è composta per 39/50 di azoto e per 21/100 di ossigeno, la parte rimanente è composta da gas diversi. Quale frazione di aria occupano tutti gli altri gas? [1/100]

443 Luca ha pagato la tassa scolastica in ritardo, ha pagato 56,16 € compresa la mora del 4% per il ritardo nel pagamento. Quanto avrebbe dovuto pagare senza mora? [54€]

444 In un'azienda 3/10 degli impiegati sono addetti contabilità. Qual è la percentuale degli addetti contabilità rispetto a tutti gli impiegati azienda?

445 A un gruppo di 200 intervistati è stato chiesto quale quotidiano leggono. Le risposte sono state le seguenti:

- 90 leggono "La Repubblica"
- 70 leggono "Il Corriere della sera"
- 30 leggono " La stampa"
- 10 leggono " La gazzetta dello sport"

Trasforma in percentuali i dati ottenuti.

446 A un concorso si sono presentati 324 candidati. 22 hanno superato il concorso. Qual è stata la percentuale dei candidati che non hanno superato il concorso?

447 Un'auto usata è stata acquistata a 11800 € in questo modo: il 5% come caparra per la prenotazione, il 20% al momento della conseegna e il resto in 12 rate di pari importo. Qual è l'importo della rata? [737,5 €]

448 Un gestore di un bar acquista i cornetti a 0,60€ rivende a 0,75€. Qual è la percentuale di guadagno sul prezzo di acquisto? [25%]

449 In un supermercato si vende il pomodoro pelato a 0,60 € in confezioni da 250 g e a 1,00 euro in

confezioni da 500 g. Quale percentuale di sconto usufruisce chi compra la confezione da mezzo chilo?

450 In una piscina contenente 2800m^3 di acqua si devono aggiungere 15 litri di cloro. Quanto cloro occorre per 1000m^3 di acqua? [5,36 l]

451 La somma di due segmenti misura 34cm, sapendo che le loro lunghezze sono in proporzione con 3/2, calcola la loro lunghezza. [13,6; 20,4]

452 Gli angoli interni di un triangolo hanno misure proporzionali ai numeri 1; 3; 5. Ricordando che la somma degli angoli interni di un triangolo misura 180°, calcola le misure degli angoli. [20°, 60°, 100°]

453 Un televisore a 16/9 ha la base di 18”. Quanti pollici misura l’altezza?

454 Per preparare una torta bisogna mettere 3 parti di zucchero ogni 4 parti di farina. Se si utilizzano 500g di farina, quanto zucchero bisogna utilizzare?

455 Un negoziante, durante il periodo di Natale, sconta tutti i prezzi del 10%. Se il prezzo iniziale di un paio di scarpe era €70,00 qual è ora il suo prezzo? Dopo le feste, il negoziante abbassa i nuovi i prezzi del 10%. Quanto costano ora le scarpe? [77€; 69,3 €]

456 Al cinema “Pegaso”' hanno deciso di aumentare il biglietto del 10%; il numero degli spettatori è calato, però, del 10%. E' stato un affare? spiega perché. [No, perde l'1% dei ricavi]

457 Anna entra in una cartoleria e compra due penne, di cui una costa il doppio dell'altra; riceve lo sconto 15% sulla penna più costosa e del 40% su quella meno costosa. Qual è lo sconto che riceve complessivamente?

458 Pierino oggi ha incrementato il suo capitale del 10%. Se anche domani l'incremento sarà del 10%, quanto sarà l'incremento totale in percentuale? [21%]

459 Tizio ha perso il 20% dei suoi soldi; quanto dovrà guadagnare, in percentuale, per recuperare?

460 Un paio di scarpe scontato del 20% costa 40€ quanto costava prima dello sconto? [50€]

461 Per pavimentare una piazza 8 operai impiegano 10 giorni lavorando 8 ore al giorno; quanti giorni impiegherebbero 5 operai se lavorassero 6 ore al giorno?

462 Pierino si reca in un negozio di giocattoli, dove ne acquista uno. A Pierino vengono offerti due tipi di sconti, uno del 10% e uno del 35%. In quale ordine converrà ricevere i due sconti? Spiega il motivo.

463 Una tariffa telefonica ha un costo di 10 cent al minuto per i primi 5 minuti di conversazione. Per i minuti successivi aumenta del 5%. Dopo 15 minuti di conversazione aumenta del 20% del costo iniziale. Quanto si spende se si effettua una telefonata di 20 minuti? [2,15 €]

464 Un ingegnere incassa per la realizzazione di un progetto una certa somma. Di essa il 20% deve essere restituita allo stato come IVA e della parte rimanente il 40% deve essere pagata come tasse. Qual è la percentuale della somma che rimane all'ingegnere?

465 Nel pase di Vattelapesca il 20% degli abitanti è europeo il retante 80% è asiatico. La lingua inglese è parlata dal 50% degli europei e dal 40% degli asitici. Se a Vattelapesca 5930 persone parlano inglese, quanti sono gli abitanti di Vattelapesca?

466 Un liquido viene filtrato con un primo filtro che toglie il 40% delle impurità. Successivamente viene filtrato con un secondo filtro che toglie il 30% delle impurità. Infine viene filtrato con un terzo filtro che elimina il 50% delle impurità. Quale percentuale complessiva delle impurità è stata eliminata?

467 Una prova di ammissione consiste di due test. Solo i 2/3 dei candidati superano il primo test e 1/5 di quelli che hanno superato il primo test superano anche il secondo. Qual è la percentuale di candidati che hanno superato tutti e due i test?

468 L'acquisto di un'auto può essere fatto con due tipi di pagamento: pagando l'intero importo di 23000 € all'acquisto il 1° gennaio 2011; oppure dividendo il pagamento in tre rate annuali di 8000, da pagare il 1° gennaio 2011, il 1° gennaio 2012, il 1° gennaio 2013. Avendo tutto il denaro su un conto corrente bancario a un interesse annuo del 3% quale forma di pagamento è più vantaggiosa? Di quanto?

469 Una forte influenza ha colpito il 60% dei bambini di età inferiore o uguale a 10 anni e il 15% delle persone di età maggiore. Se la percentuale di persone che si sono ammalate di questa influenza è stata del 20%, qual è la percentuale di bambini in quella popolazione?

470 Una maglietta costava lire 65.000 prima dell'entrata in vigore dell'euro, dopo costava € 40. Di quanto è aumentato in %, il prezzo della maglietta? Si tenga conto che 1 € valeva 1936,77 lire.

471 Una ragazza, di 46 kg, va dal dietologo, che le consiglia di restare entro il 5% del peso attuale. Tra quali valori può oscillare il suo peso?

472 Per rccogliere le foglie cadute nel cortile della scuola, Mario impiega 6 ore, Marco 10 ore, Matteo 15 ore. Se i tre si mettessero a lavorare insieme, in quante ore pulirebbero il cortile?

473 Una certa bevanda è ottenuta mescolando 1 parte di sciropppo con 5 parti di acqua. Per errore Adolfo ha mescolato 5 parti di sciroppo con 1 di acqua, ottenendo 3 litri di miscuglio. Aggiungendo una opportuna quantità di acqua, Adolfo può ottenere una bevanda in cui sono rispettate le proporziioni stabilite? Quanti litri di acqua deve aggiungere?

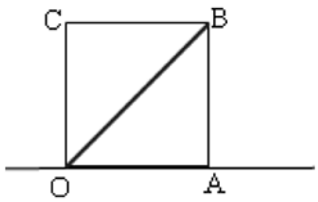
►*26.* Introduzione ai numeri reali

La leggenda di Pitagora e la scoperta di un numero inquietante

La vita e l'opera di Pitagora hanno costituito oggetto di approfondite ricerche da parte degli storici di tutti i tempi. Nonostante le indagini più accurate, i fatti della vita di Pitagora realmente accertati sono veramente pochi. Si dice sia nato a Samo nel 572 a.C. (575 a.C. per altri autori) dove vi regnava il tiranno Policrate; non sopportando la tirannia, si trasferì in Egitto con un incarico di lavoro presso il faraone Amasi. Sembra che poi abbia viaggiato in Babilonia prima di approdare a Crotone dove fondò una Scuola che accolse numerosi discepoli. Pitagora propose un sistema matematico della natura: la spiegazione dei fenomeni naturali doveva avvenire attraverso la ricerca di relazioni tra numeri. Pensava che tutti i corpi fossero formati da punti materiali o monadi combinate in modo da formare le varie figure geometriche e il numero totale di tali unità rappresentava l'oggetto materiale. Da qui nasceva la dottrina secondo la quale tutte le cose che si conoscono hanno un numero; senza questo nulla sarebbe possibile pensare, né conoscere; la spiegazione dei fenomeni naturali può essere raggiunta solo attraverso l'aritmetica.
Per i pitagorici esistono due soli tipi di numeri: gli interi e le frazioni. Ogni numero aveva sia una rappresentazione simbolica che un significato simbolico: il numero 5 veniva assunto a rappresentare il matrimonio, essendo la somma del primo numero dispari, il 3, con il primo numero pari, il 2.
Fu dunque terribile la scoperta di un nuovo tipo di numero che non è né intero né frazionario, questo numero si ottiene calcolando per mezzo del teorema di Pitagora la misura della diagonale di un quadrato di lato uno. Questo nuovo numero, che oggi scriviamo $\sqrt{2}$, non poteva essere espresso in nessun modo come frazione, cioè rapporto di numeri interi. Ad esso i pitagorici diedero il nome di *arreton*, cioè indicibile, inesprimibile. La scoperta fu mantenuta segreta. La leggenda narra che Ippaso, discepolo della Scuola, morì affogato perché violò il giuramento che aveva fatto di non diffondere questa terribile verità.
Oggi questi numeri li chiamiamo **numeri irrazionali**, termine che riflette la stessa idea di inesprimibilità attribuita loro dai pitagorici.
Per approfondire l'argomento: G. Masini, *Storia della matematica*, SEI; John D. Barrow, *La luna nel pozzo cosmico*, CDE; Ludovico Geymonat, *Storia del pensiero filosofico e scientifico*, Garzanti, vol.1; David Bergamini e redattori di Life, *La matematica*, Mondadori; Morris Kline, *Matematica la perdita della certezza*, A. Mondadori .

I numeri irrazionali

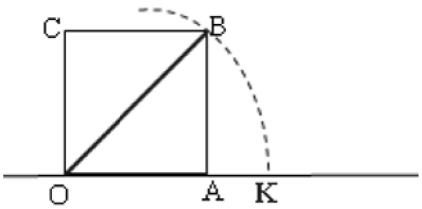
Applicando il teorema di Pitagora a un quadrato di lato unitario per calcolare la misura della diagonale i pitagorici individuarono un nuovo tipo di numero, oggi indicato con $\sqrt{2}$.



Fissiamo sulla retta orientata r l'unità di misura e disegniamo il quadrato di lato 1. Ci proponiamo di calcolare la misura della sua diagonale OB.

Soluzione: il triangolo OAB è retto in A, quindi per il teorema di Pitagora
$\overline{OB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AB}^2$

Sostituiamo le misure: $\overline{OB}^2 = 1^2 + 1^2 = 2$; per ottenere $\overline{OB}$ dobbiamo estrarre la radice quadrata e quindi $\overline{OB} = \sqrt{2}$. Sappiamo che "estrarre la radice quadrata" di un numero significa trovare quel numero che elevato al quadrato dà 2; questo numero deve esistere, nel senso che esiste un punto sulla retta *r* che lo rappresenta, per costruirlo graficamente si può tracciare l'arco di circonferenza di centro O e raggio OB e determinando su *r* il punto *K* estremo del segmento con OK = OB. Dalla posizione del punto K possiamo dire che $1 < \sqrt{2} < 2$. Il valore cercato evidentemente non è un numero intero. Può essere un numero decimale finito? Compiliamo una tabella che contenga nella prima riga i numeri con una sola cifra decimale compresi tra 1 e 2 e nella seconda riga i rispettivi quadrati:



x	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
x^2	1,21	1,44	1,69	1,96	2,25	2,89

Osserviamo che il numero 2 è compreso tra $1{,}4^2$ e $1{,}5^2$, di conseguenza $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$, ma ancora non possiamo precisare il suo valore, anche se abbiamo ristretto l'intervallo in cui si trova il punto K. Diciamo che 1,4 è un valore approssimato per difetto di $\sqrt{2}$ mentre 1,5 è un valore approssimato per eccesso;

scrivendo $\sqrt{2}=1{,}4$ oppure $\sqrt{2}=1{,}5$ commettiamo un errore minore di 1/10.
Per migliorare l'approssimazione e tentare di ottenere $\sqrt{2}$ come numero razionale costruiamo la tabella dei numeri decimali con due cifre compresi tra 1,4 e 1,5:

x	1,41	1,42	1,43	1,44
x^2	1,9881	2,0164	2,0049	2,0776

Ora possiamo dire che 1,41 è un valore approssimato per difetto di $\sqrt{2}$ mentre 1,42 è un valore approssimato per eccesso, con un errore dell'ordine di 1/100. Abbiamo quindi migliorato l'approssimazione e di conseguenza abbiamo ristretto l'intervallo in cui cade il punto K. Ma ancora non abbiamo trovato un numero razionale che sia uguale a $\sqrt{2}$.
Continuando con lo stesso procedimento costruiamo due classi di numeri razionali che approssimano per difetto o per eccesso il numero cercato, restringendo ogni volta l'ampiezza dell'intervallo in cui cade il punto K. Il procedimento continua all'infinito e le cifre decimali che troviamo non si ripetono periodicamente.

valore per difetto	numero	valore per eccesso	ordine dell'errore
1	$\sqrt{2}$	2	1
1,4	$\sqrt{2}$	1,5	10^{-1}
1,41	$\sqrt{2}$	1,42	10^{-2}
1,414	$\sqrt{2}$	1,415	10^{-3}
1,4142	$\sqrt{2}$	1,4143	10^{-4}
…		…	...

Per arrivare a concludere che $\sqrt{2}$ non è un numero razionale, possiamo ragionare nel seguente modo.
Supponiamo per assurdo che $\sqrt{2}$ sia un numero razionale e precisamente $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ con *a* e *b* primi tra loro; si avrebbe, elevando al quadrato, $2=\frac{a^2}{b^2}$.
Se si eleva un numero al quadrato significa elevare al quadrato le singole potenze dei fattori primi in cui questo si scompone. I fattori primi di a^2 e di b^2 sono gli stessi di a e di b con gli esponenti raddoppiati. Quindi anche a^2 e b^2 sono primi tra di loro e a^2 non può essere il doppio di b^2 , se lo fosse dovrebbe essere almeno il quadruplo. Quindi $2\neq\frac{a^2}{b^2}$ e $\sqrt{2}\neq\frac{a}{b}$.
Oltre a $\sqrt{2}$ vi sono altri infiniti numeri che non possono essere scritti come frazione. Per esempio tutte le radici quadrate di numeri naturali che non sono quadrati perfetti e tutte le radici quadrate di frazioni che non sono il quadrato di alcuna frazione.
Le radici quadrate dei numeri che non sono quadrati perfetti e che non sono il quadrato di alcuna frazione sono numeri decimali con infinite cifre decimali non periodiche; essi perciò possono essere scritti solo in maniera approssimata. Questi numeri sono detti **numeri irrazionali** e insieme ad altri, che conoscerete in seguito, costituiscono l'insieme **J** dei numeri irrazionali.

La parte rimante del paragrafo può essere lasciato solo on line; contiene i seguenti argomenti

- Operazioni con le radici quadrate
- Prodotto di radicali quadratici
- Trasporto di un fattore fuori dalla radice
- Potenza di un radicale quadratico
- Quoziente di radicali quadratici
- Somma algebrica di radicali quadratici
- Razionalizzazione del denominatore di una frazione
- Espressioni con i radicali quadratici

Operazioni con le radici quadrate

DEFINIZIONE. Si chiama **radice quadrata** del numero razionale non negativo *a*, il numero non negativo *b* che elevato al quadrato è uguale ad *a*. In simboli $\sqrt{a}=b \Leftrightarrow b^2=a$.

In particolare si ha:

$(\sqrt{a})^2=a$ per ogni a ≥ 0, $\sqrt{0}=0$ infatti $0^2=0$, $\sqrt{1}=1$ infatti $1^2=1$

Il simbolo $\sqrt{a}$ si chiama **radicale quadratico** e *a* si chiama **radicando**.

Il radicando di un radicale quadratico deve essere non negativo.
Infatti dalla definizione di radice quadrata $\sqrt{a}=b \Leftrightarrow b^2=a$ ogni numero elevato al quadrato dà un numero positivo.

Dato che $(\sqrt{a})^2=a$ possiamo scrivere $\sqrt{a}$ come $a^{\frac{1}{2}}$ in quanto per le regole delle potenze anche

$\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2=a$

$\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}};\ \sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}};\ \sqrt{\frac{2}{3}}=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}};$

quindi un radicale quadratico si può scrivere come una potenza che ha per base il radicando e come esponente $\frac{1}{2}$. Naturalmente la base della potenza deve essere maggiore o uguale a 0.

Prodotto di radicali quadratici

Esempio

Determina l'area del triangolo rettangolo avente un cateto di 8m e l'ipotenusa di 12m.

Per calcolare l'area del triangolo rettangolo applico la formula $A=\frac{1}{2}\cdot c_1\cdot c_2$,

occorre allora calcolare l'altro cateto per mezzo del Teorema di Pitagora:

$$c_2=\sqrt{i^2-c_1^2}=\sqrt{12^2-8^2}=\sqrt{144-64}=\sqrt{80}\,m$$

Si è ottenuto un numero irrazionale. L'area è $A=\frac{1}{2}\cdot c_1\cdot c_2=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot\sqrt{80}\,m^2$.

Come si fa ora a moltiplicare dei numeri razionali come $\frac{1}{2}$ e 8 per $\sqrt{80}$?

Si moltiplicano tra di loro i numeri razionali e si mette il risultato davanti alla radice omettendo il segno di moltiplicazione che resta sotto inteso.

$A=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot\sqrt{80}\,m^2=4\sqrt{80}\,m^2$

Per moltiplicare un numero razionale per un radicale si riscrive il numero davanti alla radice, omettendo il segno della moltiplicazione, che resta sottinteso.

Esempio

Determina l'area del rettangolo avente base e altezza rispettivamente di $5\sqrt{7}\,cm$ *e* $2\sqrt{3}\,cm$.

Calcoliamo l'area $A=b\cdot h=5\sqrt{7}\cdot 2\sqrt{3}\,m^2$

Per ottenere il risultato moltiplichiamo tra di loro i numeri razionali fuori dalle radici e subito dopo riportiamo una radice avente per radicando il prodotto dei radicandi.

$A=b\cdot h=5\sqrt{7}\cdot 2\sqrt{3}\,m^2=10\sqrt{21}\,m^2$.

Il prodotto di due radicali quadratici è il radicale quadratico avente per radicando il prodotto dei radicandi.
Possiamo sempre eseguire la moltiplicazione tra radicali quadratici. Infatti se applichiamo le regole delle potenze abbiamo: $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=a^{\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{1}{2}}=(ab)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{ab}$

Trasporto di un fattore fuori dalla radice

Consideriamo il numero $\sqrt{12}$, se scomponiamo in fattori primi il 12 possiamo scrivere $\sqrt{12}=\sqrt{3\cdot 2^2}$, applicando al contrario la regola precedente sul prodotto dei radicali quadratici possiamo scrivere $\sqrt{12}=\sqrt{3\cdot 2^2}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{2^2}=\sqrt{3}\cdot 2=2\sqrt{3}$.

Scomponendo in fattori il radicando di un radicale quadratico, se uno o più fattori compaiono con esponente pari, questi fattori possono essere trasportati fuori dalla radice dividendo per 2 il loro esponente.

In generale dato il radicale quadratico $\sqrt{a^n}$ con $n\geq 2$ abbiamo:

n pari $\sqrt{a^n}=a^{\frac{n}{2}}$

se n è dispari $\sqrt{a^n}=a^{\frac{n-1}{2}}\cdot\sqrt{a}$.

Esempio

- $\sqrt{16}=\sqrt{2^4}=2^2$ $\sqrt{32}=\sqrt{2^5}=2^2\cdot\sqrt{2}$
- $\sqrt{12}\cdot\sqrt{21}$ scompongo in fattori i radicandi: $=\sqrt{3\cdot 2^2}\cdot\sqrt{3\cdot 7}=\sqrt{3^2\cdot 2^2\cdot 7}=3\cdot 2\cdot\sqrt{7}=6\sqrt{7}$.

Potenza di un radicale quadratico

Esempio

Calcola il volume di un cubo il cui lato misura $\sqrt{5}\,cm$.

Il volume di un cubo di lato noto si ottiene elevando alla terza potenza la misura del lato, quindi $V=l^3=(\sqrt{5})^3\,cm^3$.

Per calcolare la potenza di un radicale possiamo applicare la definizione di potenza e cioè moltiplicare il radicale per se stesso tante volte quanto indica l'esponente:

$V=(\sqrt{5})^3\,cm^3=\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}\,cm^3=5\sqrt{5}\,cm^3$.

La potenza di un radicale quadratico è il radicale quadratico avente per radicando la potenza del radicando: in simboli $(\sqrt{a})^n=\sqrt{a^n}$.

Se trasformiamo il radicale quadratico in potenza con esponente $\frac{1}{2}$ per la regole delle potenze abbiamo:

$$(\sqrt{a})^n=\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^n=a^{\frac{n}{2}}=\left(a^n\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a^n}$$

Quoziente di radicali quadratici

Il quoziente di due radicali quadratici è il radicale quadratico avente per radicando il quoziente dei radicandi.

Esempio

Calcolare il quoziente di $\sqrt{15}:\sqrt{12}$.

Applichiamo la regola precedente, otteniamo:

$$\sqrt{15}:\sqrt{12}=\sqrt{\frac{\cancel{15}^5}{\cancel{12}_4}}=\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$.

Possiamo sempre eseguire la divisione tra radicali quadratici se $\sqrt{b}\neq 0$. Infatti se applichiamo le regole delle potenze abbiamo: $\sqrt{a}:\sqrt{b}=a^{\frac{1}{2}}:b^{\frac{1}{2}}=(a:b)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$

Somma algebrica di radicali quadratici

Non esistono regole per sommare un numero razionale ad uno irrazionale. Per sommare, per esempio $7+\sqrt{50}$ possiamo sostituire la radice con un suo valore approssimato $\sqrt{50}\approx 7{,}07107$, sommando ora i due numeri razionali avremo un valore approssimato della somma cercata:

$7+\sqrt{50}\approx 7+7{,}07107=17{,}07107$. Oppure, se vogliamo conservare il valore esatto dobbiamo lasciare indicata la somma e scrivere $7+\sqrt{50}$.

Esempio

Calcola il perimetro del triangolo rettangolo avente i cateti che misurano rispettivamente 1m e 7m.

Per calcolare il perimetro devo conoscere le misure dei tre lati del triangolo.
Applico il teorema di Pitagora per ottenere la misura dell'ipotenusa:
$i=\sqrt{7^2+1^2}\,m=\sqrt{49+1}\,m=\sqrt{50}\,m$.
Per calcolare il perimetro sommo le misure dei lati
$2\text{p}=1\text{m}+7\text{m}+\sqrt{50}\,m=(8+\sqrt{50})m$
Oppure ne calcolo un valore approssimato
$2\text{p}=1\text{m}+7\text{m}+\sqrt{50}\,m\approx 1\text{m}+7\text{m}+7{,}07107\,m=15{,}07107\,m$

Non esistono regole per sommare due radicali quadratici con radicandi diversi. Il valore esatto si scrive lasciando indicate le somme delle radici con i loro simboli. Un valore approssimato si ottiene sostituendo i radicali con valori approssimati.
Non esistono regole delle potenze per sommare due potenze con basi diverse, per esempio 3^2+8^2 è diverso da $(3+8)^2$, infatti $3^2+8^2=9+64=73$ mentre $(3+8)^2=11^2=121$. In generale quindi $a^2+b^2\neq(a+b)^2$ e $\sqrt{a}+\sqrt{b}\neq\sqrt{a+b}$.

Esempio

Calcola il perimetro di un triangolo rettangolo avente i cateti che misurano rispettivamente $\sqrt{2}\,m$ *e* $\sqrt{3}\,m$.

Applichiamo il teorema di Pitagora per calcolare la misura dell'ipotenusa:
$i=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{2})^2}\,m=\sqrt{3+2}\,m=\sqrt{5}\,m$
Il valore esatto del perimetro è: $2\text{p}=(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})m$
Un valore approssimato è $2\text{p}=\sqrt{2}\,m+\sqrt{3}\,m+\sqrt{5}\,m\approx 1{,}4142\,m+1{,}7320\,m+2{,}2361\,m=5{,}3823\,m$

Per sommare due radicali con lo stesso radicando si sommano i coefficienti delle radici e si moltiplica quanto ottenuto per il radicale stesso, lasciando indicata la moltiplicazione.

Esempio

Calcola il perimetro di un rettangolo che ha la base di $5\sqrt{3}\,m$ *e l'altezza di* $2\sqrt{3}\,m$.

Il perimetro si ottiene sommando le due misure e moltiplicando il risultato per 2:
$2\text{p}=2\cdot(b+h)=2\cdot(5\sqrt{3}+2\sqrt{3})m=2\cdot(5+2)\sqrt{3}\,m=2\cdot 7\sqrt{3}\,m=14\sqrt{3}\,m$.

Razionalizzazione del denominatore di una frazione

In alcune situazioni è utile trasformare una frazione che ha un radicale al denominatore in una ad essa equivalente che ha per denominatore un numero intero.
Per razionalizzare il denominatore irrazionale di una frazione, si moltiplica numeratore e denominatore per il denominatore stesso.

Esempio

Razionalizzare i seguenti numeri: $\sqrt{\frac{3}{5}};\ \frac{34}{\sqrt{2}};\ \frac{\sqrt{3}}{3\cdot\sqrt{2}}$

$\sqrt{\frac{3}{5}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$ $\qquad\frac{34}{\sqrt{2}}=\frac{34\cdot\sqrt{2}}{2}=17\sqrt{2}$ $\qquad\frac{\sqrt{3}}{3\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{3\cdot 2}=\frac{\sqrt{6}}{6}$

Espressioni con i radicali quadratici

Esempio

- $\sqrt{2+\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{3-\frac{1}{3}}+3\sqrt{\frac{5}{3}}=$

$$\sqrt{\frac{5}{2}}\cdot\sqrt{\frac{8}{3}}+3\sqrt{\frac{5}{3}} = \sqrt{\frac{5}{2}\cdot\frac{8}{3}}+3\sqrt{\frac{5}{3}} = \sqrt{\frac{5\cdot4}{3}}+3\sqrt{\frac{5}{3}} = \sqrt{\frac{5\cdot2^2}{3}}+3\sqrt{\frac{5}{3}} = 2\sqrt{\frac{5}{3}}+3\sqrt{\frac{5}{3}} = 5\sqrt{\frac{5}{3}}$$

- $\left(\sqrt{4+\frac{1}{2}}:\sqrt{\frac{36}{2}}\right):\left(-\frac{3}{8}\right)^2=$

$$\left(\sqrt{\frac{9}{2}}:\sqrt{\frac{36}{2}}\right):\frac{9}{64} = \sqrt{\frac{9}{2}\cdot\frac{2}{36}:\frac{9}{64}} = \sqrt{\frac{1}{4}\cdot\frac{64}{9}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{64}{9} = \frac{32}{9}$$

Esempio

Sommare $\sqrt{12}-2\sqrt{27}+8\sqrt{75}$.

Ricordiamo che possiamo sommare solo radicali con lo stesso radicando e possiamo portare fuori dalla radice i fattori che hanno esponente pari. Scomponiamo in fattori radicandi.

$$\sqrt{12}-2\sqrt{27}+8\sqrt{75} = \sqrt{2^2\cdot3}-2\sqrt{3^3}+8\sqrt{5^2\cdot3} = 2\sqrt{3}-2\cdot3\sqrt{3}+8\cdot5\sqrt{3} =$$
$$2\sqrt{3}-6\sqrt{3}+40\sqrt{3} = 36\sqrt{3} .$$

Possiamo concludere questa breve rassegna sui numeri irrazionali osservando che la retta geometrica sembra avere “più punti” di quanti siano i numeri razionali; gli infiniti punti lasciati scoperti dai razionali sono immagine di numeri irrazionali. L’insieme che si ottiene dall’unione dell’insieme Q con l’insieme J degli irrazionali è l’insieme R dei numeri reali. La retta geometrica orientata è l’immagine di tale insieme: ogni suo punto è immagine o di un numero razionale o di un numero irrazionale.

474 Calcola il perimetro del rombo avente la diagonale maggiore che misura 12 cm e la diagonale minore che misura 8cm.

Applico il teorema di Pitagora, utilizzo come cateti la metà delle basi e trovo il lato del rombo:

$$l=\sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2+\left(\frac{d_2}{2}\right)^2}=...$$

475 Razionalizza il seguente numero:

$$\frac{3}{\sqrt{18}}=\frac{3}{\sqrt{3^2\cdot2}}=\frac{3}{...\cdot\sqrt{2}}=\frac{3\cdot\sqrt{...}}{3\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{...}}=\frac{...}{...}$$

476 Tra quali numeri interi è compreso il numero $\beta=\left(3+\frac{1}{3}\right)\sqrt{3}-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+1\right)$

477 *Razionalizzare i denominatori delle seguenti frazioni*

$$\frac{4}{\sqrt{48}} \qquad \frac{2}{\sqrt{8}} \qquad \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{21}} \qquad \frac{16}{\sqrt{12}} \qquad \frac{5}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{36}{\sqrt{5}} \qquad \frac{48}{\sqrt{3}}:\frac{3}{\sqrt{24}}$$

478 Il lato di un quadrato misura m $\sqrt{200}$; calcolare la misura della sua diagonale. Tale diagonale è il di un triangolo equilatero di cui si vuole determinare l’area.

479 La base di un rettangolo misura cm $\frac{20-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$ e il perimetro è cm $3\sqrt{80}+6$. Determinare la misura dell’altezza.

480 Sulla retta reale *r* è rappresentato il segmento unitario:

a) costruire il segmento $\sqrt{2}$.

b) determinare sulla retta *r* il punto che rappresenta il numero $a=\sqrt{2}$

c) calcolare il valore approssimato a meno di un millesimo di *a* utilizzando la tabella:



$\sqrt{2}$	Ordine dell'errore	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
	Valori per difetto				
	Valori per eccesso				

Semplifica i seguenti radicali

481 $\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{3-\frac{8}{3}}:\sqrt{\frac{5}{27}}$

482 $\sqrt{2+\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{3+\frac{1}{3}}:\left(\sqrt{3-\frac{1}{3}}:\sqrt{2-\frac{1}{2}}\right)$

483 $\sqrt{\frac{3}{8}}:\left(\sqrt{\frac{12}{5}}:\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$

484 $\sqrt{5}\cdot\left(\frac{1}{5}\sqrt{3}+\sqrt{27}-\frac{3}{5}\sqrt{12}\right)-2\sqrt{15}$

485 $7\sqrt{8}+\frac{3}{5}\sqrt{50}-18\sqrt{2}$

486 Per ciascuna uguaglianza dire se è vera o falsa

a) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{21}=21$ [V] [F]

b) $\sqrt{3}+\sqrt{7}+\sqrt{10}=10$ [V] [F]

c) $\sqrt{36+25}=6+5=11$ [V] [F]

d) $\sqrt{30}+\sqrt{30}=\sqrt{60}$ [V] [F]

487 Completa la tabella

a	b	$a\cdot b$	$a:b$	a^2	b^3	$a^2\cdot b^3$
$\sqrt{8}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$					
$\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\sqrt{2-\frac{1}{3}}$					
$\sqrt{\frac{1}{2}+1}$	$\sqrt{\frac{5}{2}-2}$					

488 Trasportare fuori dal segno di radice i possibili fattori:

a) $\sqrt{17280}=$.............

b) $\sqrt{\frac{1}{27}}=$...............

c) $\sqrt{128}=$.........

d) $\sqrt{320}=$.............

e) $\sqrt{\frac{250}{32}}=$..............

f) $\sqrt{0,125}=$............

g) $\sqrt{\frac{1}{16}+25}=$...........

h) $\sqrt{8\cdot 10^{-5}}=$………

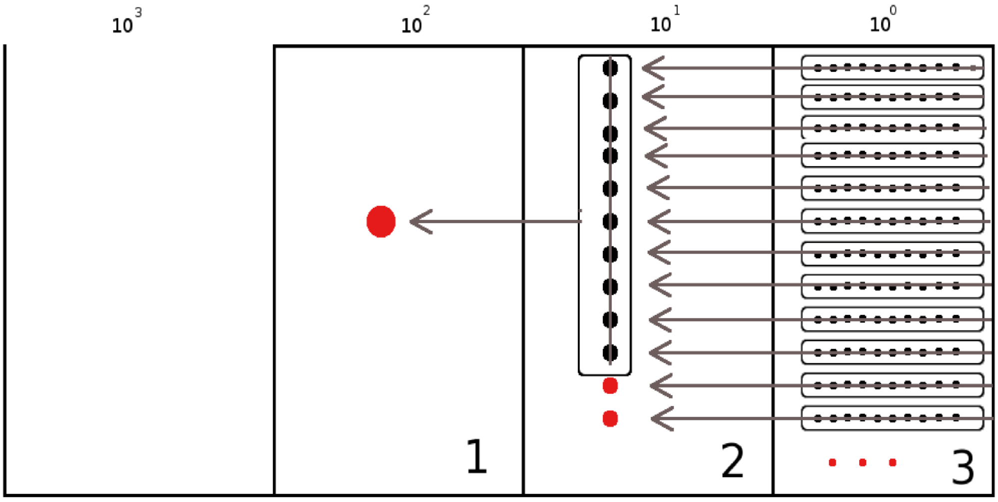
i) $\sqrt{49-\frac{25}{81}}=$.............

489 I due numeri $\alpha=\sqrt{5}\cdot\sqrt{\frac{1}{35}}:\left(\sqrt{\frac{1}{7}}\right)^3$ e $\beta=\sqrt{1-\frac{5}{8}}:\sqrt{2\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{16}\right)}$ sono le misure, rispetto al cm, dei lati di un triangolo rettangolo. Determinare perimetro e area del triangolo.

►27. I sistemi di numerazione

La scrittura in base 10

Il nostro sistema di numerazione è il sistema decimale. Ciò ha probabilmente origine dal fatto che abbiamo 10 dita. Forse se fossimo nati ragni avremmo contato fino ad otto ed useremo un sistema di numerazione ottale, se fossimo nati gatti avremmo contato fino a 4 e useremo un sistema quattrale, millepiedi fino a mille. Come conta un computer? Un computer capisce solo due stati: passa corrente o non passa corrente: è come se avesse due dita. Tutti i sistemi che oggi usiamo nell'informatica sono a due stati, si dicono 'bistabili': i circuiti elettrici possono trovari nello stato di acceso o di spento, i dischi magnetici dell'hard disk sono fatti di microscopici magneti che possono essere magnetizzati in un verso o nel verso opposto, i dischi ottici come i CD-ROM e i DVD si comportano come microscopici specchi che riflettono la luce oppure non la riflettono.
Nell'antichità si usava uno strumento chiamato abaco. Gli abachi erano tavolette suddivise in colonne su cui si spalmavano cera o sabbia e si incidevano segni o si mettevano sassolini.
Per contare un certo numero di oggetti e ricordarci quanti sono, utilizziamo un abaco:



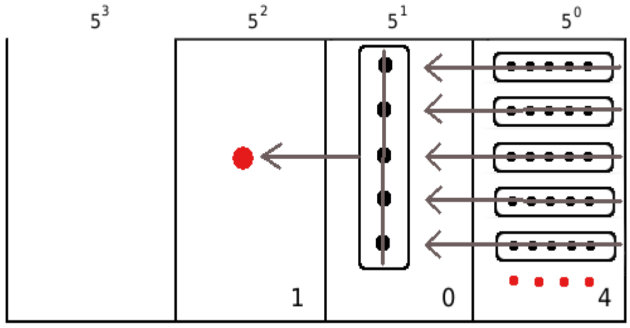
Cominciamo a contare con le mani: per ogni raggruppamento di 10 segniamo un'unità di ordine superiore, fino a contare tutti gli elementi del nostro insieme. Le unità che rimangono, perché non riescono a formare un raggruppamento di 10, vengono segnate con la cifra che le rappresenta: nel nostro caso 3.
Passiamo all'unità di ordine superiore: le decine. Anche con queste formiamo raggruppamenti di 10, se ci riusciamo. Ogni raggruppamento forma un'unità di ordine superiore. Se rimangono unità di questo ordine esse rappresentano decine. Se non rimane alcuna unità scriviamo 0. Nel nostro caso ne rimangono 2.
Il procedimento continua finché non abbiamo finito di contare tutti gli elementi. Nel nostro esempio finiamo dopo aver formato un'unità di ordine superiore. Il nostro numero è 123.
Naturalmente i due numeri 123 e 312 sono due numeri diversi anche se sono formati dalle stesse cifre: sono diversi perché la posizione delle cifre è diversa.
In generale, il valore dei numeri è diverso a seconda della posizione delle sue cifre. Il sistema di numerazione che solitamente usiamo è dunque un **sistema posizionale**: è chiamato decimale o a base dieci perché dieci unità di un determinato ordine formano un'unità di ordine superiore.
Riassumendo, abbiamo una serie di dieci simboli: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Il significato dei simboli dipende dalla posizione che assumono nella "parola" che rappresenta un numero.
Ad esempio: $1846=1\cdot(1000)+8\cdot(100)+4\cdot(10)+6\cdot(1)$
In particolare, scritto con le potenze del 10: $1846=1\cdot(10)^3+8\cdot(10)^2+4\cdot(10)^1+6\cdot(10)^0$
Se il numero è indicato come somma delle cifre per le potenze della base la scrittura si chiama **notazione polinomiale**.
Dieci è la **base** della rappresentazione, ovvero il numero di simboli usati, la potenza del 10 indica il **peso** (la posizione) che i simboli hanno nel numero.
Una volta compreso il meccanismo fondamentale su cui si basa il sistema di numerazione decimale, il procedimento si può estendere ad una base qualunque.
Se B è la base di un sistema, quando si formano B unità di un certo ordine, queste formano un'unità di ordine superiore. In questo modo si può costruire un sistema di numerazione con qualsiasi base maggiore di 1.

Scrittura di un numero in una base qualsiasi

Il procedimento usato per scrivere un numero in base 10 può essere usato per scrivere un numero in una base qualsiasi.

Esempio

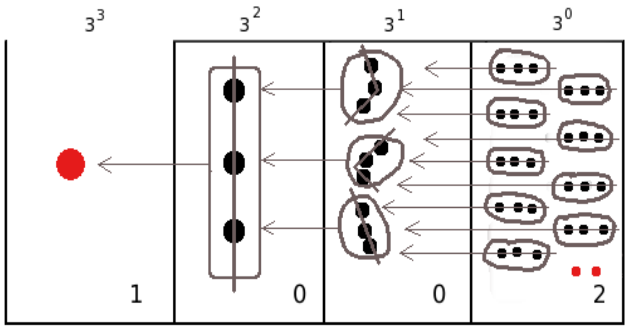
Contare 29 oggetti in base 5.
Come nel caso della numerazione in base 10, utilizziamo un abaco.
Invece di contare per dieci proviamo a contare per cinque. Invece di raggruppare per unità, decine, decine di decine e così via, conteremo raggruppando per unità, per cinquine, per cinquine di cinquine e così via.
Il numero che otteniamo si scrive $(104)_5$ e si legge *"uno-zero-quattro in base cinque"* per distinguerlo da centoquattro scritto in base 10.



Per ottenere il numero decimale che corrisponde al numero scritto in base 5 occorre sviluppare il numero in base 5 nella sua scrittura polinomiale: $(104)_3 = 1 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^0 = 25 + 0 + 4 = (29)_{10}$

Esempio

Contare 29 oggetti in base 3.
Questa volta dobbiamo contare per tre.
Il numero che otteniamo si scrive $(1002)_3$ e si legge *"uno-zero-zero-due in base tre"* per distinguerlo da milledue scritto in base 10.
Per ottenere il numero decimale che corrisponde al numero scritto in base 3 occorre sviluppare il numero in base 3 nella sua scrittura polinomiale.



$$(1002)_3 = 1 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 2 \cdot 5^0 = 27 + 0 + 0 + 2 = (29)_{10}$$

Riflettiamo su quanto abbiamo fatto negli esempi precedenti: i simboli che occorrono per scrivere un numero in base 10 sono dieci: $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$; i simboli necessari per scrivere un numero in base 5 sono cinque: $\{0,1,2,3,4\}$; i simboli necessari per scrivere un numero in base 3 sono tre: $\{0,1,2\}$.
Analogamente i simboli che serviranno per scrivere un numero in base 2 sono due $\{0,1\}$. Possiamo generalizzare e dire che i simboli necessari per scrivere un numero in una base B qualsiasi sono B e precisamente $\{0,1,\ldots,B-1\}$
Possiamo scrivere i numeri anche in una base superiore a 10. Una base molto usata nell'informatica, insieme alla base 2, è la base esadecimale: cioè la base 16.
In questo caso, per contare devo fare raggruppamenti di 16. Sono necessari perciò 16 simboli per indicare questi raggruppamenti, pertanto occorrono simboli anche per i numeri 10 , 11, 12, 13, 14, 15...
I simboli convenzionalmente usati sono i seguenti:

$$(A)_{16} = (10)_{10};\ (B)_{16} = (11)_{10};\ (C)_{16} = (12)_{10};\ (D)_{16} = (13)_{10};\ (E)_{16} = (14)_{10};\ (F)_{16} = (15)_{10}$$

I numeri seguenti sono

$$(10)_{16} = (16)_{10};\ (11)_{16} = (17)_{10};\ (12)_{16} = (18)_{10};\ (13)_{16} = (19)_{10};\ (14)_{16} = (20)_{10};\ (15)_{16} = (21)_{10}$$

Convertire un numero da una base diversa da 10 a base 10

Per scrivere un numero da una base diversa da 10 a base 10 bisogna sviluppare il numero nella sua forma polinomiale.
Se $(x)_B$ è un numero qualsiasi scritto nella base B e se $a_n\ a_{n-1}\ \ldots\ a_2\ a_1\ a_0$ sono le cifre del numero da 0 a $B-1$ avremo:

$$(x)_{10} = a_n \cdot B^n + a_{n-1} \cdot B^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot B^2 + a_1 \cdot B^1 + a_0 \cdot B^0$$

490 Stabilire il valore di verità delle seguenti proposizioni:

a) La scrittura 1234 può esprimere un numero in base 4 V/F
b) Il valore numerico espresso in base 10 della cifra 2 nel numero $(1523)_6$ è 72 V/F
c) Il valore numerico espresso in base 10 della cifra 3 nel numero $(321)_4$ è 12 V/F
d) Il valore numerico espresso in base 10 del numero $(321)_4$ è 57 V/F

491 Scrivi il numero $(3411)_5$ in forma polinomiale e trova il corrispondente numero decimale

$(3411)_5 = 3 \cdot 5^{\cdots} + \ldots \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^1 + \ldots\ldots = 375 + \ldots\ldots + 5 + \ldots\ldots = \ldots\ldots$

492 Trasforma i seguenti numeri scritti in base diversa da 10 in un numero decimale

$(11101)_2$; $(2001)_3$; $(3023)_4$; $(41)_5$; $(3005)_6$ [29, 55, 203, 21, 653]

493 Trasforma i seguenti numeri scritti in base 2 in un numero decimale

$(110111)_2$; $(1001)_2$; $(111)_2$; $(111111)_2$; $(101)_2$ [55; 9; 7; 63; 5]

494 Trasforma i seguenti numeri scritti in base 16 in un numero decimale

$(20F)_{16}$; $(AA)_{16}$;$(19)_{16}$; $(3E)_{16}$ [527; 170; 25; 62]

Convertire un numero da base 10 a una base diversa da 10

Successive divisioni per 3 di 29	**Quozienti** delle successive divisioni per 3	**Resti** delle successive divisioni per 3
29 : 3	9	**2** ↑
9 : 3	3	**0**
3 : 3	1	**0**
1 : 3	0	**1** ●

Abbiamo visto che per contare e scrivere un numero in una base diversa da dieci, per esempio 29 in base 3, dobbiamo raggruppare per 3. Raggruppare per 3 ha lo stesso significato che dividere per 3. Nella prima divisione per tre dei 29 oggetti il quoziente indica quante terzine otteniamo, mentre il resto indica quante unità di ordine 0 verranno considerate. Nel nostro esempio si ottengono nove terzine, mentre rimangono 2 unità di ordine 0. Il 2 sarà il primo numero a destra che verrà considerato. Con nove terzine si ottengono tre terzine di terzine con resto 0. Questo 0 diventa la cifra che scriviamo a sinistra del 2. Con tre terzine di terzine otteniamo una terzina di terzina di terzina, mentre rimangono 0 terzine di terzine. Questo 0 diventa il numero che scriviamo a sinistra dello zero precedente. Ora il quoziente di 1 diviso 3 dà come quoziente 0 con resto 1. Qui ci fermiamo e scriviamo 1 a sinistra dello 0 trovato precedentemente.

Il numero si scrive da destra verso sinistra prendendo i resti dal basso verso l'alto, si ha $(29)_{10} = (1002)_3$.

Controlliamo con la notazione polinomiale: $1 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0 = 27 + 2 = 29$.

Esempio

Convertire nel sistema binario (in base 2) il numero 59.

Dividiamo successivamente 59 per 2 fino a che non otteniamo zero come quoziente e prendiamo come risultato della conversione la successione dei resti partendo dall'ultimo.

Successive divisioni per 2 di 59	**Quozienti** delle successive divisioni per 2	**Resti** delle successive divisioni per 2
59 : 2	29	**1** ↑
29 : 2	14	**1**
14 : 2	7	**0**
7 : 2	3	**1**
3 :2	1	**1**
1 : 2	0	**1** ●

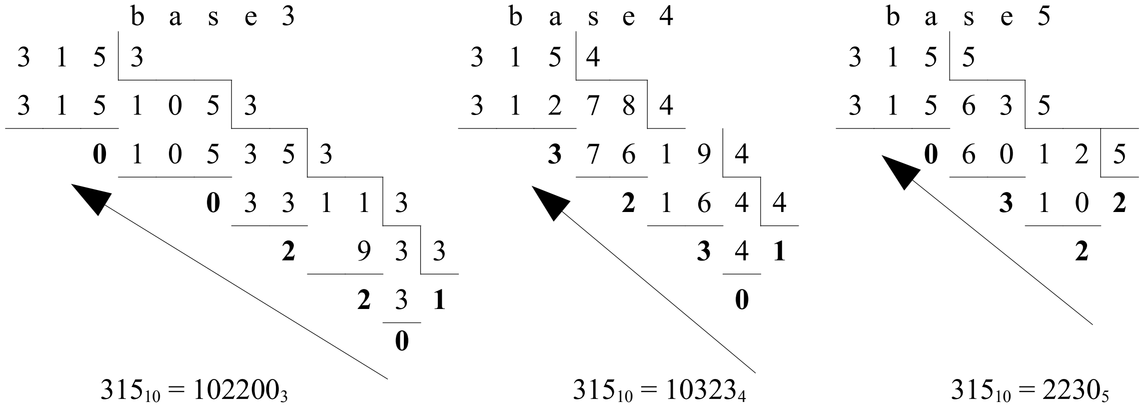
59 scritto in base 2 sarà $(111011)_2$

Verifichiamo con la scrittura polinomiale

$1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 32 + 16 + 8 + 2 + 1 = 59$

Esempi

Trasforma da base 10 a base diversa di 10



$315_{10} = 102200_3$ $315_{10} = 10323_4$ $315_{10} = 2230_5$

Per trasformare i numeri da base 10 a base 2 basta scrivere il numero come somma delle potenze del 2:

1. si parte dalla potenza del 2 più vicina, per difetto, al numero da convertire;
2. si vede se la potenza precedente di ordine inferiore può fare parte della sequenza, cioè se la somma tra le potenze non diventa più grande del numero. Se può farne parte allora si scrive 1, altrimenti 0;
3. si prosegue in questo modo fino ad arrivare a 2^0, cioè 1;
4. la sequenza di 1 e 0, da sinistra verso destra, ottenuti è il numero binario corrispondente.

Esempio

Consideriamo ancora il numero 59.

- Qual è la potenza del 2 più vicina, per difetto al 59? Il numero 32, cioè 2^5. Quindi 2^5 fa parte del numero binario. Scrivo 1 come primo numero della sequenza
- Vediamo ora $2^4=16$. Anche 16 può far parte del numero binario perché 32 + 16 = 48 che è minore di 59. Segno 1 come secondo numero della sequenza
- Per lo stesso ragionamento anche $2^3=8$ fa parte del numero binario. Infatti 32 + 16 + 8 = 56, minore di 59. Segno ancora 1 come terzo numero della sequenza.
- Invece $2^2=4$ non può farne parte perché 32 + 16 + 8 + 4 = 60, maggiore di 59. Segno 0 come quarto numero della sequenza.
- $2^1=2$ e $2^0=1$ vanno bene e si arriva al totale voluto 59. Segno 1 come quinto e 1 come sesto numero della sequenza.

Riassumendo: $59 = 1\cdot 2^5 + 1\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = (111011)_2$

495 Scrivere in base 2 i seguenti numeri in base dieci: 2 4 15 12 27 33

Risultati $[...; (100)_2; ......; (1100)_2; ....; (100001)_2]$

496 Scrivere in base 3 i seguenti numeri : 2 4 15 12 27 33

Risultati $[(2)_3; (...)_3; (120)_3; (......)_3; (1000)_3; (.........)_3]$

497 Scrivere in base 4 i seguenti numeri : 2 4 15 12 27 33

Risultati $[(...)_4; (10)_4; (33)_4; (......)_4; (......)_4; (201)_4]$

498 Scrivere in base 5 i seguenti numeri : 2 4 15 12 27 33

Risultati $[(2)_5; (...)_5; (......)_5; (22)_5; (.........)_5; (113)_5]$

499 Scrivere in base 6 i seguenti numeri : 2 4 15 12 27 33

Risultati $[(...)_6; (4)_6; (...)_6; (20)_6; (....)_6; (....)_6]$

500 Scrivere in base 7 i seguenti numeri decimali: 2 4 15 12 27 33

Risultati $[(2)_7; (...)_7; (....)_7; (....)_7; (....)_7; (45)_7]$

501 Scrivere in base 8 i seguenti numeri : 2 4 15 12 27 33

Risultati $[(...)_8; (...)_2; (17)_8; (....)_8; (33)_8; (.......)_8]$

502 Scrivere in base 9 i seguenti numeri : 2 4 15 12 27 33

Risultati $[(...)_9; (...)_9; (16)_9; (.....)_9; (......)_9; (36)_9]$

503 Scrivere in base 16 i seguenti numeri: 2 4 15 12 27 33

Risultati $[(2)_{16}; (...)_{16}; (F)_{16}; (...)_{16}; (1B)_{16}; (......)_{16}]$

Conversione di un numero da una base diversa da 10 a un'altra base diversa da 10

Esempio

Scrivere il numero $(1023)_4$ in base 7.

Per scrivere un numero da una base B a una base K tutte e due diverse da 10 occorre
1. trasformare il numero in base B in un numero decimale attraverso la sua scrittura polinomiale;
2. trasformare il numero decimale nella base K attraverso i resti delle divisione successive per K .

Applichiamo la procedura indicata:
1. $(1023)_4 = 1\cdot4^3 + 0\cdot4^2 + 2\cdot4^1 + 3\cdot4^0 = 64 + 0 + 8 + 3 = (75)_{10}$
2.

Successive divisioni per 7 di 75	**Quozienti** delle successive divisioni per 7	**Resti** delle successive divisioni per 7
75 : 7	10	**5** ▲
10 : 7	1	**3**
1 : 7	0	**1** ●

Il numero scritto da destra verso sinistra con i resti delle successive divisioni per 7 presi dal basso verso l'alto è $(135)_7$.

Le trasformazioni eseguite sono:
$(1023)_4 \rightarrow (75)_{10} \rightarrow (135)_7$

504 Trasformare in base 7 i seguenti numeri scritti in base 4

$(103)_4$; $(120)_4$; $(203)_4$; $(1301)_4$; $(123)_4$; $(301)_4$ R: $[(25)_7$; $(....)_7$; $(50)_7$; $(......)_7$; $(36)_7$; $(......)_7]$

505 Trasformare in base 9 i seguenti numeri scritti in base 3

$(10002)_3$; $(2020)_3$; $(11201)_3$; $(120122)_3$; $(1001)_3$ R: $[(102)_9$; $(...)_9$; $(......)_9$; $(518)_9$; $(......)_9]$

506 Trasformare in base 16 i seguenti numeri scritti in base 4

$(133)_4$; $(120)_4$; $(203)_4$; $(2301)_4$; $(223)_4$ R: $[(1F)_{16}$; $(....)_{16}$; $(23)_{16}$; $(....)_{16}$; $(2B)_{16}]$

Conversione tra base 4, base 8, base 16 e base 2

Consideriamo il numero scritto in base 2 $(11010011100101)_2$ vogliamo scriverlo in base 4, in base 8, in base 16 senza passare dalla sua scrittura in base 10. Infatti gruppi di due cifre in base 2 rappresentano tutte le cifre della base 4, gruppi di 3 cifre in base 2 rappresentano tutte le cifre della base 8, e gruppi di 4 cifre nella base 2 rappresentano tutte le cifre della base 16, come indicato nella seguente tabella.

Base 10	base 2	base 4	base 8	base 16
0	0	00 = 0	000 = 0	0000 = 0
1	1	01 = 1	001 = 1	0001 = 1
2		10 = 2	010 = 2	0010 = 2
3		11 = 3	011 = 3	0011 = 3
4			100 = 4	0100 = 4
5			101 = 5	0101 = 5
6			110 = 6	0110 = 6
7			111 = 7	0111 = 7
8				1000 = 8
9				1001 = 9
10				1010 = A
11				1011 = B
12				1100 = C
13				1101 = D
14				1110 = E
15				1111 = F

Da base 2 a base 4. Dobbiamo raggruppare il numero scritto in base 2 in gruppi di due cifre partendo da sinistra e tradurre con la corrispondente cifra in base 4.

Numero scritto in base 2	1 1	0 1	0 0	1 1	1 0	0 1	0 1
Numero scritto in base 4	3	1	0	3	2	1	1

$(11010011100101)_2 = (3103211)_4$

Convertire il numero da base 2 a base 8. Dobbiamo raggruppare il numero scritto in base 2 in gruppi di tre cifre partendo da sinistra e tradurre con la corrispondente cifra in base 8.

Numero scritto in base 2	1 1	0 1 0	0 1 1	1 0 0	1 0 1
Numero scritto in base 8	3	2	3	4	5

$$(11010011100101)_2 = (32345)_8$$

Convertire il numero da base 2 a base 16. Dobbiamo raggruppare il numero scritto in base 2 partendo da sinistra in gruppi di quattro cifre e tradurre con la corrispondente cifra in base 16.

Numero scritto in base 2	1 1	0 1 0 0	1 1 1 0	0 1 0 1
Numero scritto in base 16	3	4	E	5

$$(11010011100101)_2 = (34E5)_{16}$$

507 Convertire in base 4, 8 e 16 i seguenti numeri scritti in base 2:
$(101)_2$; $(100011)_2$; $(1111110101)_2$; $(10100100)_2$; $(1101)_2$

508 Convertire in base 2 i seguenti numeri scritti in base 16: $(12)_{16}$; $(A)_{16}$; $(1C3)_{16}$; $(AB)_{16}$; $(223)_{16}$

Perché è importante la base 2?

Tutti gli strumenti elettronici che utilizziamo hanno bisogno di tradurre le informazioni che inseriamo in stati fisici della macchina. Il metodo più semplice per tradurre in linguaggio macchina le nostre informazioni è utilizzare la base 2: composta solo dai simboli 0 e 1. La base 2 è quindi l'alfabeto a disposizione delle macchine per comprendere e rispondere alle nostre richieste. Se si utilizzasse la base 10 dovremo far riconoscere dall'apparato dieci differenti simboli che devono essere tradotti in dieci differenti stati.
A partire da questa informazione elementare detta **bit** (compressione dall'inglese di **bi**nary digi**t**) è possibile costruire informazioni più complesse sotto forma di sequenze finite di 0 e di 1. Attraverso la codifica binaria si è in grado di rappresentare caratteri, numeri, istruzioni di programma ma anche immagini, suoni e video.
Il primo multiplo del bit è il **Byte** che è formato da una sequenza di 8 bit:

0	1	0	1	0	0	0	0

Con una sequenza di 8 bit possiamo codificare fino a 256 caratteri attraverso il codice ASCII. Quando digitiamo un carattere nella tastiera del PC mandiamo un impulso che è una sequenza di 8 bit. Vediamo alcuni esempi della codifica binaria dei caratteri

Carattere	In base 2	Numero decimale
A	0 1 0 0 0 0 0 1	65
a	0 1 1 0 0 0 0 1	97
M	0 1 0 0 1 1 0 1	77
m	0 1 1 0 1 1 0 1	109
0	0 0 1 1 0 0 0 0	48
1	0 0 1 1 0 0 0 1	49
à	1 0 1 0 0 0 0 0	160
ò	1 0 1 0 0 0 1 0	162

Anche il byte ha i suoi multipli. Eccone alcuni indicati nella seguente tabella:

		Sistema internazionale		Utilizzo in informatica	
Nome	Marca	Potenze del 10	Valore decimale rispetto ai byte	Potenze del 2	Valore decimale rispetto ai byte
byte	B	10^0	1	2^0	1
kilobyte	kB	10^3	1000	2^{10}	1.024
megabyte	MB	10^6	1.000.000	2^{20}	1.048.576
gigabyte	GB	10^9	1.000.000.000	2^{30}	1.073.741.824
terabyte	TB	10^{12}	1.000.000.000.000	2^{40}	1.099.511.627.776

Osservazione
E' noto che i prefissi kilo- Mega- e Giga- corrispondono a 1.000 , 1.000.000 (un milione) e 1.000.000.000 (un miliardo), mentre nell'informatica vengono impropriamente usati per indicare particolari potenze di 2. Tutto questo genera confusione: per esempio un disco fisso che da specifiche dovrebbe garantire una capacità di archiviazione pari a 160 gigabyte, quando ne viene visualizzata la dimensione arriva poco oltre 149 gigabyte e i produttori giocano su questa "incertezza". I produttori fanno i conti "imbrogliando". Un PC che viene dichiarato con un hard disk da 160 GB vengono trasformati in byte moltiplicando per 10^9 . Ma quando verifichiamo la grandezza del disco sull'elaboratore, il computer divide per 2^{30} .
$(1{,}6\cdot 10^{11}):(1{,}074\,10^{9})=1{,}49\cdot 10^{2}$. Solo per questo "imbroglio" ci siamo persi 11 GB.

509 Perché un DVD scrivibile quando si compra dichiara una capacità di 4,7 GB e invece ha una capacità reale di 4.3? Un CD-R dichiara una capacità di 700 MB. Quale è la sua capacità reale? [667,57 MB]

►*28.* Operazioni in base diversa da dieci

Le quattro operazioni con i numeri in base diversa da dieci possono effettuarsi con gli stessi algoritmi utilizzati per i numeri naturali.

Addizione

Esempio

Eseguire l'addizione in base 2 tra 101011_2 *e* 10011_2

+	0	1
0	0	1
1	1	10

Dobbiamo tradurre in base due quello che facciamo in base dieci. Abbiamo perciò bisogno di costruire la tavola di addizione in base due che riportiamo a lato. La tavola, o tabellina, è piuttosto semplice, bisogna solo fare attenzione che in base due si ha 1+1=10, perché il 2 si scrive appunto 10 in base due.

Mettiamo i numeri in colonna (vedi a fianco) e cominciamo ad addizionare a partire dalle unità: $1+1=0$, scrivo 0 e riporto 1 .
Nella colonna di ordine superiore trovo $(1+1)+1=0+1=1$
Scrivo 1 e riporto 1 .
Nella colonna di ordine superiore trovo $1+0+0=1$ scrivo 1 senza riportare alcunché.
Continuo in questo modo fino ad esaurire tutte le cifre da addizionare.

Riporti				1	1		
	1	0	1	0	1	1	+
		1	0	0	1	1	
	1	1	1	1	1	0	

Facciamo la verifica nell'usuale sistema decimale: $(101011_2=43)+(10011_2=19)=(111110_2=62)$

Esempio

Eseguire la somma tra la somma in base 5 tra 34231_5 *e* 4341_5

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	10
2	2	3	4	10	11
3	3	4	10	11	12
4	4	10	11	12	13

Costruiamo la tavola di addizione in base cinque: ricordiamo che 4+1=10, 4+2=11, ecc.

Mettiamo i numeri in colonna e cominciamo ad addizionare a partire dalle unità: $1+1=2$ scrivo 2 senza riporto.
Nella colonna di ordine superiore trovo $3+4=12$. Scrivo 2 e riporto 1 .
Nella colonna di ordine superiore trovo $(1+2)+3=3+3=11$ scrivo 1 e riporto 1 .
Procedendo verso sinistra ora trovo $(1+4)+4=10+4=14$ scrivo 4 e riporto 1 .
Infine $1+3=4$. L'addizione è terminata.

Riporti	1	1	1			
	3	4	2	3	1	+
		4	3	4	1	
	4	4	1	2	2	

Verifica nel sistema decimale:
$(34231_5=2441)+(4341_5=596)=(44122_5=3037)$

510 Eseguire le seguenti addizioni in base 2

$$\begin{array}{r} 1\,1\,1\,1\,0\,1\;+ \\ 1\,0\,1\,1\,0 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\,0\,1\,1\,0\,1\;+ \\ 1\,1\,1\,1\,1 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\,0\,1\,1\;+ \\ 1\,1\,1 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\,0\,1\,1\;+ \\ 1\,1\,0\,1 \\ 1\,0\,1\,1 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\,0\,1\,1\,1\;+ \\ 1\,1\,0\,0\,1 \\ 1\,1\,0\,0 \\ \hline \end{array}$$

511 Eseguire le seguenti addizioni in base 5

$$\begin{array}{r} 3\,4\,2\,4\,0\,1\;+ \\ 2\,3\,1\,4\,2 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2\,0\,2\,4\,0\,1\;+ \\ 4\,3\,4 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2\,3\,4\,1\;+ \\ 4\,4\,4 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\,4\,0\,1\;+ \\ 3\,1\,1\,2 \\ 3\,4\,4 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4\,3\,2\,1\;+ \\ 1\,2\,3\,4 \\ 3\,4\,0 \\ \hline \end{array}$$

512 Eseguire le seguenti addizioni in base 3

$$\begin{array}{r} 2\,1\,0\,2\,0\,1\;+ \\ 2\,1\,2\,1\,2 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2\,0\,2\,1\,0\,1\;+ \\ 1\,2\,1\,1\,0 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2\,2\,1\,1\;+ \\ 2\,0\,2 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\,0\,2\,2\,1\;+ \\ 1\,2\,0\,2 \\ 1\,1\,2\,0\,1 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2\,2\,2\;+ \\ 1\,2\,1 \\ 2\,1\,2 \\ \hline \end{array}$$

Sottrazione

Per la sottrazione ci possiamo servire delle stesse tabelle dell'addizione.

Esempio

- $101011_2 - 11111_2$

Mettiamo i numeri in colonna e cominciamo a sottrarre partendo dalle unità: $1-1=0$ scrivo 0.
Nella colonna di ordine superiore trovo di nuovo $1-1=0$ scrivo 0.
Procedendo verso sinistra trovo $0-1$ devo quindi prendere in prestito un unità di ordine superiore che messa davanti a 0 diviene $10-1=1$ scrivo 1 e riporto - 1.
Mi sposto ancora a sinistra e trovo $(-1+1)-1=0-1$.
Occorre prendere in prestito un'unità di ordine superiore $10-1=1$. Scrivo 1 e riporto -1.
Nella colonna a sinistra ho 0 del minuendo, -1 del riporto e -1 del sottraendo. Occorre prendere a prestito un'unità di ordine superiore quindi $10-1=1$ a cui devo togliere 1 del sottraendo: $1-1=0$.
Infine nella unità di ordine superiore devo addizionare il riporto -1 a 1 e scrivo ancora 0 .Il risultato della sottrazione è: 1100

$$\begin{array}{lrrrrrrl} \textit{Riporti} & -1 & -1 & -1 & & & & \\ & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & - \\ & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\ \hline & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \end{array}$$

Verifica nel sustema decimale: $(101011_2=43)-(11111_2=31)=(1100_2=12)$

Esempio

- $34231_5 - 4341_5$

Ci serviamo della tavola di addizione in base cinque.

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	10
2	2	3	4	10	11
3	3	4	10	11	12
4	4	10	11	12	13

$$\begin{array}{lrrrrrl} \textit{Riporti} & -1 & -1 & -1 & & & \\ & 3 & 4 & 2 & 3 & 1 & - \\ & & 4 & 3 & 4 & 1 & \\ \hline & 2 & 4 & 3 & 4 & 0 & \end{array}$$

Verifica:. $(34231_5=2441)-(4341_5=596)=(24340_5=1845)$

513 Eseguire le seguenti sottrazioni in base 2

1 1 1 1 0 1 –	1 0 1 1 0 1 –	1 0 1 1 –	1 1 1 1 –	1 0 0 0 1 –
1 0 1 1 0	1 1 1 1 1	1 1 1	1 1 1	1 1 1 1

514 Eseguire le seguenti sottrazioni in base 5

3 4 2 4 0 1 –	2 0 2 4 0 1 –	2 3 4 1 –	3 4 4 4 –	1 3 2 4 2 –
2 3 1 4 2	4 3 4	4 4 4	3 1 2 3	4 2 2 4

515 Eseguire le seguenti sottrazioni in base 3

2 1 0 2 0 1 –	2 0 2 1 0 1 –	2 2 1 1 –	1 2 0 1 –	2 1 0 0 1 –
		2 0 2	2 2 2	1 2 1 0 2

Moltiplicazione

Adoperiamo lo stesso algoritmo usato per moltiplicare due numeri decimali utilizzando la tabella della moltiplicazione.

Esempio

- $101011_2 \times 101_2$

Dobbiamo tradurre in base due quello che facciamo in base dieci. Abbiamo perciò bisogno di costruire la tavola della moltiplicazione in base due.

×	0	1
0	0	0
1	0	1

$$\begin{array}{rrrrrrrrr}
 & & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & \times \\
 & & & & & 1 & 0 & 1 & \\
\hline
 & & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & - & \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & - & & \\
\hline
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 &
\end{array}$$

Verifica nel sistema decimale:
$(101011_2 = 43) \times (101_2 = 5) = (11010111_2 = 215)$

Esempio

$231_5 \times 24_5$

×	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	11	13
3	0	3	11	14	22
4	0	4	13	22	31

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & & 2 & 3 & 1 & \times \\
 & & & 2 & 4 & \\
\hline
 & 2 & 0 & 2 & 4 & \\
1 & 0 & 1 & 2 & - & \\
\hline
1 & 2 & 1 & 4 & 4 &
\end{array}$$

Verifica nel sistema decimale $(231_5 = 66) \times (24_5 = 14) = (12144_5 = 924)$

516 Moltiplica in base 2: $111101_2 \times 10110_2$; $101101_2 \times 11111_2$; $1011_2 \times 111_2$

517 Moltiplica in base 5: $2401_5 \times 42_5$; $431_5 \times 34_5$; $431_5 \times 34_5$

518 Moltiplica in base 3: $10201_3 \times 212_3$; $2101_3 \times 212_3$; $1211_3 \times 22_3$

Divisione

Anche per la divisione il procedimento è del tutto analogo a quello usato nel sistema decimale, la tavola da utilizzare è quella della moltiplicazione.

Esempio

- $11101_2 : 101_2$

Dobbiamo tradurre in base due quello che facciamo in base dieci.

La cifra di ordine più alto si ottiene dalla divisione di 111 con 101. Il quoziente è 1, il resto si ottiene dalla differenza tra il dividendo e il prodotto del quoziente per il divisore. In questo caso il resto è 10.
Si abbassa lo 0 e otteniamo 100. Si ha $100 : 111 = 0$. La seconda cifra del divisore è 0.
La moltiplicazione di 0 per il divisore dà 0. Il nuovo resto è 100 a cui aggiungiamo l'ultima cifra del dividendo.
Otteniamo 1001 che viene divisa 101. Il quoziente termina con 1 con il resto uguale a 100.

1	1	1	0	1		1 0 1
−1	0	1				1 0 1
	1	0	0			
	0	0	0			
	1	0	0	1		
		−1	0	1		
		1	0	0		

Verifica nel sistema decimale:
$(11101_2 = 29) : (101_2 = 5) = (\mathit{Quoziente} : 101_2 = 5\,;\ \mathit{Resto} : 110 = 4)$

Eseguiamo la prova della divisione direttamente in base 2:
$\mathit{dividendo} = \mathit{quoziente} \times \mathit{divisore} + \mathit{resto}$

Il quoziente moltiplicato il divisore è uguale a 11001.
Se a questo risultato aggiungiamo il resto 100 otteniamo il dividendo 11101.

		1	0	1	×
		1	0	1	
		1	0	1	
	0	0	0	—	
1	0	1	—		
1	1	0	0	1	

1	1	0	0	1	+
		1	0	0	
1	1	1	0	1	

Esempio

- $3402_5 : 42_5$

Dobbiamo tradurre in base due quello che facciamo in base dieci.

Il 42 nel 34 non ci sta. Prendiamo allora tre cifre 340. Il 4 nel 34 ci sta 4 volte. 4 è la cifra di ordine più alto del quoziente. Dobbiamo trovare il resto. Il resto si ottiene sottraendo il risultato della moltiplicazione tra 4 e 42 che è 323. Il resto è uguale 12.
Si abbassa il 2 e otteniamo 122. Il 4 nel 12 in base 5 ci sta una sola volta, infatti $4 \times 2 = 13$. La seconda cifra del divisore è 1.
La moltiplicazione di 1 per il divisore dà 42. Sottraendo 42 da 122 si ottiene 30. Dato che 30 è minore di 42 la divisione intera è terminata.

3	4	0	2		4 2
3	2	3			4 1
	1	2	2		
		4	2		
		3	0		

Verifica: $(3402_5 = 477) : (42_5 = 22) = (\mathit{Quoziente} : 41_5 = 21\,;\ \mathit{Resto} : 30 = 15)$

519 Eseguire le seguenti divisioni in base 2

$11101 : 11$ $[Q = 11\,;\ R = 1]$

$1011101 : 100$ $[Q = 1011\,;\ R = 1]$

$100011 : 10$ $[Q = 10001\,;\ R = 0]$

520 Eseguire le seguenti divisioni in base 5

$2304 : 43$ $[Q = 24\,;\ R = 12]$

$3310 : 24$ $[Q = 112\,;\ R = 12]$

$2012 : 31$ $[Q = 31\,;\ R = 1]$

MATEMATICA C3 - ALGEBRA 1

2. INSIEMI



Stonehenge photo by: radical.librarian
http://www.flickr.com/photos/radical_librarian/3564677324

Indice

►1. Generalità sugli insiemi

Insiemi ed elementi

In matematica usiamo la parola **insieme** per indicare un raggruppamento, una collezione, una raccolta di oggetti, individui, simboli, numeri, figure… che sono detti **elementi** dell'insieme e che sono ben definiti e distinti tra di loro.
La nozione di insieme e quella di elemento di un insieme in matematica sono considerate nozioni primitive, nozioni che si preferisce non definire mediante altre più semplici.

Esempi

Sono insiemi:
1. l'insieme delle lettere della parola RUOTA;
2. l'insieme delle canzoni che ho ascoltato la settimana scorsa;
3. l'insieme delle città della Puglia con più di 15000 abitanti;
4. l'insieme delle lettere dell'alfabeto italiano;
5. l'insieme dei numeri 1, 2, 3, 4, 5;
6. l'insieme delle montagne d'Italia più alte di 1000 metri.

Per poter assegnare un insieme occorre soddisfare le seguenti condizioni:
- bisogna poter stabilire con certezza e oggettività se un oggetto è o non è un elemento dell'insieme;
- gli elementi di uno stesso insieme devono essere differenti tra loro, cioè un elemento non può essere ripetuto nello stesso insieme.

Non possono essere considerati insiemi:
1. i film interessanti (non c'è un criterio oggettivo per stabilire se un film è interessante oppure no, uno stesso film può risultare interessante per alcune persone e non interessante per altre);
2. le ragazze simpatiche di una classe (non possiamo stabilire in maniera oggettiva se una ragazza è simpatica);
3. le montagne più alte d'Italia (non possiamo dire se una montagna è tra le più alte poiché non è fissata un'altezza limite);
4. l'insieme delle grandi città d'Europa (non c'è un criterio per stabilire se una città è grande);

1 Barra con una crocetta i raggruppamenti che ritieni siano degli insiemi:

[A]	I fiumi più lunghi d'Italia;	[F]	gli animali con 2 zampe;
[B]	Le persone con più di 30 anni;	[G]	le vocali dell'alfabeto italiano;
[C]	i numeri 1, 20, 39, 43, 52;	[H]	i professori bravi;
[D]	i libri più pesanti nella tua cartella;	[I]	i gatti con due code;
[E]	i punti di una retta;	[J]	i calciatori che hanno fatto pochi gol.

In generale:
- Gli insiemi si indicano con lettere maiuscole *A, B, C*, …;
- Gli elementi con lettere minuscole *a, b, c*, …;
- Se un elemento *a* sta nell'insieme *A* si scrive $a \in A$, si legge "a appartiene ad A";

Il simbolo $\in$ si chiama simbolo di **appartenenza**.
- Se un elemento b non sta nell'insieme A si dice che esso non appartiene all'insieme, si scrive $b \notin A$, si legge "b non appartiene ad A". Il simbolo $\notin$ si chiama simbolo di **non appartenenza**.

Il criterio che stabilisce se un elemento appartiene a un insieme si chiama **proprietà caratteristica**.
Gli elementi di un insieme si elencano separati dalla virgola e racchiusi tra parentesi graffe.

$$A=\{a, b, c, d\}$$

Alcuni simboli sono utilizzati per indicare alcuni insiemi specifici:
- $\mathbb{N}$ si utilizza per indicare l'insieme dei numeri naturali: $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,...\}$;
- $\mathbb{Z}$ si utilizza per indicare i numeri interi relativi: $\mathbb{Z}=\{...,-3,-2,-1,0,+1,+2,+3,...\}$
- $\mathbb{Q}$ si utilizza per indicare i numeri razionali: $\mathbb{Q}=\left\{\frac{1}{2}, -\frac{3}{5}, \frac{5}{1}, -\frac{4}{17}, 12{,}34, 0{,}\overline{25}...\right\}$

Esempi

Indica con il simbolo opportuno quali dei seguenti elementi appartengono o non appartengono all'insieme A dei giorni della settimana: lunedì, martedì, gennaio, giovedì, dicembre, estate.

Gennaio e dicembre sono mesi dell'anno, perciò scriviamo:

$lunedì \in A$ $\quad$ $martedì \in A$ $\quad$ $gennaio \notin A$
$giovedì \in A$ $\quad$ $dicembre \notin A$ $\quad$ $esate \notin A$

Consideriamo l'insieme $A=\{r, s, t\}$ e l'insieme B delle consonanti della parola "risate". Possiamo osservare che A e B sono due insiemi costituiti dagli stessi elementi; diremo che sono **insiemi uguali**.

DEFINIZIONE. Due insiemi A e B si dicono **uguali** se sono formati dagli stessi elementi, anche se disposti in ordine diverso: in simboli $A=B$. Due insiemi A e B si dicono **diversi** se non contengono gli stessi elementi: in simboli $A \neq B$.

2 Per ciascuno dei seguenti casi inserisci il simbolo adatto fra $\in, \notin$, A è l'insieme delle lettere dell'alfabeto italiano:

b … A   i … A   j … A   e … A   w … A   z … A

3 Le vocali delle parole che seguono formano insiemi uguali, tranne in un caso. Quale?

[A] sito   [B] micio   [C] zitto   [D] fiocco   [E] lecito   [F] dito

4 Individua tra i seguenti insiemi quelli che sono uguali

[A] vocali della parola SASSO   [C] consonanti della parola SASSO
[B] vocali della parola PIETRA   [D] vocali della parola PASSO

5 Quali delle seguenti frasi rappresentano criteri oggettivi per individuare un insieme? Spiega perché.

a) Le città che distano meno di 100 Km da Lecce.	V	F
b) I laghi d'Italia.	V	F
c) Le città vicine a Roma.	V	F
d) I calciatori della Juventus.	V	F
e) I libri di Mauro.	V	F
f) I professori bassi della tua scuola.	V	F
g) I tuoi compagni di scuola il cui nome inizia per M.	V	F
h) I tuoi compagni di classe che sono gentili.	V	F
i) Gli zaini neri della tua classe.	V	F

6 Scrivi al posto dei puntini il simbolo mancante tra $\in$ e $\notin$:

a)La Polo …... all'insieme delle automobili Fiat.
b)Il cane …... all'insieme degli animali domestici.
c)La Puglia …... all'insieme delle regioni italiane.
d)Firenze …... all'insieme delle città francesi.
e)Il numero 10 …... all'insieme dei numeri naturali.
f)Il numero 3 …... all'insieme dei numeri pari.

7 Quali delle seguenti proprietà sono caratteristiche per un insieme?

a) Essere città italiana il cui nome inizia per W	V	F
b) Essere un bravo cantante	V	F
c) Essere un monte delle Alpi	V	F
d) Essere un ragazzo felice	V	F
e) Essere un numero naturale grande	V	F
f) Essere un ragazzo nato nel 1985	V	F
g) Essere gli alunni della classe 1ª C	V	F
h) Essere le lettere dell'alfabeto inglese	V	F
i) Essere le rette del piano	V	F
j) Essere i libri interessanti della biblioteca	V	F
k) Essere gli italiani viventi nati nel 1850	V	F
l) Essere gli italiani colti	V	F

8 Scrivi al posto dei puntini il simbolo mancante tra = e ≠

a)L'insieme delle lettere della parola "CANE" e della parola "PANE" sono	…...
b)L'insieme delle vocali della parola "INSIEME" e della parola "MIELE" sono	…...
c)L'insieme delle consonanti della parola "LETTO" e della parola "TETTO" sono	…...
d)L'insieme delle lettere della parola "CONTRO" e della parola "TRONCO" sono	…...
e)L'insieme delle vocali della parola "LIBRO" e della parola "MINISTRO" sono	…...
f)L'insieme delle vocali della parola "DIARIO" e della parola "RAMO" sono	…...
g)L'insieme delle lettere della parola "MOUSE" e della parola "MUSEO" sono	…...
h)L'insieme delle consonanti della parola "SEDIA" e della parola "ADESSO" sono	…...
i)L'insieme dei numeri pari minori di 5 e l'insieme vuoto sono	…...
j)L'insieme dei numeri pari e l'insieme dei multipli di 2 sono	…...

9 Le stelle dell'universo formano un insieme, le stelle visibili a occhio nudo formano un insieme? Spiega il tuo punto di vista.

►2. Insieme vuoto, insieme universo, cardinalità

Consideriamo l'insieme A = {consonanti della parola "AIA"}.
Poiché la parola "AIA" non contiene consonanti, l'insieme A è privo di elementi.
Un insieme privo di elementi si chiama **insieme vuoto**, lo si indica con il simbolo $\emptyset$ o { }.

Osservazione. $\{\}=\emptyset$ ma $\{\emptyset\}\neq\emptyset$ dato che $\{\emptyset\}$ rappresenta un insieme che ha come unico elemento l'insieme vuoto.

Esempi

- L'insieme dei numeri negativi maggiori di 5 è vuoto.
- L'insieme delle capitali europee con meno di 50 abitanti è vuoto.
- L'insieme dei numeri naturali minori di 0 è vuoto.

La frase "l'insieme degli studenti che vengono a scuola con il motorino" non definisce un insieme particolare. Occorre definire il contesto, l'ambiente che fa individuare gli elementi dell'insieme. Se l'ambiente è la classe 1C gli elementi saranno certamente diversi, probabilmente meno numerosi, di quelli che compongono l'ambiente di un'intera scuola o di un'intera città. Quando si identifica un insieme, occorre indicare anche l'ambiente di riferimento da cui trarre gli elementi che appartengono al nostro insieme. Questo insieme si chiama **Insieme Universo** e rappresenta il contesto, l'ambiente su cui faremo le nostre osservazioni. In generale un insieme universo per un insieme A è semplicemente un insieme che contiene A. Solitamente si indica con U l'insieme universo.

Cardinalità

Si definisce cardinalità (o potenza) di un insieme finito il numero degli elementi dell'insieme. Viene indicata con uno dei seguenti simboli |A|, #(A) o *card*(A).
Per poter parlare di cardinalità di un insieme qualsiasi, che comprenda anche insiemi infiniti come gli insiemi numerici, occorre una definizione più complessa che qui non daremo.

Esempi

- L'insieme A delle vocali dell'alfabeto italiano ha 5 elementi, quindi *card*(A)=5.
- L'insieme B dei multipli di 3 minori di 10 ha 3 elementi, quindi *card*(B)=3.

10 Indica se gli insiemi G ={gatti con 6 zampe} e P = {polli con 2 zampe} sono o non sono vuoti.

11 Barra con una croce gli insiemi vuoti

[A] L'insieme dei numeri positivi minori di 0.
[B] L'insieme dei numeri negativi minori di 100.
[C] L'insieme dei numeri pari minori di 100.
[D] L'insieme delle capitali europee della regione Lombardia.
[E] L'insieme dei triangoli con quattro angoli.
[F] L'insieme delle capitali italiane del Lazio.
[G] L'insieme dei punti di intersezione di due rette parallele.

12 Quali delle seguenti scritture sono corrette per indicare l'insieme vuoto?

[A] $\emptyset$ [B] 0 [C] $\{\emptyset\}$ [D] $\{0\}$ [E] {}

13 Quali dei seguenti insiemi sono vuoti? Per gli insiemi non vuoti indica la cardinalità.

a)L'insieme degli uccelli con 6 ali
b)L'insieme delle lettere della parola "VOLPE"
c)L'insieme dei cani con 5 zampe
d)L'insieme delle vocali della parola "COCCODRILLO"
e)L'insieme delle vocali dell'alfabeto italiano
f)L'insieme degli abitanti della luna
g)L'insieme dei numeri sulla tastiera del telefonino

14 Scrivi per ciascun insieme un possibile insieme universo

a) L'insieme dei rettangoli
b) L'insieme dei multipli di 3
c) L'insieme delle lettere della parola "MATEMATICA"
d) L'insieme dei libri di matematica
e) L'insieme dei ragazzi che hanno avuto una insufficienza in matematica

15 Dato l'insieme A = {0, 3, 5} determina se le seguenti affermazioni sono vere o false

a) $0\in A$
b) $\{5\}\in A$
c) $\emptyset\in A$
d) $\{\emptyset\}\in A$
e) $A\in A$
f) $\{3,5\}\in A$

►3. Rappresentazione degli insiemi

Esistono diversi modi per rappresentare un insieme e quindi per indicare con precisione i suoi elementi.

Rappresentazione tabulare

La rappresentazione tabulare è la descrizione più elementare di un insieme; consiste nell'elencare tutti gli elementi dell'insieme separati da virgole e racchiusi tra le parentesi graffe.
Per esempio, definiamo un insieme X con la scrittura: X={1, 2, 3, 5}
Non è importante l'ordine in cui vengono scritti gli elementi, cioè: X={1, 2, 3, 5}={2, 1, 5, 3}
É invece necessario che gli elementi dell'insieme compaiano ciascuno una sola volta. Ad esempio per rappresentare l'insieme Y delle lettere della parola autunno, scriviamo Y = {a, u, t, n, o}.
Si può utilizzare questa rappresentazione anche per insiemi numerosi e addirittura infiniti. In questi casi si elencano i primi elementi dell'insieme e in fondo all'elenco si mettono tre punti di sospensione lasciando intendere come continuare la serie.
Per esempio, l'insieme dei multipli di 3 si può indicare con la seguente rappresentazione tabulare

X={0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, ...}

Esempi

- L'insieme G dei primi 3 giorni della settimana si indica: G={lunedì, martedì,mercoledì}
- L'insieme A delle lettere della parola "Associazione" si indica: A={a, s, o, c, i, z, n, e}

Rappresentazione per proprietà caratteristica

Per quegli insiemi i cui elementi soddisfano una certa proprietà che li caratterizza, possiamo usare proprio questa proprietà per descrivere più sinteticamente un insieme.
Per esempio, l'insieme Y dei divisori di 10 può essere definito come: *Y={x / x è un divisore di 10}*
Si legge "Y è l' insieme degli elementi x tali che x è un divisore di 10".
In questa scrittura si mette in evidenza la caratteristica degli elementi dell'insieme.
La rappresentazione tabulare dello stesso insieme è Y={1, 2, 5, 10} .
La rappresentazione per caratteristica dell'insieme X dei naturali minori di 15 è: $X=\{x\in\mathbb{N}/x<15\}$
Si legge "X è l' insieme dei numeri naturali x tali che x è minore di 15".
L'insieme che viene indicato nella prima parte della rappresentazione (nell'ultimo esempio è l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$) è l'**insieme universo** definito precedentemente.
Questo metodo è particolarmente utile quando l'insieme da rappresentare contiene molti elementi.

Esempi

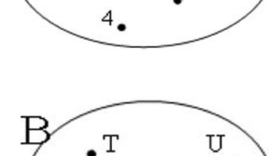
- L'insieme *A* delle rette incidenti a una retta t assegnata si può rappresentare come:
  A={*r* / *r* è una retta incidente a *t*}
- L'insieme *B* dei numeri naturali maggiori di 100 può essere rappresentato come:
  $B=\{n\in\mathbb{N}/n>100\}$
- L'insieme *P* dei numeri pari può essere rappresentato come:
  $P=\{n\in\mathbb{N}/n=2\cdot m \quad \text{con} \quad m\in\mathbb{N}\}$
- L'insieme *C* dei numeri interi relativi compresi tra -10 e +100, estremi inclusi:
  $C=\{n\in\mathbb{Z}/-10\leqslant n\leqslant 100\}$

Rappresentazione grafica (Diagramma di Venn)

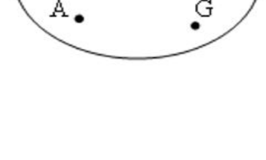
In questa rappresentazione grafica, detta anche **rappresentazione di Eulero-Venn**, in onore dei matematici Leonhard Euler (1707–1783) e John Venn (1834–1923), si disegna una linea chiusa all'interno della quale gli elementi dell'insieme si indicano con dei punti. Solitamente si scrive all'esterno il nome dell'insieme e vicino ai punti i nomi degli elementi.

Esempi

- A è l'insieme dei numeri naturali minori di 6, A={0, 1, 2, 3, 4, 5}



- B è l'insieme delle lettere della parola "TARTARUGA", A={t, a, r, u, g}



Un insieme può essere rappresentato con una qualsiasi delle rappresentazioni indicate. Se un insieme è infinito o è costituito da un numero elevato di elementi la rappresentazione più pratica è quella per caratteristica.

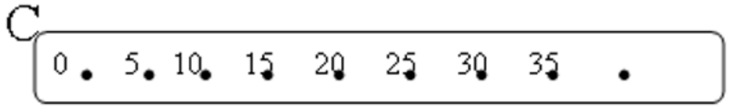
Esempio

Vediamo come è possibile rappresentare l'insieme C dei multipli di 5:

Per caratteristica: $C=\{n\in\mathbb{N}/ n \text{ è multiplo di } 5\}$ oppure $C=\{n\in\mathbb{N}/n=5\cdot m, m\in\mathbb{N}\}$

tabulare: C={0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, …}. I puntini di sospensione indicano che l'elenco continua.

Rappresentazione con diagramma di Eulero-Venn:



16 Dai una rappresentazione tabulare dell'insieme A dei numeri naturali minori di 6.

17 Dai una rappresentazione tabulare dei seguenti insiemi

a) delle vocali della parola "ESERCIZI"
b) delle lettere della parola "RIFLETTERE"
c) dei numeri naturali compresi tra 6 e 12, estremi esclusi
d) dei numeri dispari compresi tra 10 e 20
e) delle lettere dell'alfabeto italiano
f) dei numeri naturali minori di 10
g) dei multipli di 7
h) delle preposizioni con più di due lettere

18 Indica in rappresentazione tabulare i seguenti insiemi.

a) $A=\{x\in\mathbb{N}/\ x<10\}$ … … … … … … … … … … …
b) $B=\{x\in\mathbb{N}/\ 2\le x<5\}$ … … … … … … … … … … …
c) $C=\{x\in\mathbb{N}/\ 5\le x\le 10\}$ … … … … … … … … … … …
d) $D=\{x\in\mathbb{N}/\ 2x\le 10\}$ … … … … … … … … … … …
e) $E=\{e\in\mathbb{N}/\ 5\le x<10\}$ … … … … … … … … … ...
f) $F=\{f\in\mathbb{N}/\ f \text{ è multiplo di } 3 \text{ e } f<15\}$ … … … … … … … … … ...
g) $G=\{g\in\mathbb{N}/\ g \text{ è una cifra del numero } 121231\}$ … … … … … … … … … … …
h) $H=\{h\in\mathbb{N}/\ h=3n+1, \text{ con } n\in\mathbb{N}\}$ … … … … … … … … … … …

19 Elenca per tabulazione gli elementi di $A=\{x \mid x\in N, x \text{ è pari}, x\le 10, x\ne 0\}$.

20 Elenca per tabulazione gli elementi di $L=\{l \text{ è una lettera della parola } MATEMATICA\}$.

21 Descrivi mediante la proprietà caratteristica l'insieme

D= {S, T, U, D, I, A, R, E} D={x/ x è … … … … … … … … … … … … … … ...}

22 Descrivi mediante la proprietà caratteristica l'insieme

X={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15} $X=\{x\in\mathbb{N}/x \ldots\ldots\}$

23 Descrivi mediante la proprietà caratteristica l'insieme dei numeri primi minori di 1000.

24 Elenca gli elementi dell'insieme $I=\{n\in\mathbb{N}/n \text{ è divisore di } 12\}$

25 Elenca gli elementi dell'insieme $I=\{n\in\mathbb{N}/n \text{ è multiplo di } 3 \text{ minore di } 20\}$

26 Dato l'insieme A={2, 4, 8, 16, 32, 64} quale delle seguenti proprietà caratterizzano i suoi elementi?

[A] $A=\{n\in\mathbb{N}/n \text{ è numero pari minore di } 65\}$
[B] $A=\{n\in\mathbb{N}/n \text{ è una potenza di } 2\}$
[C] $A=\{n\in\mathbb{N}/n \text{ è una potenza di } 2 \text{ minore di } 65\}$
[D] $A=\{n\in\mathbb{N}/n=2^m, \text{con } m=1,2,3,4,5,6\}$

27 Indica con una proprietà caratteristica l'insieme B={5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50}.

28 Indica con una proprietà caratteristica l'insieme B={4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81}.

29 Quale delle seguenti frasi individua la proprietà caratteristica di A={4, 8, 12, 16, 20, ...}

[A] I multipli di 2 [B] i numeri pari [C]i multipli di 4 [D] i divisori di 20

30 Rappresenta in forma caratteristica i seguenti insiemi

a) A={5, 6, 7, 8, 9, 10}
b) B={0, 1, 2, 3, 4, 5, …, 98, 99, 100}
c) C={3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30}

31 Quale delle seguenti è una rappresentazione per caratteristica dell'insieme D = {3, 6, 9, 12, 15, 18}.

[A] $D=\{x\in\mathbb{N}/x\leqslant 18\}$ [B] $D=\{x\in\mathbb{N}/ x\ \grave{e}\ multiplo\ di\ 3\ e\ x<20\}$
[C] $D=\{x\in\mathbb{N}/x=3\text{x}\}$ [D] $D=\{x\in\mathbb{N}/x=3\}$

32 Rappresenta i seguenti insiemi con la proprietà caratteristica:

a) A={gennaio, maggio, giugno, luglio, agosto}
b) B={Gorizia, Pordenone, Trieste, Udine}
c) C={sabato, domenica}
d) D={10, 20, 30, 40, 50}
e) E={Puglia, Piemonte}

33 Individua una proprietà caratteristica dei seguenti insiemi numerici

a) $A=\{4,9,16,25,...\}$ b) $B=\left\{\frac{1}{4},\frac{1}{9},\frac{1}{16},\frac{1}{25},...\right\}$ c) $C=\left\{2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4},\frac{6}{5},...\right\}$

d) $D=\left\{\frac{1}{5},\frac{1}{10},\frac{1}{15},\frac{1}{20},...\right\}$ e) $E=\left\{\frac{1}{4},\frac{2}{9},\frac{3}{16},\frac{4}{25},\frac{5}{36},...\right\}$ f) F={+1, -2, +4, -8, +16, -32, +64, …}

34 Elenca gli elementi dei seguenti insiemi

a) $A=\{x\in\mathbb{Z}|-3\leq x<2\}$

b) $B=\{x\in\mathbb{N}|-4\leq x\leq 1\ \text{ o }\ 5<x\leq 7\}$

35 Rappresenta in forma caratteristica i seguenti insiemi

a) A={2, 4, 6, 8, 10} b) B={1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, …}
c) C={3, 4, 5, 6, 7} d) D={-5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5}
e) E={10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100} f) F={1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100}

36 Scrivi i primi dieci elementi dei seguenti insiemi

a) $A=\{x/x\in\mathbb{N}, x=2\text{n}\}$
b) $B=\{x/x\in\mathbb{N}, x=n^2\}$
c) $C=\{x/x\in\mathbb{N}, x=2\text{n}^2\}$
d) $D=\{x/x\in\mathbb{N}, x=2\text{n}+2\}$
e) $E=\{x/x\in\mathbb{N}, x=n^2-n\}$
f) $E=\{x/x\in\mathbb{Z}, x=\frac{n+1}{n-1}\}$

37 Rappresenta con un diagramma di Eulero-Venn l'insieme:

a) dei multipli di 3 compresi tra 10 e 30, estremi inclusi;
b) delle note musicali;
c) dei numeri primi minori di 20;
d) delle consonanti della parola MATEMATICA;
e) delle province della Toscana.

38 Rappresenta i seguenti insiemi con rappresentazione tabulare, caratteristica e grafica:

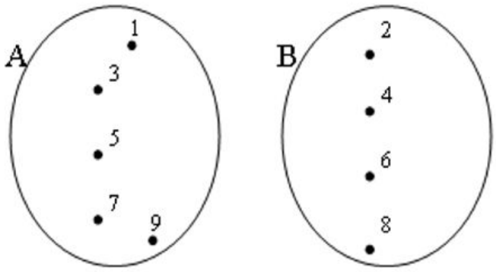
a) Insieme A dei divisori di 30.
b) Insieme B dei numeri pari minori o uguali a 10.
c) L'insieme C delle province della Puglia.
d) L'insieme D delle lettere della parola "COCCO".

39 Rappresenta nel modo che ritieni più opportuno gli insiemi i cui elementi sono:

a) I numeri naturali multipli di 5 compresi tra 10 e 10000.
b) I colori dell'arcobaleno.
c) I numeri razionali maggiori o uguali a 2/7.
d) I punti di una superficie S.
e) Le lettere di cui è composto il tuo nome.

40 Rappresenta con una modalità a tua scelta l'insieme dei numeri interi multipli di 5 maggiori di 10 e minori di 100 che non sono dispari.

41 In base agli insiemi A e B rappresentati dai diagrammi di Venn, stabilisci quali affermazioni sono vere:



a) $5 \notin B$ V F
b) $A = \emptyset$ V F
c) $3+2 \in A$ V F
d) $B \neq \emptyset$ V F
e) $6 \in B$ V F
f) $9 \notin A$ V F

42 Dati gli insiemi: X={8, 9, 10}, Y={0, 8, 9, 10}, H={10, 9, 8}

$W=\{w \in \mathbb{N} / \ 8 \leq w \leq 10\}$, $Z=\{z \in \mathbb{N} / \ 8 < z \leq 10\}$, $J=\{j \in \mathbb{N} / \ 7 < j < 11\}$

Individua le uguaglianze corrette

[A] X = Y [B] X = H [C] W = H
[D] X = Z [E] *card*(Z)=2 [F] X = J

43 Dati gli insiemi:

A={g, a, t, o} B={o, g, t, a} C={c/c è una lettera della parola "gatto"}
D={g, t} E={gatto} F={f / f è una consonante della parola "gatto"}

Segna con una crocetta le uguaglianze corrette:

[A] A = B [C] A = C [E] C = E [G] *card*(C)= 5 [I] *card*(E)=5
[B] A = D [D] E = A [F] D = F [H] D = E [L] C = D

44 Per ciascuno dei seguenti insiemi indica alcuni elementi.

a) $X=\{x \in \mathbb{N} / \ x-1 \text{ è pari}\}$ {… … … … … … … … … … … …}
b) $Y=\{y \in \mathbb{N} / \ y=3n, \ con \ n \in \mathbb{N}\}$ {… … … … … … … … … … … …}
c) $Z=\{z \in \mathbb{N} / \ z=3n \text{ e } z \text{ non è divisibile per } 2, n \in \mathbb{N}\}$ {… … … … … … … … … …}
d) $W=\{w \in \mathbb{N} / \ w<0\}$ {… … … … … … … … … … … …}

45 Quali delle seguenti scritture sono vere?

a) $5 \in \{10, 8, 6, 4, 2\}$ V F
b) $15 \in \{n \in \mathbb{N} / n \geqslant 10\}$ V F
c) $7 \in \{n \in \mathbb{N} / n+5<10\}$ V F
d) $l \notin \{x / x \text{ è una lettera della parola 'scuola'}\}$ V F

46 Quali dei seguenti insiemi sono uguali?

A={1+3, 5-2, 1+1, 9-8, 1-1} $B=\{n \in \mathbb{N} / n<5\}$ C={6-4, 6+4, 6-6}

47 Quali dei seguenti insiemi sono uguali?

[A] $A=\{x \in \mathbb{N} / \ 3 \leqslant x \leqslant 12\}$ [C] $A=\{x \in \mathbb{N} / \ 2 < x < 13\}$
[B] $B=\{x \in \mathbb{N} / x=3\text{n} \ \ con \ \ 1 \leqslant n \leqslant 4\}$ [D] $B=\{x \in \mathbb{N} / x=3^n \ \ con \ \ n=1,2,3,4\}$

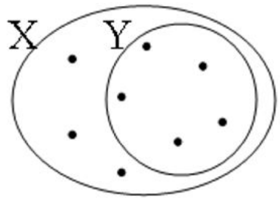
►4. Operazioni con gli insiemi

Sottoinsieme

Consideriamo l'insieme *A* degli abitanti di Milano e l'insieme *B* degli abitanti di Milano con età superiore ai 40 anni. Gli abitanti ultra quarantenni di Milano fanno parte della popolazione di Milano, cioè tutti gli elementi dell'insieme *B* sono anche elementi di *A*: si dice che *B* è sottoinsieme di *A*, si scrive $B\subseteq A$.
Nel caso in cui tutti gli elementi di *Y* siano elementi di *X* e tutti gli elementi di *X* siano elementi di *Y* si ha che *X*=*Y*, e *Y* si dice **sottoinsieme improprio** di *X:* se $X\subseteq Y$ *e* $Y\subseteq X$ allora $Y=X$.
Tra i sottoinsiemi di un insieme si considera anche l'insieme vuoto $\emptyset$, cioè qualunque sia l'insieme X risulta che $\emptyset\subset X$. **L'insieme vuoto è considerato un sottoinsieme improprio di qualunque insieme**.
Ogni insieme è sottoinsieme improprio di se stesso.
Se *Y* è un sottoinsieme di *X* e *X* ha altri elementi oltre a quelli di *Y* si dice che *Y* è un **sottoinsieme proprio** di *X* e si scrive $Y\subset X$. La scrittura $A\subseteq B$ si usa quando non si sa in modo certo se $A=B$ o $A\subset B$

DEFINIZIONE. Dati due insiemi *X* e *Y*, si dice che *Y* è un **sottoinsieme** di *X* se ogni elemento di *Y* è anche elemento di *X*.
In simboli: $Y\subseteq X$, che si legge *"Y è incluso in X" o "Y è sottoinsieme di X".*

La rappresentazione con un diagramma di Eulero-Venn è la seguente:



Se *a* è un elemento del sottoinsieme *Y*, allora lo sarà anche dell'insieme *X*:

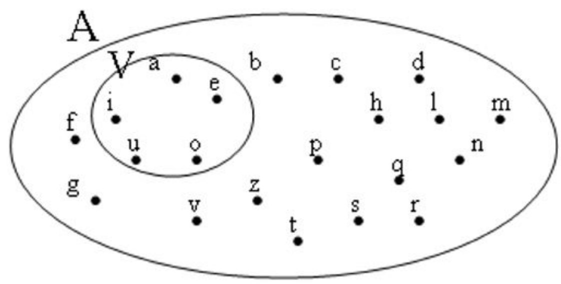
se $a\in Y$ e $Y\subseteq X$ allora $a\in X$.

Dalla stessa definizione, si deduce che ogni insieme è sottoinsieme di se stesso, in simboli $X\subseteq X$.
Tra i sottoinsiemi di un insieme si considera anche l'insieme vuoto. Cioè, qualunque sia l'insieme *X* risulta

$\emptyset\subseteq X$.

Esempi

- Consideriamo l'insieme *X* = {lettere della parola "autunno"} e l'insieme *Y* = {lettere della parola "notaio"}; possiamo affermare che "ogni" elemento di *Y* è anche elemento di *X*? La risposta è negativa: $i\in Y$ ma $i\notin X$ quindi *Y* non è sottoinsieme di *X* e si scrive $Y\not\subset X$
- Sia *A* l'insieme delle lettere dell'alfabeto italiano e *V* l'insieme delle vocali, allora si può scrivere $V\subset A$; cioè V è un sottoinsieme proprio di *A*, come si può anche vedere dalla rappresentazione grafica.



- Sia $C=\{1\}$, allora *C* non ha sottoinsiemi propri; mentre i suoi sottoinsiemi impropri sono $C=\{1\}$ e l'insieme vuoto $\emptyset$.
- Sia *A* l'insieme delle auto esposte in un autosalone e *U* l'insieme delle auto usate esposte nello stesso autosalone. Si ha che *U* è un sottoinsieme di *A*, ma senza avere ulteriori informazioni non possiamo escludere che tutte le auto esposte siano usate, dobbiamo perciò scrivere $U\subseteq A$. Se invece sappiamo che nessuna auto esposta è usata, allora $U=\emptyset$.

48 Siano T={t / t è un triangolo}, R={r / r è un rettangolo}, E={e / e è un triangolo equilatero}.
Quale affermazione è vera?

[A] $R\subset T$ [B] $E\subset T$ [C] $E\subset R$ [D] $T\subset E$

Insieme delle parti

Consideriamo l'insieme *A* dei numeri naturali compresi tra 0 e 100, a partire da questo insieme possiamo formare gruppi costituiti dai soli numeri multipli di 10, dai numeri pari, da quelli dispari, da quelli divisibili per 7 e così via. Quindi con gli elementi dell'insieme *A* possiamo formare molti altri insiemi che sono sottoinsiemi di *A*.

Esempi

Determinare tutti i sottoinsiemi di A={1,2,3}.

$\emptyset \subset A$, infatti l'insieme vuoto è un sottoinsieme di qualunque insieme.

Elenchiamo tutti i sottoinsiemi costituiti da un solo elemento: {1}, {2}, {3}.

Elenchiamo ora tutti i sottoinsiemi costituiti da due elementi: {1,2}, {1,3}, {2,3}.

L'unico sottoinsieme costituito da tre elementi è A stesso, possiamo scrivere: $\{1,2,3\} \subseteq A$

> DEFINIZIONE. Dato un insieme *A*, si chiama **insieme delle parti** l'insieme che ha come elementi tutti i sottoinsiemi propri ed impropri di *A*. In simboli: $\wp(A)$.

L'insieme delle parti di un insieme A ha sempre come elementi $\emptyset$ e *A,* quindi $\emptyset \in \wp(A)$ e $A \in \wp(A)$.

Il numero degli elementi di $\wp(A)$, cioè dei suoi possibili sottoinsiemi, propri e impropri, dipende dal numero degli elementi di *A*.

Esempi

- L'insieme vuoto ha come unico sottoinsieme se stesso quindi $\wp(\emptyset)=\{\emptyset\}$
- Dato l'insieme $A=\{a\}$ i suoi possibili sottoinsiemi propri ed impropri sono: $S_1=\emptyset$, $S_2=\{a\}$ allora $\wp(A)=\{S_1, S_2\}$
- Dato l'insieme $B=\{matita, penna\}$ i suoi possibili sottoinsiemi propri ed impropri sono: $S_1=\emptyset$, $S_2=B=\{matita, penna\}$, $S_3=\{matita\}$, $S_4=\{penna\}$ allora $\wp(A)=\{S_1, S_2, S_3, S_4\}$
- *Dato l'insieme* $B=\{1,2,3\}$ *, i suoi possibili sottoinsiemi propri ed impropri sono:* $S_1=\emptyset$, $S_2=B=\{1,2,3\}$, $S_3=\{1\}$, $S_4=\{2\}$, $S_5=\{3\}$, $S_6=\{1,2\}$, $S_7=\{1,3\}$, $S_8=\{2,3\}$
- *allora* $\wp(A)=\{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8\}$

Riassumendo:
se $A=\emptyset$ l'insieme delle parti ha 1 solo elemento;
se A ha 1 elemento allora l'insieme delle parti ha 2 elementi;
se A ha 2 elementi, l'insieme delle parti ne ha 4;
se A ha 3 elementi, l'insieme delle parti ne ha 8;
Generalizzando, se A ha n elementi, l'insieme della parti ne ha 2^n.

49 Se $A=\{x \in \mathbb{N} | 1 \le x < 3\}$ allora $\wp(A)$ ha:
[A] 2 elementi [B] 3 elementi [C] 4 elementi [D] 8 elementi

50 Considera l'insieme $B=\{x \in \mathbb{N} | 1 < x < 5\}$ e $\wp(B)$ quali delle seguenti affermazioni sono vere o false?

$\{1\} \in \wp(B)$	[V] [F]	$0 \in \emptyset$	[V] [F]
$\emptyset \subset \wp(B)$	[V] [F]	$\emptyset \subseteq B$	[V] [F]
$\{2,5\} \in \wp(B)$	[V] [F]	$\{1,2,3\} \in \wp(B)$	[V] [F]
$\{\emptyset\} \in \wp(B)$	[V] [F]	$\{1,2,3\} \notin \wp(B)$	[V] [F]

51 Scrivi l'insieme che ha come insieme delle parti $\{\emptyset, \{8,10\}, \{8\}, \{10\}\}$.

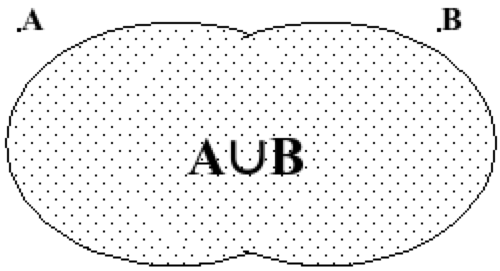
52 Dato $H=\{h | \text{h è una lettera della parola MAMMA}\}$ scrivi tutti gli elementi di $\wp(H)$.

53 Dato $A=\{x \in \mathbb{N} \mid n<5 \text{ e } n \text{ divisore di } 12\}$ scrivi tutti gli elementi di $\wp(A)$.

Insieme unione

Prendiamo l'insieme *P* dei numeri pari e l'insieme *D* dei numeri dispari; allora l'insieme *N* dei numeri naturali è dato dall'unione dei due insiemi *P* e *D*.

DEFINIZIONE. Dati due insiemi *A* e B, si dice **insieme unione** l'insieme *C*, composto da tutti gli elementi appartenenti ad *A* o a *B* o a entrambi. In simboli: $C=A\cup B$, si legge *"A unito a* B*" o "A unione B".*



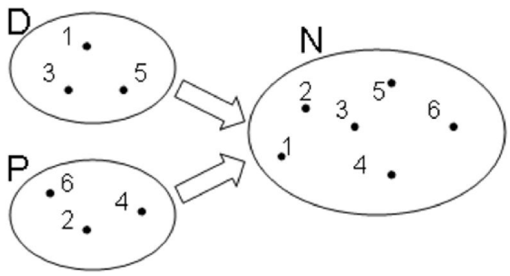
Mediante proprietà caratteristica si scrive:
$C=A\cup B=\{x|(x\in A) o (x\in B)\}$

Proprietà dell'unione tra insiemi

1. $A\cup B=B\cup A$ proprietà **commutativa** dell'unione
2. $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$ proprietà **associativa** dell'unione
3. $Se\ B\subset A\ \ allora\ \ A\cup B=A$
4. $A\cup\emptyset=A$
5. $A\cup A=A$ proprietà di **idempotenza** dell'unione

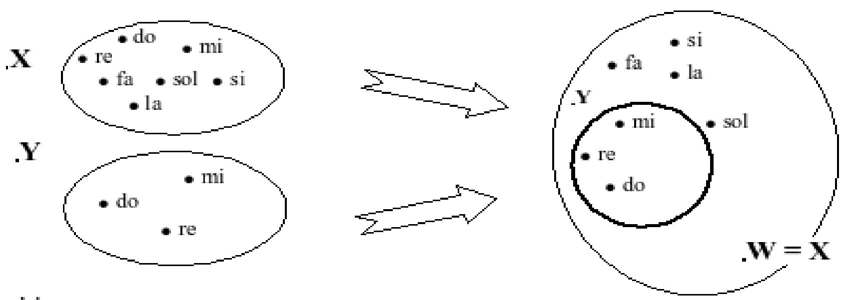
Esempi

Siano $D=\{1,3,5\}$ e $P=\{2,4,6\}$ allora $N=P\cup D=\{1,2,3,4,5,6\}$



Esempi

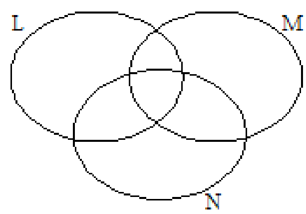
Siano $X=\{do, re, mi, fa, sol, la, si\}$ e $Y=\{do, re, mi\}$ allora poiché $Y\subset X$
$W=X\cup Y=X=\{do, re, mi, fa, sol, la, si\}$



54 Dati $A=\{1,2,4,5\}$ $e\ B=\{1,3,4,5,8\}$ determina la loro unione dopo aver rappresentato gli insiemi mediante diagrammi di Eulero-Venn.

55 Dati gli insiemi *C* delle lettere della parola "GIARDINO" e D delle lettere della parola "ORA" determina la loro unione aiutandoti con la rappresentazione grafica.

56 Dati gli insiemi $L=\{1,2,5,6,7,8\}$, $M=\{4,5,6,7,10\}$, $N=\{2,3,5,7,9,10\}$ determina l'insieme unione completando prima la rappresentazione grafica poi quella tabulare.



Insieme intersezione

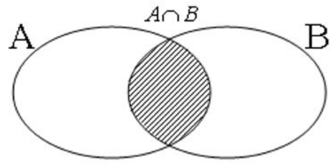
Esempi

Se A è l'insieme delle lettere della parola "matematica" e B è l'insieme delle lettere della parola "materia". Quali elementi di A stanno in B? Quali elementi di B stanno in A? Quali sono gli elementi che stanno in entrambi gli insiemi?

L'insieme degli elementi di *A* che stanno in *B* è {m, a, t, e, i}.
L'insieme degli elementi di B che stanno in A è {m, a, t, e, i}.
L'insieme degli elementi che stanno sia in A sia in B è {m, a, t, e, i}.

DEFINIZIONE. Dati due insiemi *A* e *B*, si dice insieme **intersezione** di A e B l'insieme *C*, composto da tutti gli elementi appartenenti contemporaneamente ad *A* e a *B*, ossia comuni a entrambi.
In simboli: $C=A\cap B$ che si legge *"A intersecato a B" o "A intersezione B"*.

Mediante proprietà caratteristica si scrive: $C=A\cap B=\{x|(x\in A)e(x\in B)\}$



Se $A\cap B=\emptyset$, ossia se *A* e *B* non hanno elementi in comune, i due insiemi si dicono **disgiunti**.

Proprietà dell'intersezione tra insiemi

1. $A\cap B=B\cap A$ proprietà **commutativa** dell'intersezione
2. $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$ proprietà **associativa** dell'intersezione
3. $Se\ B\subset A\ allora\ A\cap B=B$
4. $A\cap\emptyset=\emptyset$
5. $A\cap A=A$ proprietà di **idempotenza** dell'intersezione
6. $\emptyset\cap\emptyset=\emptyset$

Proprietà distributiva dell'intersezione rispetto all'unione e viceversa

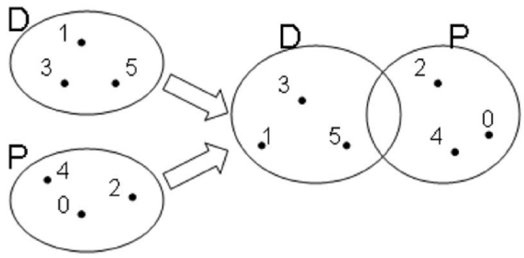
1. $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ proprietà **distributiva** dell'intersezione rispetto l'unione
2. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ proprietà **distributiva** dell'unione rispetto l'intersezione

Esempi

Siano $X=\{do, re, mi, fa, sol, la, si\}$ e $Y=\{do, re, mi\}$ allora poiché $Y\subset X$ si ha:
$W=X\cap Y=Y=\{do, re, mi\}$

Esempi

Siano $D=\{1,3,5\}$ e $P=\{2,4,6\}$ allora $N=P\cap D=\emptyset$



57 Dati $A=\{1,2,4,5\}\ e\ B=\{1,3,4,5,8\}$ determina la loro intersezione dopo aver rappresentato gli insiemi mediante diagrammi di Eulero-Venn.

58 Dati gli insiemi *C* delle lettere della parola "LIBRO" e D delle lettere della parola "PASTA" determina la loro intersezione aiutandoti con la rappresentazione grafica.

59 Considerando i 3 insiemi $S=\{a,b,c,e,f,s,t\},\ T=\{a,c,g,h,l,s\}\ e\ U=\{b,c,d.g,s,t\}$, determina l'insieme intersezione dando sia la rappresentazione grafica sia quella tabulare.

60 Determina l'intersezione tra i seguenti insiemi

a) $A=\{-3,-2,-1,0,+1,+2,+3\}$ $B=\{-2,-1,0,+1,+2,+3,+4\}$ $A\cap B=...$
b) $A=\{x\in\mathbb{N}/2\le x\le 5\}$ $B=\{x\in\mathbb{N}/3<x<7\}$ $B\cap A=...$
c) $A=\{x\in\mathbb{Z}/-5\le x\le +5\}$ $B=\{x\in\mathbb{Z}/-15\le x<3\}$ $A\cap B=...$
d) $A=\{x\in\mathbb{N}/x>100\}$ $B=\{x\in\mathbb{N}/10<x<20\}$ $B\cap A=...$
e) $A=\{l\text{ lettera di SATURNO}\}$ $B=\{l\text{ lettera di NETTUNO}\}$ $A\cap B=...$

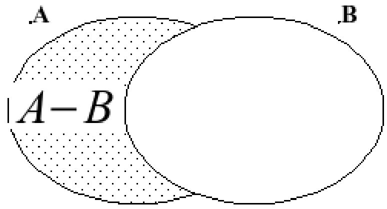
Insieme differenza

Consideriamo gli insiemi *A* e *B* formati rispettivamente dalle lettere dell'alfabeto italiano e dalle consonanti dell'alfabeto italiano cioè: $A=\{a,b,c,d,e,f,g,h,i,l,m,n,o,p,q,r,s,t,u,v,z\}$ e $B=\{b,c,d,f,g,h,l,m,n,p,q,r,s,t,v,z\}$, le lettere "a, e, i, o, u" che compaiono nell'insieme *A* ma non in *B* formano un nuovo insieme chiamato insieme **differenza.**

DEFINIZIONE. Dati due insiemi *A* e B, si dice insieme **differenza** l'insieme C, composto da tutti gli elementi di *A* che non appartengono a B. In simboli: $C=A-B$ che si legge *"A differenza B"*.

Mediante proprietà caratteristica si scrive:
$C=A-B=\{x|(x\in A)e(x\notin B)\}$

La rappresentazione mediante diagramma di Eulero-Venn dell'insieme differenza



Proprietà della differenza tra insiemi

1. **Se** $A\cap B=\emptyset$ **ossia sono disgiunti allora** $A-B=A$ e $B-A=B$
2. **Se** $B\subset A$ **ossia *B* è sottoinsieme proprio di *A* allora** $B-A=\emptyset$
3. $A-A=\emptyset$
4. $A-\emptyset=A$

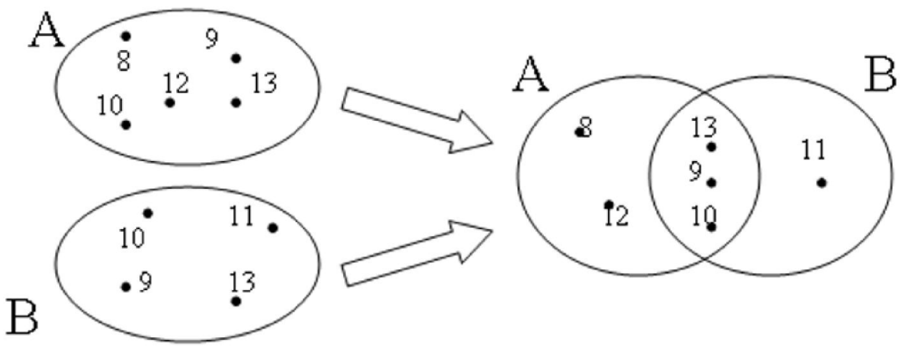
Esempi

Siano $A=\{8,9,10,12,13\}$ e $B=\{9,10,11,13\}$ allora $C=A-B=\{8,12\}$ e $D=B-A=\{11\}$

Poiché $A-B\neq B-A$ nella differenza non vale la proprietà commutativa.

Esempi

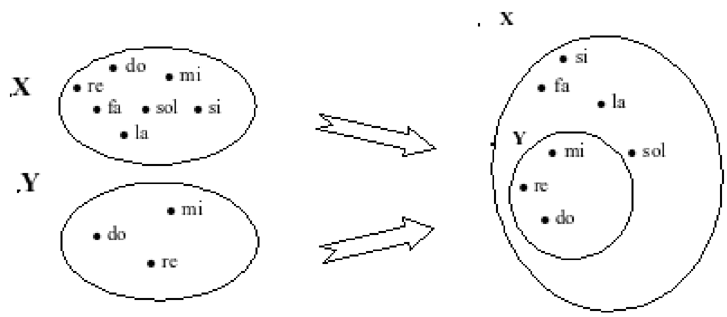
Siano $D=\{1,3,5\}$ e $P=\{0,2,4\}$ i due insiemi sono disgiunti $P\cap D=\emptyset$ allora



$D-P=\{1,3,5\}=D$
$P-D=\{0,2,4\}=P$

Esempi

Siano $X=\{do,re,mi,fa,sol,la,si\}$ e $Y=\{do,re,mi\}$ allora poiché $Y\subset X$
$W=X-Y=\{fa,sol,la,si\}$



61 Dati gli insiemi *E={x / x è una lettera della parola "cartellone"}*e *F={x / x è una lettera della parola "martello"}* determina *E-F* e *F-E*.

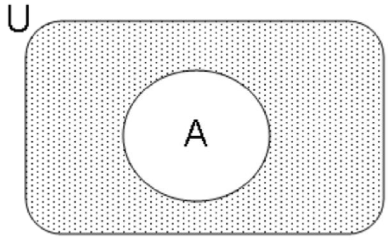
Insieme complementare

DEFINIZIONE. Dato un insieme A, uno dei possibili insiemi che contengono *A* come sottoinsieme si dice **insieme universo** o **insieme ambiente**.

Sia *W={sabato, domenica}* l'insieme dei giorni della settimana che non finiscono per *dì*. L'insieme *W* può essere considerato come sottoinsieme dell'insieme G formato da tutti i giorni della settimana *G={lunedì, martedì, mercoledì, giovedì, venerdì, sabato, domenica}*. L'insieme degli elementi di *G* che non appartengono a *W* forma un insieme che chiameremo **complementare** di W rispetto a G, l'insieme G invece si dice in questo caso insieme **universo.** Ad esempio nella rappresentazione caratteristica $A=\{x\in N|\ x\leq 100\}$ *N* è l'insieme universo di *A*.

DEFINIZIONE. Dato l'insieme *A* e scelto U come suo insieme universo, l'insieme degli elementi di U che non appartengono ad *A* si dice **insieme complementare** di *A* rispetto a U. In simboli: $\overline{A}$ oppure $\overline{A}_U$ oppure $C_U A$

Il diagramma di Eulero-Venn dell'insieme complementare è:



Nella figura la parte riempita con puntini è il complementare di *A* rispetto a U, cioè $\overline{A}_U$.
Come si può vedere dal disegno, essendo $A\subseteq U$ il complementare coincide con la differenza tra insiemi: $\overline{A}_U=U-A$.

Esempi

- Il complementare dell'insieme D dei numeri dispari rispetto all'insieme N dei numeri naturali è l'insieme P dei numeri pari: $\overline{D}_{\mathbb{N}}=P$,
- Il complementare dell'insieme V delle vocali dell'alfabeto italiano rispetto all'insieme *A* delle lettere dell'alfabeto italiano è l'insieme *C* delle consonanti: $\overline{V}_U=C$.
- Dati gli insieme $U=\{x\in N|\ 1\leq x\leq 10\}$ e $B=\{x\in N|\ 1\leq x\leq 5\}$, poiché $B\subset\mathbb{N}$ si può determinare $\overline{B}_{\mathbb{N}}=\{x\in N|\ 6\leq x\leq 10\}$.

62 Verifica, utilizzando la rappresentazione grafica, che:
a) $\overline{A}_U\cup A=U$ b) $(A-B)\cup(B-A)\cup(\overline{A\cup B})=\overline{A\cap B}$

63 Dati E ed F sottoinsiemi di un insieme U, l'insieme definito da $\overline{E\cap F}$ è uguale a:
[A] $E\cup F$ [B] $\overline{E\cup F}$ [C] $E\cap F$ [D] $\overline{E}\cup\overline{F}$

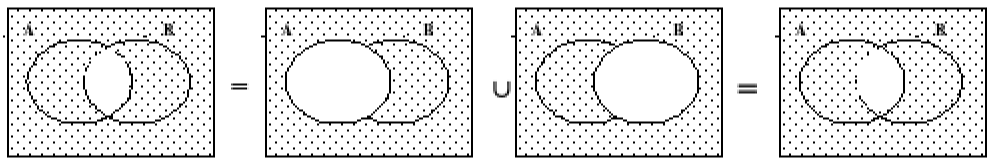
64 Dati G ed H sottoinsiemi di un insieme U, l'insieme definito da $\overline{G\cup H}$ è uguale a:
[A] $\overline{G\cap H}$ [B] $\overline{G}\cap\overline{H}$ [C] $\overline{G\cap\overline{H}}$ [D] nessuno dei precedenti

Leggi di De Morgan

Dati due insiemi *A* e *B* ci sono alcune proprietà, dette **leggi di De Morgan,** che semplificano lo svolgimento di alcune operazioni:

1. $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ Prima legge di De Morgan
2. $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ Seconda legge di De Morgan

Dimostriamo la prima legge di De Morgan utilizzando i diagrammi di Eulero-Venn



$\overline{(A\cap B)}$ $\overline{A}$ $\overline{B}$ $\overline{A}\cup\overline{B}$

Prodotto cartesiano fra insiemi

Supponiamo che la partita di calcio Lecce – Juventus sia terminata 3-2; in questo caso il risultato della partita non rappresenta un insieme di numeri dato che nella rappresentazione di un insieme scrivere $\{3,2\}$ e $\{2,3\}$ è la stessa cosa. Infatti, se avessimo scritto 2-3 al posto di 3-2 la partita avrebbe avuto un esito differente. Ci troviamo nel caso di una **coppia ordinata** di numeri.

DEFINIZIONE. Un insieme di due elementi *a* e *b* presi in un certo ordine si dice **coppia ordinata**. Se il primo elemento della coppia è *a* ed il secondo è *b* si scrive: *(a, b)*.

DEFINIZIONE. Dati due insiemi *A* e *B* non vuoti, l'insieme formato da tutte le coppie ordinate tali che il primo elemento appartiene ad *A* e il secondo a B, si chiama **prodotto cartesiano** di *A* per B. In simboli: $A\times B$ che si legge *"*A per B*"* oppure *"*A prodotto cartesiano con B*"* o ancora "A cartesiano B".

Mediante proprietà caratteristica si scrive: $A\times B=\{(x;y)|\ x\in A\ e\ y\in B\}$

Nel caso in cui B=A $A\times A=A^2=\{(x;y)|\ x\in A e\ y\in A\}$.

Esempi

Sia $C=\{x,y,z\}$ il prodotto cartesiano $C\times C$ è dato dalle seguenti coppie ordinate:
$C\times C=\{(x;x),(x;y),(x;z),(y;x),(y;y),(y;z),(z;x),(z;y),(z;z)\}$

Proprietà del prodotto cartesiano tra insiemi

$A\times\emptyset=\emptyset$ $\quad\emptyset\times A=\emptyset$ $\quad\emptyset\times\emptyset=\emptyset$

Esempi

Sia $A=\{a,b\}$ e $B=\{1,2,3\}$, il prodotto cartesiano $A\times B$ è dato dalle seguenti coppie ordinate: $A\times B=\{(a;1),(a;2),(a;3),(b;1),(b;2),(b;3)\}$ mentre il prodotto cartesiano $B\times A$ è dato dalle seguenti coppie ordinate: $B\times A=\{(1;a),(2;a),(3;a),(1;b),(2;b),(3;b)\}$.
Si può notare che $A\times B\neq B\times A$.

Poiché $A\times B\neq B\times A$ nel prodotto cartesiano non vale la proprietà commutativa.

65 Sia $E=\{x\in N|\ 1\leq x<3\}$, F={x| x è una vocale della parola TELEFONO}e $G=\{x\in N|\ x<-6\}$ allora

$E=\{1,\ldots\ldots\}$ $\quad F=\{e,\ldots\ldots\}$ $\quad G=\{\ldots\ldots\}$

$E\times F=\{(1;e),\ldots\ldots\}$ $\quad F\times E=\{(e;1),\ldots\ldots\}$

$F\times G=\{\ldots\ldots\}$ $\quad G\times E=\{\ldots\ldots\}$

66 Quanti sono gli elementi del prodotto cartesiano $A\times B$, dove *A* ha 6 elementi, *B* ne ha 3:

[A] 9 [B] 18 [C] 6 [D] Non si può sapere

67 Sapendo che $E\times F=\{(x;x),(x;y),(x;z),(y;x),(y;y),(y;z)\}$ indica gli elementi di E e di F:

$E=\{\ldots\ldots\}$ $\quad F=\{\ldots\ldots\}$

68 Se $A\times B$ ha 5 elementi, da quanti elementi possono essere costituiti *A* e B?

[A] 1; 5 [B] 3; 2 [C] 6; 1 [D] 2; 3

69 Dati gli insiemi $A=\{3,5,6\}$ e $B=\{-2,1\}$ costruisci il diagramma cartesiano di $A\times B$ ed elencane gli elementi .

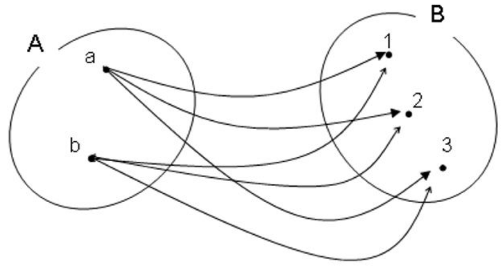
70 Dato $A=\{0,1,2\}$ calcola $A\times A$

Rappresentazione del prodotto cartesiano tra insiemi

- **Tabulazione delle coppie ordinate**
  Come fatto nei precedenti esempi, si combina il primo elemento di *A* con tutti gli elementi di B, il secondo elemento di *A* con tutti gli elementi di *B* e così via fino ad esaurire tutti gli elementi di A.

$$A\times B=\{(a;1),(a;2),(a;3),(b;1),(b;2),(b;3)\}$$

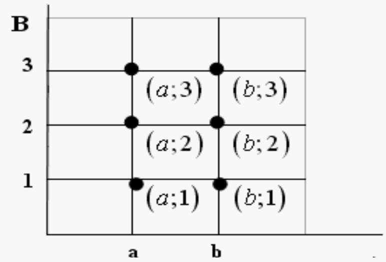
- **Diagramma a frecce**
  Si rappresentano i due insiemi graficamente con i diagrammi si Eulero-Venn e si tracciano degli archi orientati che escono dagli elementi del primo insieme e raggiungono gli elementi del secondo insieme formando coppie ordinate del prodotto cartesiano.



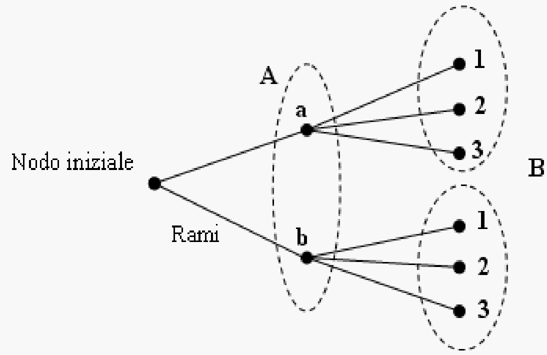
- **Tabella a doppia entrata**
  Si costruisce una tabella nella quale si riportano gli elementi del primo insieme sulla prima colonna e gli elementi del secondo insieme sulla prima riga. Le caselle di incrocio rappresentano le coppie ordinate del prodotto cartesiano.

A \ B	1	2	3
a	$(a;1)$	$(a;2)$	$(a;3)$
b	$(b;1)$	$(b;2)$	$(b;3)$

- **Diagramma cartesiano**
  Si tracciano due semirette una orizzontale e l'altra verticale, orientate, perpendicolari, con l'origine in comune. Si riportano gli elementi del primo insieme sulla semiretta orizzontale e quelli del secondo su quella verticale. Tali semirette vengono chiamate **assi cartesiani.** Si tracciano prima le parallele all'asse verticale dai punti sull'asse orizzontale che rappresentano gli elementi del primo insieme, poi le parallele all'asse orizzontale dai punti sull'asse verticale; i punti di intersezione rappresentano le coppie ordinate del prodotto cartesiano.

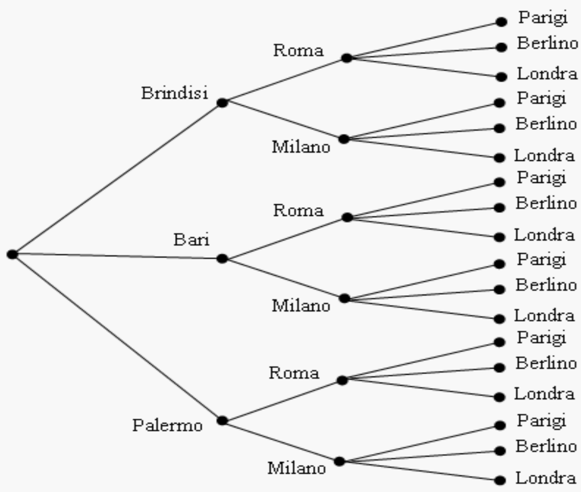


- **Diagramma ad albero**
  È un grafico formato da un nodo iniziale dal quale si ripartono alcuni rami che a loro volta possono ramificarsi e così via fino a che nello schema figurano tutte le possibili situazioni.
  Si può raggiungere un particolare nodo solo muovendosi lungo i rami ed il percorso che collega due nodi qualsiasi deve essere unico.
  La rappresentazione mediante diagramma ad albero è vantaggiosa nel caso si voglia fare il prodotto cartesiano tra più insiemi.

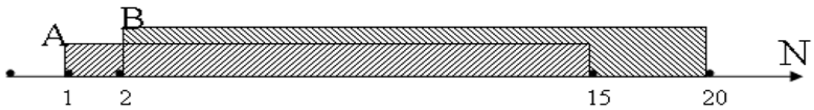


Esempi

Una compagnia aerea deve organizzare delle rotte aeree per collegare fra loro alcune città effettuando uno scalo in un'altra città. Sia $P=\{Brindisi, Bari, Palermo\}$ l'insieme delle città di partenza, $S=\{Roma, Milano\}$ l'insieme delle città di scalo e $A=\{Parigi, Berlino, Londra\}$ l'insieme delle città di arrivo. Per conoscere tutte le possibili rotte aeree dobbiamo determinare il prodotto cartesiano tra i 3 insiemi $P\times S\times A$. Rappresentiamo $P\times S\times A$ tramite un diagramma ad albero:



71 Siano $A=\{x\in\mathbb{N} \mid 1\leqslant x\leqslant 15\}$ e $B=\{x\in\mathbb{N} \mid 2\leqslant x\leqslant 20\}$.



Quale delle seguenti affermazioni è vera:

[A] $A\subset B$ [B] $B\supset A$ [C] $A=B$ [D] $B\not\subset A$

72 Siano $A=\{x\in\mathbb{N} \mid \text{x è pari } e\ (1\leqslant x\leqslant 20)\}$ e $B=\{x\in\mathbb{N} \mid \text{x è multiplo di 6 } e\ (2\leqslant x\leqslant 18)\}$

Quale affermazione è vera?

[A] $A\subset B$ [B] $B\supset A$ [C] $A=B$ [D] $B\subset A$

73 Siano $A=\{x\in\mathbb{N} \mid 3\leqslant x\leqslant 10\}$ e $B=\{x\in\mathbb{N} \mid 2\leqslant x\leqslant 20\}$.

Quali delle seguenti affermazioni è vera:

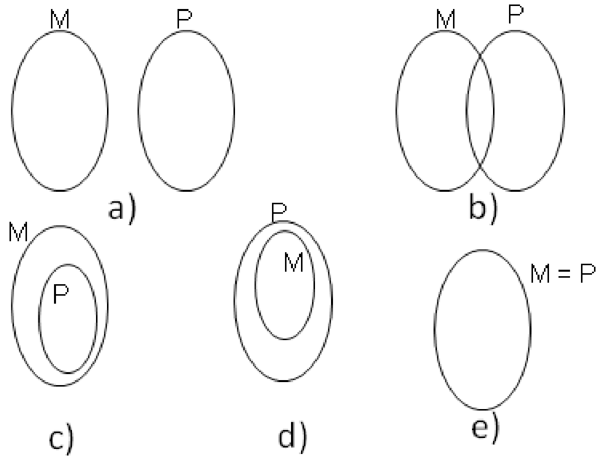
[A] $A\subset B$ [B] $B\supset A$ [C] $A=B$ [D] $A\not\subset B$

74 Individua tutti i possibili sottoinsiemi propri formati da tre elementi dell'insieme $C=\{a,e,i,o,u\}$

75 Sia $A=\{1,2,3,4\}$ scrivi i possibili sottoinsiemi propri e impropri di *A*.

76 Associa a ogni diagramma la corretta rappresentazione grafica. Attenzione ci può essere più di una risposta corretta.

$M\subset P$	[a] [b] [c] [d] [e]
$P\supseteq M$	[a] [b] [c] [d] [e]
$M\subseteq(M\cup P)$	[a] [b] [c] [d] [e]
$M\not\subset P$	[a] [b] [c] [d] [e]
$P\subset(P\cup M)$	[a] [b] [c] [d] [e]
$M\neq P$	[a] [b] [c] [d] [e]



77 Determina l'unione tra i seguenti insiemi

a) $A=\{-3,-2,-1,0,+1,+2,+3\}$ $B=\{-2,-1,0,+1,+2,+3,+4\}$ $A\cup B=...$

b) $A=\{x\in\mathbb{N}/2\leq x\leq 5\}$ $B=\{x\in\mathbb{N}/3<x<7\}$ $A\cup B=...$

c) $A=\{x\in\mathbb{Z}/-5\leq x\leq +5\}$ $B=\{x\in\mathbb{Z}/-15\leq x<3\}$ $A\cup B=...$

d) $A=\{x\in\mathbb{N}/x>100\}$ $B=\{x\in\mathbb{N}/10<x<20\}$ $A\cup B=...$

e) $A=\{l \text{ lettera di SATURNO}\}$ $B=\{l \text{ lettera di NETTUNO}\}$ $A\cup B=...$

78 Sia M_3 l'insieme dei multipli 3 e M_4 l'insieme dei multipli di 4, in generale M_n l'insieme dei multipli del numero n.

a) Calcola $M_3\cap M_4$. Si tratta di M... l'insieme dei multipli di ...

b) Clacola $M_6\cap M_4$. Si tratta di M... l'insieme dei multipli di ...

c) Calcola $M_{60}\cap M_{48}$.

d) Sai dedurre una regola che, dati due numeri naturali m e n calcoli $M_m\cap M_n$? Può accadere che questo insieme sia vuoto?

79 Sia D_4 l'insieme dei divisori di 4 e D_6 l'insieme dei divisori di 6, in generale D_n l'insieme dei divisori del numero n.

a) Calcola $D_4\cap D_6$. Si tratta di D... l'insieme dei divisori di ...

b) Calcola $D_{60}\cap D_{48}$.

c) Sai dedurre una regola che, dati due numeri naturali m e n, calcoli $D_m\cap D_n$? Può accadere che questo insieme sia vuoto? Qual è il numero minimo di elementi che può contenere?

80 $A=\left\{x/x\in\mathbb{Q},0<x<\frac{3}{2}\right\}$ e $B=\{x/x\in\mathbb{Q},1<x<6\}$, calcola $A\cap B=...$

81 $A=\{x/x\in\mathbb{Q},-1<x<0\}$ e $B=\left\{x/x\in\mathbb{Q},\frac{1}{3}<x<6\right\}$, calcola $A\cap B=...$

82 $A=\{x/x\in\mathbb{Q},-5<x<10\}$ e $B=\left\{x/x\in\mathbb{Q},\frac{1}{3}<x<6\right\}$, calcola $A\cap B=...$

83 $A=\{x/x\in\mathbb{Q},0\le x<10\}$ E $B=\left\{x/x\in\mathbb{Q},\frac{1}{3}<x\le 6\right\}$, calcola $A\cap B=...$

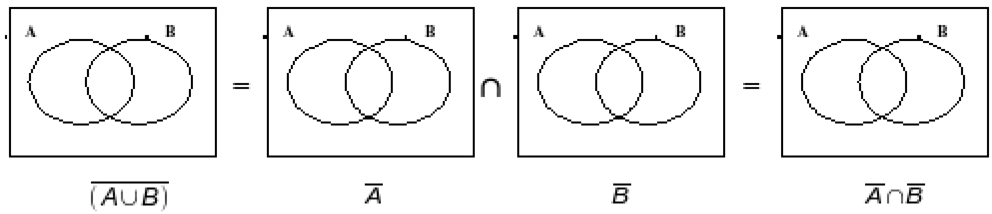
84 Dato l'insieme *A={3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 32}* e il suo sottoinsieme *B* dei multipli di 3, determina gli insiemi *A-B* e *B-A*.

85 Dato l'insieme $X=\{x\in N|\ 10\le x\le 100\}$ e $Y=\{y\in N|\ 10<y<100\}$ determina $X-Y$ e $Y-X$.

86 Determina la differenza tra i seguenti insiemi

a) $A=\{-3,-2,-1,0,+1,+2,+3\}$ $B=\{-2,-1,0,+1,+2,+3,+4\}$ $A-B=...$
b) $A=\{x\in\mathbb{N}/2\le x\le 5\}$ $B=\{x\in\mathbb{N}/3<x<7\}$ $B-A=...$
c) $A=\{x\in\mathbb{Z}/-5\le x\le +5\}$ $B=\{x\in\mathbb{Z}/-15\le x<3\}$ $A-B=...$
d) $A=\{x\in\mathbb{N}/x>100\}$ $B=\{x\in\mathbb{N}/10<x<20\}$ $B-A=...$
e) $A=\{l$ lettera di SATURNO$\}$ $B=\{l$ lettera di NETTUNO$\}$ $A-B=...$

87 Dimostra la 2° legge di De Morgan annerendo gli spazi opportuni



88 Dati gli insiemi *C* e *D* tali che $C\subset D$ completa le seguenti relazioni aiutandoti con la rappresentazione grafica

a) $D-C$ = … ... c) $\overline{C\cap D}$ = … … e) $C-D$ = … …

b) $D\cap\overline{C}$ = … … d) $C\cup\overline{C}$ = … … f) $C\cap\overline{C}$ = … ...

89 Quale delle seguenti scritture corrisponde a $\overline{X\cap Y}$:

a. $\overline{X}\cup\overline{Y}$ **b.** $\overline{X}\cap\overline{Y}$ **c.** $\overline{X}\cup Y$ **d.** $X\cup\overline{Y}$

90 Esegui le operazioni indicate

	A	B	$A\cup B$	$A\cap B$	$A-B$
a)	$A=\{2,4,6,8\}$	$B=\{1,3,6,9\}$			
b)	$A=\{a,e,i,o,u\}$	$B=\{a,b,c,d,e\}$			
c)	$A=\emptyset$	$B=\{0\}$			
d)	$A=\{x\in\mathbb{N}/$ x è pari$\}$	$B=\{x\in\mathbb{N}/$ x è dispari$\}$			
e)	$A=\{x\in\mathbb{N}/$ x è multiplo di 2$\}$	$B=\{x\in\mathbb{N}/$ x è multiplo di 4$\}$			
f)	$A=\{x\in\mathbb{Z}/-5\le x\le 5\}$	$B=\{x\in\mathbb{Z}/-2\le x\le 8\}$			
g)	$A=\{x\in\mathbb{N}/$ x è lettera di casa$\}$	$B=\{x\in\mathbb{N}/$ x è lettera di caserma$\}$			

Dato $A=\{x\in\mathbb{N}/$ x è multiplo di 2$\}$ determina $C_{\mathbb{N}}A$

91 Dato $A=\{I,II,III\}$ e $B=\{a,b\}$ determina $A\times B$

92 Dato $B=\{1,2,3\}$ calcola $(B\cup B)\cap B$

93 A={2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20}, B={3, 6, 9, 12, 15, 18}, C={1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19} calcola $A\cap B\,;A\cup C\,;(A\cap B)\cup C\,;B\cap C\,;(A\cup B)\cap(B\cup C)$.

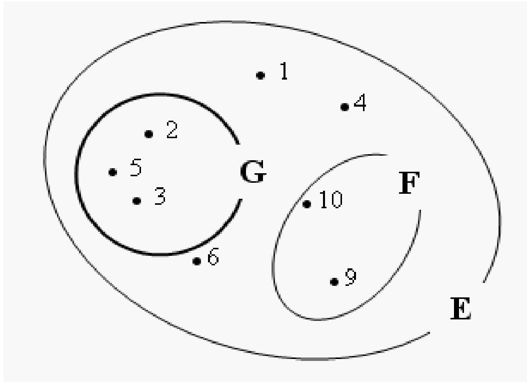
94 $A=\{x\in\mathbb{Z}\mid -5\le x<2\}$, $B=\{x\in\mathbb{N}\mid -3<x\le 2\}$ calcola

$A\cup B$ $A\cap B$ $B-A$ $C_A B$ $A\times(A\cap B)$ $\wp(B-A)$

95 Per ciascuna delle seguenti affermazioni false dai un controesempio

a) $A\cup B=A$
b) $A\cap B=\emptyset\rightarrow A=\emptyset$
c) se x è multiplo di 2 allora è anche multiplo di 4
d) Se *Card* A =2 e *Card* B = 5 allora *Card* $A\cup B=7$
e) Se *Card* A =2 e *Card* B = 5 allora *Card* $A\cap B=2$

96 In base alla figura rispondi alle domande:



a) L'insieme E ha 5 elementi **[V] [F]**
b) $2 \in E$ **[V] [F]**
c) $3 \notin G$ **[V] [F]**
d) $F \subset G$ **[V] [F]**
e) $F \subset E$ **[V] [F]**
f) $\emptyset \subseteq G$ **[V] [F]**
g) $Card(E)=8$ **[V] [F]**
h) $10 \in E$ **[V] [F]**
i) $F \cap E = F$ **[V] [F]**
j) $F \cup G = E$ **[V] [F]**
k) $(E-F)-G=\{1,4\}$ **[V] [F]**

97 Dato l'insieme A={0; 1; 5; 6; 9} stabilisci quali dei seguenti sono o no suoi sottoinsiemi, completando con gli opportuni simboli le scritture a fianco indicate.

- B={1;5;6} B .... A
- C={0;1;3;5} C .... A
- D={ } D .... A
- E={0} E .... A
- F={5;6;7} F .... A
- G={6;0;1;5;9} G......... A

98 Siano dati i seguenti insiemi
$C=\{x|$ x è una lettera della parola REMARE$\}$, $D=\{x|$ x è una lettera della parola VOLARE$\}$,
$E=\{x|$ x è una lettera della parola AMARE$\}$, indica quali delle seguenti relazioni sono vere:
[A] $D \subseteq C$ [B] $D \not\subset E$ [C] $C=E$ [D] $E \supseteq C$

99 Completa la seguente tabella:

Simbologia	**Significato**
$A=\{a,b,c,d\}$	A è formato dagli .... a, b, c, d
$a \in A$	L'elemento a .... all'insieme A
....	L'elemento f non appartiene all'insieme A
$B \subset A$	L'insieme *B* è .... nell'insieme A, ovvero *B* è un .... di A
....	L'insieme vuoto è un sottoinsieme di A
....	L'insieme *C* è l'unione degli insiemi *A* e B.
$D=A \cap B$	L'insieme D è .... degli insiemi *A* e B.
$A \cap F = \emptyset$	A e F sono insiemi .... cioè non hanno ....
$L=C_A B$	L'insieme L è ....
....	L'insieme M è la differenza tra *A* e B.

100 Rappresenta graficamente l'insieme $A=\{x \in N | x \leq 25$ e x è pari$\}$ e $B=\{x \in N | x \leq 27$ e x è multiplo di 4$\}$ e stabilisci se $A \supseteq B$

101 Verifica usando i diagrammi di Eulero-Venn che se $A \subset B$ e $B \subset C$ allora $A \subset C$. Le relazioni valgono anche se il simbolo ⊂ viene sostituito con ⊆ ?

102 Dato $A=\{do, re, mi\}$ determina l'insieme delle parti $\wp(A)$

103 Considerato l'insieme $X=\{a,c,d,t,o\}$ stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere o false.

a) $\{x|$ x è una vocale della parola CAROTA$\} \subset X$ [V] [F]
b) $\{a,t\} \not\subset \wp(X)$ [V] [F]
c) $\{a,t\} \in \wp(X)$ [V] [F]
d) $0 \in X$ [V] [F]
e) $\emptyset \in \wp(X)$ [V] [F]
f) $X \in \wp(X)$ [V] [F]

104 Se U è l'insieme universo degli italiani, D l'insieme delle donne italiane, L l'insieme degli italiani laureati, S l'insieme degli italiani sposati, cosa rappresentano i seguenti insiemi?

a) $\overline{D}$ c) $\overline{L \cup D \cup S}$ e) $\overline{L} \cap S$

b) $L \cap D$ d) $L - S$ f) $\overline{L \cap D \cap S}$

105 Quanti elementi ha $\wp(H)$ sapendo che H ha 7 elementi?

[A] 49 [B] 64 [C] 128 [D] 7 [E] 14

106 Scrivi l'insieme che ha per insieme delle parti: $\{\emptyset, \{Mauro\}, \{Mario\}\{Mauro, Mario\}\}$

107 Se $A \cup B = B$ cosa puoi dire di *A* e B?

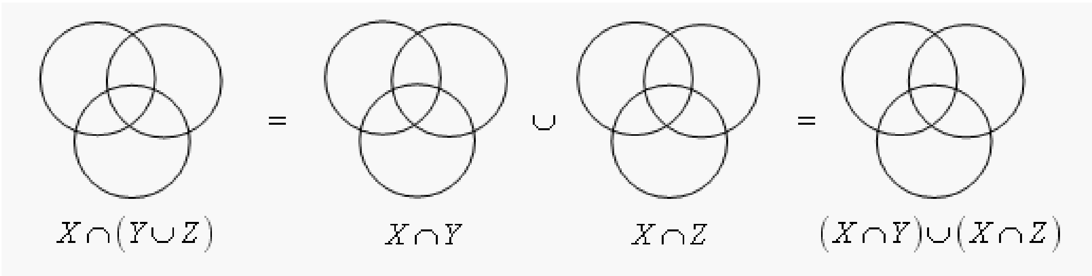
[A] $B \subseteq A$ [B] $A \not\in B$ [C] $A \subseteq B$ [D] $A \subset B$ [E] $A \cap B = \emptyset$

108 Dati gli insiemi *A* = {10, 20, 30, 40, 50}, *B* = {20, 30, 50}, determina un insieme *C* tale che:

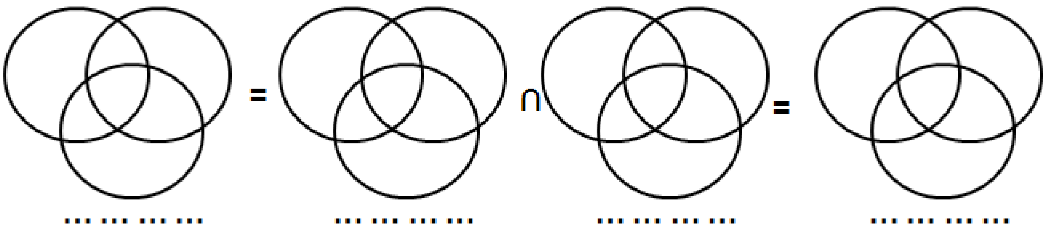
a) $B \cup C = A$ b) $A \cap C = B$ c) $C \cup C = B$ d) $C \cap C = A$

109 Dati gli insiemi $A = \{x \in \mathbb{N}, x \leq 10 \; e \; x \; pari\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} / x \leq 20 \; e \; x \; divisibile \; per \; 4\}$, $C = \{1,2\}$ determina $(A \cap B) x \, C$.

110 Dimostra la proprietà distributiva dell'intersezione rispetto l'unione annerendo gli spazi opportuni.



111 Dimostra la proprietà distributiva dell'unione rispetto l'intersezione annerendo gli spazi opportuni e inserendo le formule opportune.



112 Se $E - F = E$ cosa puoi dire di E e F?

[A] $E \cup F = E$ [B] $E = F$ [C] $E \subseteq F$ [D] $F \subset E$ [E] $E \cap F = \emptyset$

113 Dati i seguenti insiemi $A = \{x \in N | \; x \leq 25\}$, $B = \{x \in N | \; 4 < x \leq 9\}$, $C = \{x \in N | \; x < 25\}$, $D = \{x \in N | \; x > 7\}$ scegli fra i seguenti i loro complementari

a. $E = \{x \in N | \; x \geq 25\}$ **b.** $F = \{x \in N | \; x \leq 6\}$ **c.** $G = \{x \in N | \; x > 25\}$ **d.** $H = \{x \in N | \; x < 7\}$

e. $I = \{x \in N | \; x < 4 \; e \; x \geq 8\}$ **f.** $L = \{x \in N | \; x < 4 \; o \; x \geq 10\}$ **g.** $M = \{x \in N | \; x \leq 4 \; e \; x \geq 9\}$

114 Quali dei seguenti sono sottoinsiemi dei numeri pari? L'insieme dei

[A] multipli di 4 [B] multipli di 3 [C] multipli di 6 [D] numeri primi

115 In una classe di 30 allievi 16 hanno debito in matematica, 20 in italiano, 10 non hanno avuto nessun debito. Rappresenta la situazione con un diagramma di Eulero-Venn.

- quanti allievi hanno debito in entrambe le materie [R.16]
- quanti allievi hanno almeno un debito [R.20]
- quanti allievi non hanno debito in italiano [R.10]
- quanti allievi non hanno debito in matematica [R.14]

116 Quali dei seguenti insiemi possono essere sottoinsiemi dell'insieme dei quadrilateri? L'insieme dei

[A] quadrati [B] rombi [C] trapezi [D] triangoli equilateri
[E] poligoni [F] cerchi [G] parallelogrammi

117 Dati gli insiemi $A = \{x / x \in \mathbb{N}, x < 10\}$, $B = \{x / x \in \mathbb{N}, 5 < x \leqslant 16\}$, $C = \{x / x \in \mathbb{N}, x \geqslant 7\}$ determina

a) $A \cup B \cup C$ c) $(A \cup B) \cap C$

b) $A \cap B \cap C$ d) $(B \cap C) \cup A$

118 Dato *A = {x|x è un numero naturale, x è pari e x > 12}* determina l'insieme complementare di A.

119 A={x/ x è divisore di 12}, B={x / x è divisore di 6}, C={x / x è divisore di 15}, determina

a) $A\cup B$ b) $A\cup C$ c) $A\cup B\cup C$ d) $A\cap B$
e) $B\cap C$ f) $A\cap C$ g) $A\cap B\cap C$ h) $A\cap(B\cup C)$

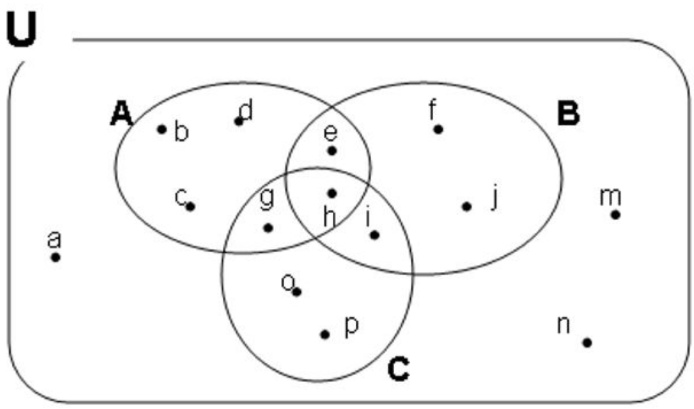
120 Quanti sono i sottoinsiemi dell'insieme che contiene come elemento l'insieme vuoto?

121 Dato l'insieme $U=\{x/x=2n+1, n\in\mathbb{N}, 0\leqslant n\leqslant 5\}$

a) rappresenta U in forma tabulare;
b) costruisci due sottoinsiemi propri *A* e *B* di U tali che $A\cap B=\emptyset$;
c) determina $A\cup B$ e *A-B* , dai il risultato con rappresentazione tabulare e mediante diagrammi di Eulero-Venn.

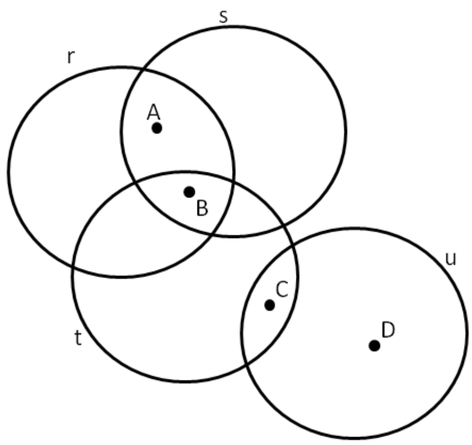
122 In base agli insiemi rappresentati con il diagramma di Eulero-Venn determina gli insiemi richiesti:

a) $A\cup B$
b) $\overline{A\cup B\cup C}$
c) $A\cap B$
d) $B\cap C$
e) $A\cap B\cap C$
f) $A\cap(B\cup C)$
g) $A\cup(B\cap C)$
h) $B\cap\overline{C}$
i) $(A\cup B)-C$
j) $B\cap\overline{C}$
k) $C-(A\cap B)$
l) $\overline{(A\cup B)}-C$



123 Determina l'insieme $P(A)$ insieme delle parti di A, dove è l'insieme delle lettere della parola NONNA.

124 Nel seguente diagramma di Eulero-Venn gli insiemi r, s, t sono rette, gli elementi A, B, C, D sono punti. Dai una rappresentazione geometria, rappresentando le rettee che corrispondono alla seguente situazione.

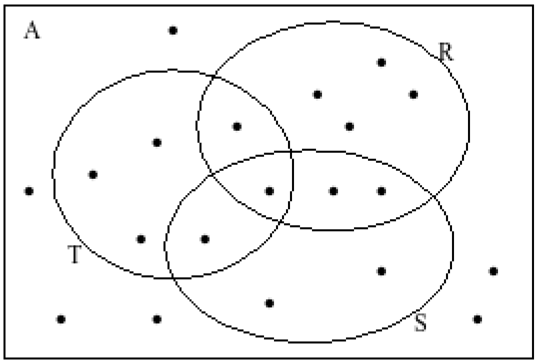


►5. I diagrammi di Eulero-Venn come modello di un problema

Alcune volte, trovandoci di fronte a un problema, possiamo rappresentare la situazione con diagrammi di Eulero-Venn, ciò agevola la comprensione e facilita la risoluzione del problema. Attraverso alcuni esempi mostreremo come usare la teoria degli insiemi per risolvere problemi.

Problema 1

Nel seguente diagramma di Eulero-Venn, l'insieme A rappresenta un gruppo di amici appassionati di ballo; gli insiemi T, R, S rappresentano rispettivamente coloro che ballano il tango, la rumba, il samba; ogni puntino rappresenta uno degli amici.



Quanti sono gli amici appassionati di ballo?
Quanti tra loro ballano

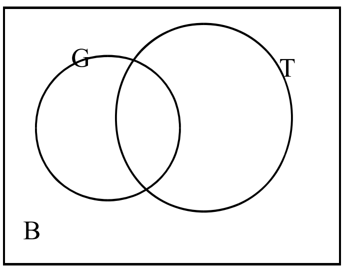
1) ***nessuno** dei balli indicati?*
2) ***almeno uno** dei balli tango, samba, rumba?*
3) ***almeno** il samba?*
4) ***solo** la rumba?*
5) *la rumba **e** il tango?*
6) ***tutti** i balli indicati?*

Per rispondere alle domande dobbiamo contare gli elementi che formano determinati insiemi.
Quanti sono gli amici appassionati di ballo? Per rispondere a questa domanda, contiamo tutti i puntini che compaiono nel disegno cioè $Card(A) = 20$
Rispondiamo ora alla seconda domanda:

1) *Quanti tra loro ballano **nessuno** dei balli indicati?*
   Chi non balla nessuno dei balli indicati sta nell'insieme *A*, ma in nessuno degli insiemi *R*, *S*, *T* quindi appartiene al complementare di $R \cup S \cup T$ rispetto all'insieme *A*, dunque $Card(\overline{R \cup S \cup T}) = 6$.
2) *Quanti tra loro ballano **almeno uno** dei balli tra tango, samba, rumba?*
   Chi balla almeno uno di quei balli è rappresentato dagli elementi dell'insieme $R \cup S \cup T$, quindi $Card(R \cup S \cup T) = 14$.
3) *Quanti tra loro ballano **almeno** il samba?*
   Gli amici che ballano almeno il samba sono nell'insieme *S*, quindi $Card(S) = 6$
4) *Quanti tra loro ballano **solo** la rumba?*
   Nell'insieme *R* sono rappresentati gli amici che ballano almeno il rumba, quindi dobbiamo togliere dall'insieme *R* gli elementi che stanno in *S* o in *T*: $Card(R-(T \cup S)) = 4$
5) *Quanti tra loro ballano la rumba **e** il tango?*
   Quelli che ballano sia la rumba che il tango sono gli elementi dell'insieme intersezione $R \cap T$, quindi $Card(R \cap T) = 2$
6) *Quanti tra loro ballano **tutti** i balli indicati?*
   Quelli che ballano tutti e tre i balli indicati sono elementi dell'insieme intersezione $R \cap S \cap T$, quindi $Card(R \cap S \cap T) = 1$.

Problema 2

A settembre, per la festa delle contrade, a Lainate è arrivato un luna park dove oltre ad una grande giostra era stato allestito un tiro a segno con palline di gomma piuma, proprio per i bambini. Alcuni bambini, accompagnati dalla loro maestra si sono recati al luna park: 7 sono stati sulla giostra, 3 sono stati sia sulla giostra che al tiro a segno, 3 si sono divertiti solamente col tiro a segno e altri 2 sono stati a guardare. Quanti bambini sono andati quel giorno al luna park?



Per risolvere il problema rappresentiamo con diagrammi di Eulero-Venn la situazione; indichiamo con *B* l'insieme dei bambini recatisi al luna park, con G l'insieme di quelli che sono stati sulla giostra e con T l'insieme di quelli che hanno provato il tiro a segno. Dall'enunciato sappiamo che
$Card(G)=7$; $Card(G \cap T)=3$; $Card(T-G)=3$; $Card(B-(G \cup T))=2$
Completa la rappresentazione segnando i bambini con dei puntini e rispondi al quesito.

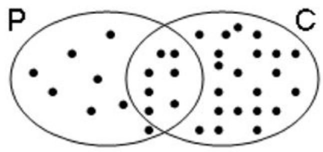
Problema 3

Alla palestra Anni Verdi, il giovedì, si tengono due allenamenti di pallavolo e calcio dalle 17.00 alle 18.30. Frequentano il corso di pallavolo 15 persone e sono 28 quelli che frequentano l'allenamento di calcio. Quante persone frequentano pallavolo o calcio in questo orario?

Dati:
$P=\{\text{iscritti a pallavolo}\}$; $C=\{\text{iscritti a calcio}\}$; $Card(P)=15$; $Card(C)=28$
Obiettivo:
Il problema chiede di determinare la cardinalità di $P\cup C$
Soluzione:
Osserviamo che non ci sono persone che frequentano sia l'uno che l'altro sport essendo gli allenamenti nello stesso orario; gli insiemi *P* e *C* sono disgiunti: $P\cap C=\emptyset$. Quindi:
$Card(P\cup C)=Card(P)+Card(C)=15+28=43$.

Problema 4

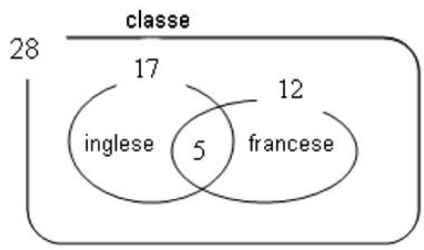
Alla palestra Anni Verdi, il lunedì si tengono allenamenti di pallavolo, dalle 17.00 alle 18.30 e dalle 19.00 alle 20.30 gli allenamenti di calcio. Quelli che frequentano la pallavolo sono 15, quelli che frequentano il calcio sono 28, però ce ne sono 7 di loro che fanno entrambi gli allenamenti. Quanti sono gli sportivi che si allenano il lunedì?



Dati:
$P=\{\text{iscritti a pallavolo}\}$; $C=\{\text{iscritti a calcio}\}$
$Card(P)=15$; $Card(C)=28$; $Card(P\cap C)=7$
Obiettivo:
Il problema chiede di determinare la cardinalità di $P\cup C$
Soluzione:
$Card(P\cup C)=Card(P)+Card(C)-Card(P\cap C)=15+28-7=36$.
Generalizzando possiamo affermare che dati due insiemi finiti *A* e *B* la cardinalità dell'insieme $A\cup B$ è data dalla seguente formula: $Card(A\cup B)=Card(A)+Card(B)-Card(A\cap B)$.

Problema 5

A scuola si sono aperti i corsi di lingue. Della classe di Piero, che è composta da 28 ragazzi, 17 frequentano il corso di inglese, 12 quello di francese, 5 di loro frequentano sia il corso di inglese, sia quello di francese. Quanti sono i ragazzi della classe di Piero che non frequentano alcun corso di lingue?

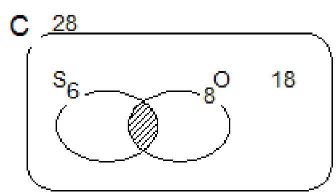


Rappresentiamo la situazione con un diagramma di Eulero-Venn. L'insieme universo è costituito dai 28 ragazzi che compongono la classe. I ragazzi che frequentano almeno un corso NON sono 17+12=29, perché ce ne sono 5 che frequentano entrambi i corsi e vengono conteggiati due volte. Quindi i ragazzi che frequentano almeno un corso sono 17+12-5=24. Di conseguenza quelli che non frequentano nessun corso sono 28-24=4.

Problema 6

Il professore di matematica di Piero è piuttosto severo; nella sua classe, di 28 alunni, ha messo solo 6 sufficienze allo scritto e solo 8 all'orale. I ragazzi che sono risultati insufficienti sia allo scritto sia all'orale sono stati 18. Quanti sono i ragazzi che hanno avuto una votazione sufficiente sia allo scritto che all'orale?

Rappresentiamo la situazione con un diagramma di Eulero-Venn.



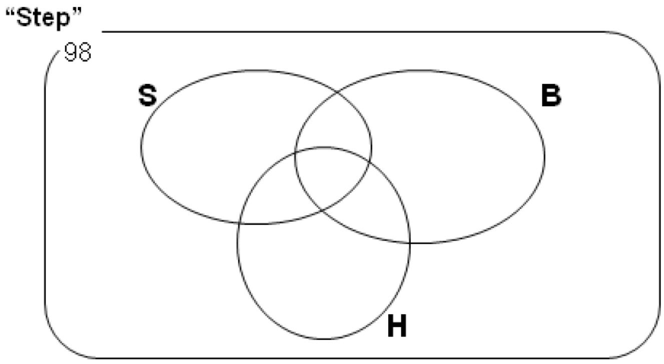
C è l'insieme degli alunni della classe di Piero, è costituito da 28 elementi. S è l'insieme dei ragazzi sufficienti allo scritto, è costituito da 6 alunni. O è l'insieme dei ragazzi che sono sufficienti all'orale, è costituito da 8 elementi. Gli elementi di $\overline{S\cup O}$ sono 18, cioè i ragazzi che non sono sufficienti né allo scritto, né all'orale.
L'insieme $S\cup O$ è quindi costituito da 28-18=10 elementi.
Ricordiamo che $Card(S\cup O)=Card(S)+Card(O)-Card(S\cap O)$, pertanto
$Card(S\cap O)=Card(S)+Card(O)-Card(S\cup O)=6+8-10=4$.
In conclusione i ragazzi sufficienti allo scritto e all'orale sono 4.

125 La scuola “Step” organizza corsi di Salsa, Hip Hop e Break Dance.

- Gli iscritti ai corsi sono in tutto 98:
- 6 frequentano tutti e tre i corsi,
- 37 frequentano il corso di Salsa,
- 15 solo i corsi di Salsa e di Hip Hop,
- 7 solo i corsi Salsa e Break Dance,
- 9 almeno Hip Hop e Break Dance.
- 28 Salsa o Break Dance ma non Hip Hop.

Quanti praticano solo Hip Hop?

Rappresentiamo la situazione con un diagramma di Eulero-Venn.

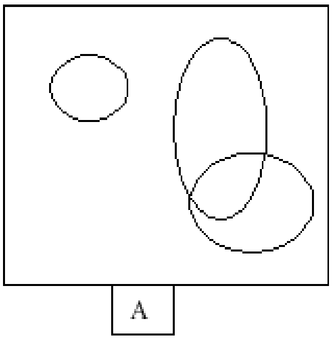


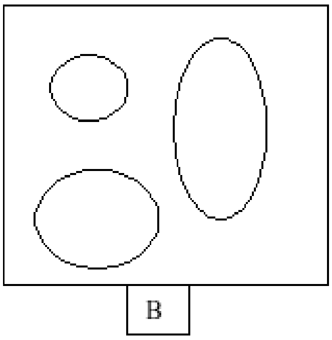
S è l'insieme degli iscritti al corso di Salsa, *B* l'insieme degli iscritti al corso di Break Dance, H l'insieme degli iscritti al corso di Hip Hop.

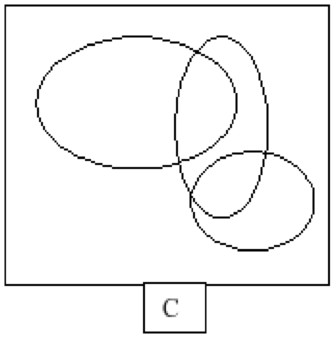
126 Il club “Argento vivo” ha 2500 iscritti; nel mese di gennaio ha organizzato alcune manifestazioni sportive alle quali hanno partecipato 850 degli iscritti e alcuni tornei di scacchi ai quali hanno partecipato in 780. 320 iscritti al club hanno potuto partecipare, grazie alla perfetta organizzazione, sia alle manifestazioni sportive sia ai tornei di scacchi. Quanti soci del club non hanno partecipato a nessuna delle iniziative e quanti invece hanno partecipato ad almeno una?

127 In una scuola di musica si tengono 4 corsi di cui quello di pianoforte è obbligatorio per tutti i 100 studenti iscritti, mentre quelli di violino, flauto e chitarra sono facoltativi. Per essere ammessi agli esami di fine anno bisogna frequentare almeno un corso oltre a quello di pianoforte. Se gli alunni:
- che frequentano il corso di flauto sono 25 e non frequentano né quello di violino, né quello di chitarra;
- iscritti sia al corso di violino sia a quello di chitarra sono 20;
- che frequentano il corso di violino sono 46;
- che frequentano solo il corso di violino sono tanti quanti quelli che frequentano solo il corso di chitarra.

Quanti alunni non possono sostenere l’esame finale? (R:3)
Quale dei seguenti diagrammi di Venn può essere preso come modello della situazione?







128 I componenti di una compagnia teatrale sanno almeno cantare, ballare, recitare. Al termine di una rappresentazione si sa che 12 hanno almeno ballato, 8 hanno almeno cantato e 16 hanno almeno recitato. La versatilità dei componenti ha permesso che 5 abbiano almeno ballato e cantato, 3 abbiano almeno cantato e recitato, 8 abbiano ballato e recitato, 2 ballerini hanno anche cantato e recitato. Quanti sono i componenti della compagnia? [R: 22]

129 Da un'indagine condotta su consumatori adulti è risultato che 605 bevono almeno vino, 582 bevono almeno latte, 348 bevono almeno birra, 140 bevono almeno vino e birra, 85 bevono almeno vino e latte, 56 bevono almeno latte e birra, 25 bevono tutte e tre le bevande mentre 71 non bevono alcuna delle bevande citate.

a) Quante persone bevono una sola bevanda? [R:1048]
b) Quante bevono almeno una bevanda? [R: 1279]
c) Quante sono le persone intervistate? [R: 1350]

130 In una scuola di lingue sono iscritti 164 studenti; 80 seguono il corso di francese e 120 il corso di tedesco. Quanti studenti seguono entrambi i corsi? Quanti studenti seguono solo il corso di tedesco?

[R: 36; 84]

131 In un classe di 28 allievi, 18 frequentano il laboratorio di teatro, 22 il laboratorio di fotografia, 10 non frequentano nessun laboratorio. Rappresenta la situazione con un diagramma di Eulero-Venn. Quanto allievi frequentano entrambi i laboratori? Quanti frequentano almeno un laboratorio? Quanti non frequentano il laboratorio di teatro?

132 In una pizzeria, domenica sera, erano presenti 140 persone: 50 hanno mangiato pizza e calzone, 20 hanno mangiato solo calzone e 15 non hanno mangiato né pizza né calzone. Il pizzaiolo si chiede se può conoscere in base alle precedenti informazioni, quante pizze ha preparato. Aiutalo a risolvere il suo problema illustrando la situazione con un diagramma di Venn , assegnando a ciascun insieme la sua cardinalità.

133 In un paese di 3200 abitanti arrivano due quotidiani: il primo è letto da 850 persone, il secondo da 780. Poiché 320 persone leggono entrambi i quotidiani, quante persone non leggono alcun quotidiano e quante almeno uno?

134 Nella classe di Asdrubale ci sono 37 allievi. Tutti si sono iscritti ad almeno una delle due attività extracurriculari (musica e pallavolo). Alla fine 15 fanno musica e 28 fanno pallavolo.
Quanti allievi, frequentando entrambe le attività, hanno la necessità di programmare gli orari per evitare sovrapposizioni? (*Test di ammissione a architettura 2008*)

[A] 13 [B] 9 [C] 16 [D] 22 [E] 6

135 In un'aula scolastica, durante la ricreazione, 14 studenti stanno seduti, 8 mangiano la pizza. Con questi dati si può concludere con certezza che il numero totale N degli studenti è:
(*Test di ammissione a medicina 2008*)

[A] N > 14 [B] N < 14 [C] N > 22 [D]N = 22 [E] $N \geqslant 14$

136 In una scuola di 150 alunni ci sono 23 studenti che frequentano il corso ECDL, 41 studenti che frequentano solo il corso di Inglese, 3 studenti che frequentano tutti e due i corsi. Quanti sono gli studenti che frequentano solo il corso ECDL? Quanti studenti non frequentano nessuno dei due corsi?

137 In un giorno di vacanza, 20 alunni dovrebbero studiare latino e matematica per recuperare le lacune: 8 non studiano latino, 10 studiano matematica e 4 non studiano niente. Quanti alunni studiano entrambe le materie?

138 In una classe di 20 alunni si sta organizzando una gita scolastica. Durante l'assemblea gli alunni raccolgono informazioni sulle mete già visitate: 18 hanno visitato Venezia, 14 Roma, 5 Firenze. Solo 3 hanno visitato tutte e tre le città, 5 hanno visitato Firenze e Venezia, 3 solo Venezia. Quanti hanno visitato solo Firenze? Quanti hanno visitato Firenze e Roma? Quanti non hanno visitato nessuna delle tre città? Quanti non hanno visitato Roma?

La parte rimanente del capitolo è solo on line, gli argomenti che completano il capitolo sono

►6. Proposizioni e predicati

In matematica frasi come "19 è maggiore di 5" o “Giove ruota intorno alla Terra” sono considerate proposizioni perché ad esse si può attribuire un preciso valore di verità, cioè si può stabilire se sono vere oppure false: la prima è una proposizione vera, la seconda è falsa.
Non sono proposizioni in senso matematico “Cosa stai studiando?”, “domani pioverà!” , “x è un numero primo”: infatti la prima non è un'affermazione ma pone una domanda, la seconda è una esclamazione e quindi non possiamo stabilire se è vera o falsa; l’ultima contiene un elemento indeterminato e finché non si fissa il valore da attribuire a x, non si può decidere se la frase che lo riguarda è vera o falsa.
Ogni proposizione è formata da un **predicato** (verbo) e dai suoi **argomenti** (cose o persone alle quali il verbo si riferisce). Analizzando le proposizioni sopra enunciate si ha:

soggetto	predicato	complemento
19	è maggiore di	5
giove	ruota attorno alla	Terra

Il soggetto e il complemento sono gli argomenti ai quali il predicato si riferisce.

139 Completa la tabella come suggerito nella prima riga, individuando, per ciascuna proposizione, il predicato e gli argomenti a cui esso si riferisce :

Proposizioni	Predicato	Argomenti
a) 7 è divisore di 14	essere divisore di	7 , 14
b) 11 è maggiore di 10	essere maggiore di	..... , ...
c) 5 è numero primo		5
d) Andrea frequenta la stessa palestra di Marco		
e) Marta è moglie di Piero		
f) Paolo è padre di Marco		

In alcune proposizioni il predicato si riferisce a due argomenti (il **soggetto** e il **complemento**) in altre ad un solo argomento: nella proposizione c), il predicato "essere numero primo" stabilisce semplicemente una caratteristica del numero 5 senza porre alcuna connessione con un altro argomento.

DEFINIZIONE. Si dice **predicato binario** un predicato che si riferisce a due argomenti.

►7. Relazioni in un insieme

Il termine **relazione** entra molto spesso in frasi del linguaggio naturale, lo usiamo per esprimere un generico legame tra due persone o tra due oggetti, anche senza specificarne la natura: "si è conclusa la relazione tra Anna e Paolo", "l'allungamento di una sbarretta di ferro è in relazione con il calore fornito", "la frana del terreno è in relazione con il disboscamento della zona e l'abusivismo edilizio", “domani consegnerò la relazione di fisica”. Sono tutte espressioni che ci danno informazioni di un qualche collegamento tra gli argomenti (persone, cose) ai quali il termine relazione si riferisce.
Dal punto di vista matematico diamo la seguente

DEFINIZIONE. Si dice **relazione in un insieme A** un **predicato binario** che lega due elementi dell'insieme.

Esempio

Nell'insieme A = {3,5,6,9,30} è introdotto il predicato binario "essere multiplo di"; con esso formiamo le proposizioni vere scegliendo soggetto e complemento nell'insieme A:

6 è multiplo di 3; 9 è multiplo di 3; 30 è multiplo di 3; 30 è multiplo di 5;
30 è multiplo di 6; 3 è multiplo di 3; 5 è multiplo di 5; 6 è multiplo di 6;
9 è multiplo di 9; 30 è multiplo di 30.

Il predicato "essere multiplo" genera nell'insieme A una relazione matematica, esso tuttavia non è il solo che permette di collegare tra loro due elementi di quell'insieme.

140 Nell'insieme A = {3,5,6,9,30} considera il predicato "essere minore di"; con esso forma proposizioni vere aventi come soggetto e come complemento due elementi di A.

p1: 9 è minore di 30 p2: .... p3: ....

Se chiamiamo con $\Re$ il predicato binario che definisce la relazione introdotta nell'insieme, per indicare

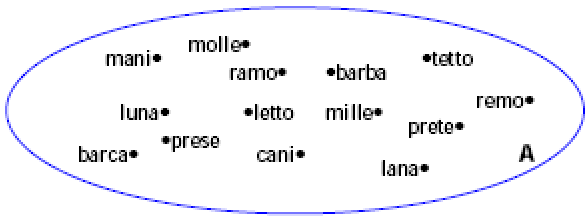
sinteticamente che la proposizione avente come soggetto *a*, come complemento *b* ed $\Re$ come predicato, scriviamo $a \Re b$ e diremo sinteticamente che a è in relazione con b.

Esempio

Con riferimento all'esempio precedente si ha: A = {3,5,6,9,30} $\Re$: "essere multiplo di"
allora scriviamo: per qualunque *a* e *b* appartenenti ad *A*, $a \Re b$ se e solo se *a* è multiplo di *b*
in particolare:
$30 \Re 6$; $9 \Re 3$; $30 \Re 3$; $6 \Re 3$; $30 \Re 5$; $3 \Re 3$; $5 \Re 5$; $6 \Re 6$; $9 \Re 9$; $30 \Re 30$
Abbiamo così formato un insieme di **coppie ordinate** di elementi tra loro in relazione:
$30 \Re 5$ può anche essere indicata con (30;5).

DEFINIZIONE. Chiamiamo **insieme della relazione** (in simboli $\mathbf{G_R}$) l' insieme delle coppie ordinate i cui elementi sono gli argomenti del predicato binario, ossia sono in relazione tra di loro. Esso risulta essere un **sottoinsieme** del prodotto cartesiano dell'insieme A con se stesso. Si rappresenta per proprietà caratteristica nel seguente modo $G_R = \{(a,b) \in A \times A / a \Re b\}$.

141 Nell'insieme A rappresentato con un diagramma di Eulero-Venn introduciamo il predicato $\Re$: "avere una sola lettera diversa". Costruisci l'insieme $\mathbf{G}_R$.



Traccia di soluzione:
per costruire l'insieme $\mathbf{G}_R$ devo formare le coppie ordinate ricordando che per qualunque *a* e *b* appartenenti ad *A*, $a \Re b$ se e solo se "*a* ha una sola lettera diversa da *b*", ad esempio $prete \Re prese$.

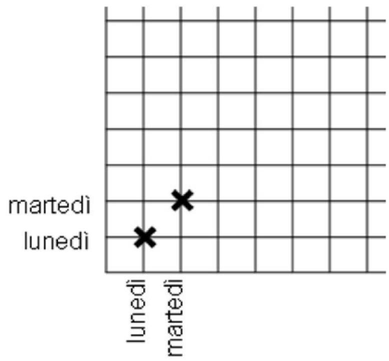
142 Nell'insieme *C*={Como, Milano, Venezia, Parma, Brescia, Aosta, Torino, Genova, Imperia, Arezzo, Firenze, Grosseto, Napoli, Campobasso, Catanzaro, Bologna, Vercelli, Salerno} è introdotta la relazione $\Re$: "essere nella stessa regione". Costruisci l'insieme $\mathbf{G}_R$.

143 Nell'insieme *S*={x / x è il nome di un giorno della settimana}è introdotta la relazione $\Re : x \in S, y \in S, x \Re y$ se e solo se "x ha lo stesso numero di sillabe di y". Costruisci l'insieme $\mathbf{G}_R$.

144 Nell'insieme *F*={1, 3, 4, 6, 5, 9, 0, 2} è introdotta la relazione $\Re$ "essere consecutivi". Costruisci l'insieme $\mathbf{G}_R$.

Grafico di una relazione

145 Considera l'insieme *S* = {x / x è il nome di un giorno della settimana}, completa la rappresentazione grafica dell'insieme *S* x *S* , evidenzia poi con una crocetta gli elementi dell'insieme $\mathbf{G}_R$ determinato dalla relazione "x ha lo stesso numero di sillabe di y".

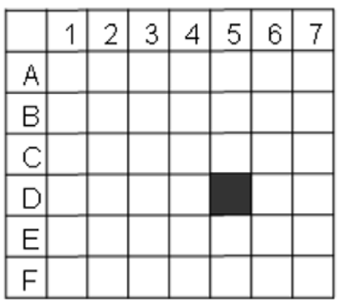


146 Considera l'insieme *F*={1, 3, 4, 6, 5, 9, 0, 2}; fai la rappresentazione grafica dell'insieme *F* x *F* e metti in evidenza con una crocetta gli elementi dell'insieme $\mathbf{G}_R$ determinato dalla relazione "essere consecutivi".

Dal momento che una relazione in un insieme *Y* determina un sottoinsieme del prodotto cartesiano *Y* x *Y* è comodo rappresentare una relazione nello stesso diagramma usato per rappresentare il prodotto cartesiano.
Una relazione può quindi essere rappresentata attraverso un grafico cartesiano.

Matrice o tabella di una relazione

Nella figura accanto è rappresentata la classica griglia per il gioco della battaglia navale. Ogni cella è individuata da una coppia ordinata il cui primo elemento (una lettera dell'alfabeto), indica la riga, il secondo (un numero) indica la colonna; così la coppia (D,5) indica la cella annerita.



147 Considera nell'insieme A = {-1,+3,-7,+5,-2,+4,+10} la relazione $\Re : x\in A , y\in A , x \Re y$ se e solo se "x è concorde con y". Costruiamo una tabella a doppia entrata riportando in orizzontale e in verticale gli elementi dell'insieme A.

Fissa l'attenzione su una cella e segui le istruzioni:

se $a \Re b$

metti 1 nella cella (a,b)

altrimenti

metti 0 nella cella (a,b)

	-1	+3	-7	+5	-2	+4	+10
-1	1						
+3							
-7							
+5			0				
-2							
+4							
+10							

Prosegui tu seguendo l'esempio.

Alla fine tutte le celle sono riempite: compare zero se gli elementi della coppia ordinata non sono in relazione, compare 1 al contrario. La relazione $\Re$ è completamente rappresentata. La tabella costruita si chiama **matrice della relazione**.
Una relazione può sempre essere rappresentata attraverso una matrice.

148 Nell'insieme *S*={x / x è il nome di un giorno della settimana}è introdotta la relazione $\Re : x\in S , y\in S , x \Re y$ se e solo se "x ha lo stesso numero di sillabe di y". Rappresenta la relazione con una matrice.

149 Assegnato il predicato $\Re$ "essere divisibile per" introdotto nell'insieme A = {12, 4, 2, 8, 3, 21, 5, 60}, rappresenta con una matrice la relazione $\Re$.

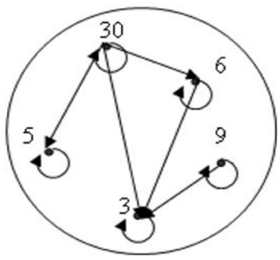
Grafo di una relazione

DEFINIZIONE. Un **grafo** è un insieme di punti detti nodi e di archi che uniscono coppie di punti.

Abbiamo visto che con un predicato si possono formare alcune proposizioni aventi rispettivamente come soggetto e come complemento elementi di un insieme: solo le proposizioni vere determinano la relazione tra gli elementi di quell'insieme e generano coppie di elementi in relazione.

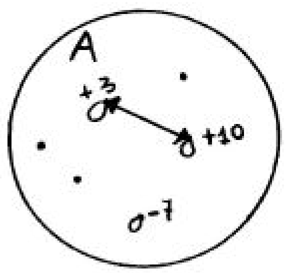
Esempi

Nel diagramma di Eulero-Venn dell'insieme A={3, 5, 6, 9, 30} rappresentiamo la relazione R = "essere multiplo di " collegando mediante una freccia gli argomenti delle proposizione vere.



Come puoi osservare l'elemento 30 è collegato con una **freccia** all'elemento 6 in quanto la proposizione: "30 è multiplo di 6" è vera, ma non all'elemento 9 poiché la proposizione: "30 è multiplo di 9" è falsa; inoltre la punta della freccia è sul numero 6 in quanto complemento del predicato "essere multiplo"; infine su ciascun elemento abbiamo messo un **anello o cappio** per indicare che ogni elemento è in relazione con se stesso essendo vera per ogni elemento a dell'insieme A la proposizione: "a è multiplo di a".

150 Completa la rappresentazione con frecce della relazione $\Re : x\in A , y\in A , x \Re y$ se e solo se "x è concorde con y" nell'insieme A = {-1,+3,-7,+5,-2,+4,+10}.

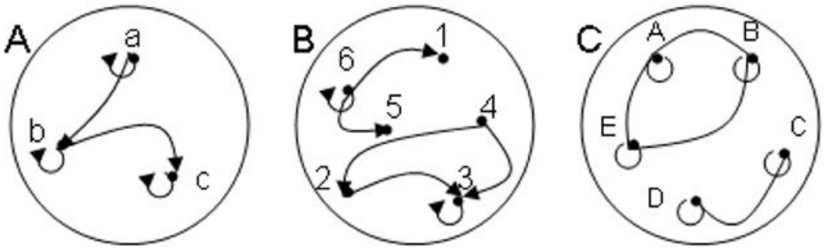


Nel completare il disegno dell'esercizio precedente hai dovuto utilizzare una freccia con due punte, infatti le proposizioni "+3 è concorde con +10" e "+10 è concorde con +3" sono entrambe vere. Quando si ha questo caso si può omettere la punta della freccia utilizzando un **arco** che collega gli argomenti del predicato.

Una relazione può essere rappresentata attraverso un grafo.

151 Nell'insieme A = {1,2,3,4,5,6,7,8,9} è introdotto il predicato *R*: "essere il doppio "; costruisci l'insieme $\mathbf{G}_R$, rappresenta la relazione nei tre modi descritti sopra: con un grafico cartesiano, con una matrice, con un grafo.

152 Sono assegnati i grafi di tre relazioni R_1, R_2, R_3 introdotte in altrettanti insiemi *A, B, C* ; deduci da essi gli elementi di ciascun insieme e costruisci per ciascuna relazione l'insieme $\mathbf{G}_R$



153 Rappresenta nei tre modi che sono stati descritti (con un grafico cartesiano, con una matrice, con un grafo) la relazione *R:* "essere nati nello stesso mese" introdotta nell'insieme *C* degli alunni della tua classe.

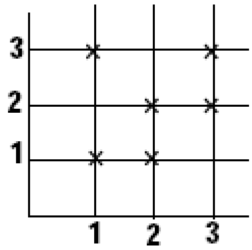
154 Nell'insieme $H=\{x\in\mathbb{N}/21<x<40\}$, $x\Re y$ se e solo se "la somma delle cifre di x è uguale alla somma delle cifre di y". Costruisci $\mathbf{G}_R$ e rappresenta la relazione con una matrice.

Scegli la risposta corretta:

155 Una relazione ***R*** introdotta in un insieme A determina:

[A] un sottoinsieme di A [B] l'insieme $A\times A$ [C] un insieme di coppie
[D] un grafico cartesiano [E] un sottoinsieme di $A\times A$

156 Rappresenta con un grafo la relazione ***R*** rappresentata nel grafico cartesiano



►8. Proprietà delle relazioni

Proprietà riflessiva

Esempi

Nell'insieme T = {7, 8, 12, 34, 100} è introdotta la relazione
R: "essere divisore di".
Puoi osservare che ogni numero è divisore di se stesso, cioè ogni elemento dell'insieme è in relazione con se stesso. Una relazione di questo tipo si dice che gode della proprietà riflessiva.

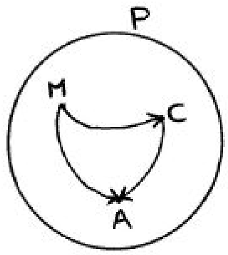
Osserva però che nell'insieme *N* dei numeri naturali la relazione "essere divisibile" non è riflessiva poiché zero non è divisibile per se stesso.

DEFINIZIONE. Una relazione $\Re$ in un insieme *A* gode della **proprietà riflessiva** quando ogni elemento è in relazione con se stesso, ossia **per qualunque *x* dell'insieme *A* si ha** $x\Re x$.

157 Quali relazioni sono riflessive?

Insieme	relazione	è riflessiva?	
Numeri naturali	essere divisibile per	[SI]	[NO]
Libri che hai in cartella	avere lo stesso numero di pagine	[SI]	[NO]
Rette del piano	essere perpendicolare a	[SI]	[NO]
Rette del piano	essere parallela a	[SI]	[NO]
Poligoni	avere lo stesso numero di lati	[SI]	[NO]
Città della Lombardia	terminare con la stessa vocale	[SI]	[NO]
Parole italiane	essere il plurale di	[SI]	[NO]

Proprietà antiriflessiva



Esempi

Nell'insieme delle persone P = {Marco, Antonio, Carlo} è data la relazione *R*: "essere più alto" rappresentata con il grafo a fianco.
Puoi notare che nessun elemento è in relazione con se stesso. In effetti nessuno può "essere più alto" di se stesso.

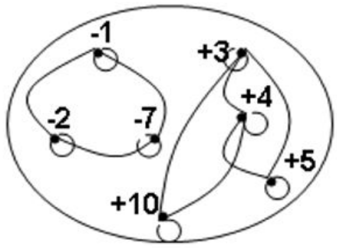
DEFINIZIONE. Una relazione $\Re$ in un insieme *A* gode della **proprietà antiriflessiva** quando nessun elemento è in relazione con se stesso, ossia **per nessun elemento *x* di *A* si ha** $x \Re x$.

158 Quali delle seguenti relazioni sono antiriflessive?

Insieme	relazione	è antiriflessiva?
Numeri naturali	essere multiplo di	[SI] [NO]
Rette del piano	essere perpendicolare a	[SI] [NO]
Poligoni	avere lo stesso perimetro	[SI] [NO]
Città del Piemonte	avere più abitanti di	[SI] [NO]
Parole italiane	essere il femminile di	[SI] [NO]
Fiumi italiani	essere affluente	[SI] [NO]
Persone	essere figlio di	[SI] [NO]

Proprietà simmetrica

Esempi



Nel grafo è rappresentata la relazione *R*: "essere concorde" nell'insieme dei numeri A = {-1,+3,-7,+5,-2,+4,+10}; per collegare elementi in relazione abbiamo usato archi poiché, ad esempio, le proposizioni "+3 è concorde con +10" e "+10 è concorde con +3" sono entrambe vere. Per questa relazione si può osservare che se un elemento dell'insieme è in relazione con un altrro allora anche quest'ultimo è in relazione con il primo:

$-1 \Re -7$ ma anche $-7 \Re -1$; $+3 \Re +5$ ma anche $+5 \Re +3$, e così via.

DEFINIZIONE. Una relazione $\Re$ introdotta in un insieme *A* gode della **proprietà simmetrica** quando risultano vere le due proposizioni che si ottengono scambiando soggetto e complemento; ossia **per qualunque *x* e *y* appartenenti all'insieme *A* se vale** $x \Re y$ **allora vale anche** $y \Re x$ **.**

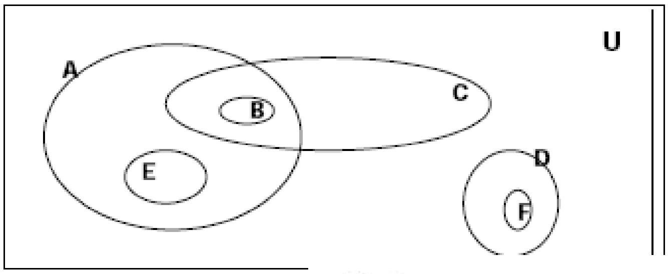
159 Riconosci le relazioni simmetriche:

Insieme	relazione	è simmetrica?
Città d'Italia	appartenere alla stessa regione	[SI] [NO]
Rette del piano	essere perpendicolari	[SI] [NO]
Solidi	avere lo stesso volume	[SI] [NO]
Persone	essere il padre di	[SI] [NO]
Persone	essere fratello o sorella di	[SI] [NO]
Numeri naturali	avere lo stesso numero di cifre di	[SI] [NO]
Fiumi d'Europa	essere affluente	[SI] [NO]
Numeri interi	essere il quadrato di	[SI] [NO]

Le relazioni degli ultimi due casi non godono della proprietà simmetrica. Infatti:

- la proposizione "Il Ticino è un affluente del Po" è vera, ma non lo è la proposizione che da essa si ottiene scambiando il soggetto con il complemento;
- se un numero intero è il quadrato di un altro (ad esempio +25 è il quadrato di +5), non è vero che +5 è il quadrato di +25.

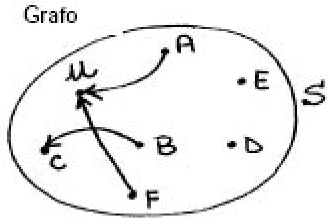
Proprietà antisimmetrica



Esempi

Il diagramma di Venn in figura rappresenta un insieme U e alcuni suoi sottoinsiemi.

Consideriamo ora l'insieme di insiemi
S = {U, A, B, C, D, E, F}
e la relazione *R*: "essere sottoinsieme proprio di"; completa il grafo della relazione.



Certamente nel completare il grafo non avrai usato archi: è evidente che le proposizioni "B è sottoinsieme proprio di C" e "C è sottoinsieme proprio di B" non possono essere entrambe vere. Anzi, la verità della prima implica necessariamente la falsità della seconda.

DEFINIZIONE. Una relazione $\Re$ introdotta in un insieme *A* gode della **proprietà antisimmetrica** quando non possono essere vere contemporaneamente le proposizioni che si ottengono scambiando il soggetto con il complemento, se soggetto e complemento sono diversi tra loro; ossia **per qualunque *x* e *y* dell'insieme *A* se** $x \neq y$ **e** $x \Re y$ **non è vero che** $y \Re x$ **.**

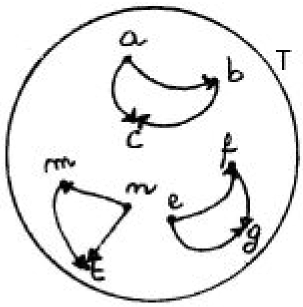
160 Riconosci le relazioni antisimmetriche

Insieme	relazione	è antisimmetrica?
Numeri naturali	essere divisibile per	[SI] [NO]
Rette del piano	essere perpendicolare a	[SI] [NO]
Poligoni	avere lo stesso perimetro	[SI] [NO]
Angoli	essere complementare a	[SI] [NO]
Città del Lazio	essere nella stessa provincia di	[SI] [NO]

Proprietà transitiva

Esempi

Nel grafo a lato è rappresentata una relazione ***R*** introdotta in un insieme T. Dall'analisi della situazione rappresentata possiamo affermare che dalla verità di (a ***R*** b e b ***R*** c) segue la verità di a ***R*** c.
Analizzando gli altri elementi e la relazione ***R***, possiamo osservare che essendo vera (e ***R*** f e f ***R*** g) è vera anche e ***R*** g; inoltre si ha che essendo vera (n ***R*** m e m ***R*** t) è vera anche n ***R*** t.



Dal grafo di una relazione transitiva puoi osservare che le terne di elementi in relazione costituiscono i vertici di un triangolo; non è facile invece individuare la proprietà transitiva dalle altre rappresentazioni grafiche.

DEFINIZIONE. Una relazione $\Re$ introdotta in un insieme A gode della **proprietà transitiva** quando se $a \Re b$ e $b \Re c$ allora risulta anche $a \Re c$, con a, b, c elementi qualsiasi dell'insieme A.

161 Verifica se, nell'insieme *N* dei numeri naturali, la relazione *R*: "avere lo stesso numero di cifre" gode della proprietà transitiva. Completa le proposizioni e rappresenta ***R*** con un grafo:

da	18 ***R*** 50	e	50 ***R*** …	segue	… ***R*** ...
da	… ***R*** 555	e	... ***R*** 267	segue	… ***R*** ...

162 Indica quale tra le seguenti relazioni è transitiva:

Insieme	relazione	è transitiva?
numeri naturali	essere multiplo di	[SI] [NO]
regioni d'Italia	essere più a nord di	[SI] [NO]
numeri interi	essere minore di	[SI] [NO]
rette del piano	essere perpendicolari	[SI] [NO]
persone	essere padre di	[SI] [NO]
stati d'Europa	confinare con	[SI] [NO]

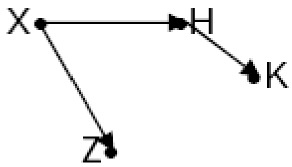
163 Dai una rappresentazione tabulare dell'insieme $H=\{x\in\mathbb{N}/0\leqslant x\leqslant 12\}$; determina il resto della divisione di ciascun numero di H con 4, compila la tabella come suggerito nell'esempio:

operazione	0:4	1:4	2:4										12:4
resto	0	1											0

Introduciamo in H la relazione $x\Re y$ se e solo se "x e y hanno lo stesso resto nella divisione per 4". Costruisci il grafo della relazione e stabilisci se gode della proprietà transitiva.

La stessa relazione $\Re$ introdotta nell'insieme dei numeri naturali N è una relazione transitiva?

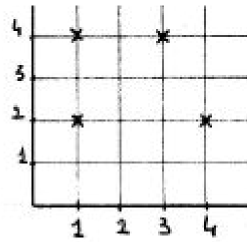
164 Completa il grafo in modo che la relazione rappresentata diventi transitiva:



165 Quale proposizione è falsa?

a) se una relazione è simmetrica, all'insieme **G**$_R$ appartengono le coppie del tipo (a,b) e (b,a). V F
b) il grafico cartesiano è un modo per rappresentare una relazione. V F
c) la matrice di una relazione riflessiva presenta tutti uno sulla diagonale discendente. V F
d) la matrice di una relazione antiriflessiva non presenta alcun uno sulla diagonale discendente. V F
e) se una relazione è transitiva, allora è anche simmetrica. V F
f) se $(x,y)\in G_R$ e $(y,z)\in G_R$ qualche volta si ha $(x,z)\in G_R$ V F
g) se $(x,y)\in G_R$ si ha sempre $(y,x)\in G_R$ V F
h) una relazione riflessiva presenta nel suo grafo il cappio su ciascun elemento V F
i) una relazione binaria è individuata da un predicato che lega due argomenti dell'insieme A V F
j) una relazione binaria genera un sottoinsieme del prodotto cartesiano $A\times A$ V F

166 Con riferimento al grafico cartesiano disegnato di lato, quale è vera?



[A] nel suo grafo almeno un elemento non presenta il cappio
[B] la relazione è antisimmetrica
[C] la relazione è transitiva
[D] l'insieme G_R è costituito dalle coppie (1,2) (1,4) (3,4) (4,2)
[E] la relazione gode della proprietà simmetrica e riflessiva

167 Quali proprietà verificano le seguenti relazioni?

R = riflessiva; AR = antiriflessiva; S = simmetrica; AS = antisimemtrica; T = transitiva

	Insieme	relazione	proprietà
a)	poligoni del piano	avere lo stesso numero di lati	R–AR–S–AS–T
b)	numeri naturali	avere lo stesso numero di cifre	R–AR–S–AS–T
c)	numeri naturali	essere minore di	R–AR–S–AS–T
d)	numeri naturali	essere divisibile per	R–AR–S–AS–T
e)	$A=\{x\in\mathbb{N}/1\leqslant x\leqslant 5\}$	essere multiplo di	R–AR–S–AS–T

►9. Relazioni di equivalenza

Esempi

Completa la tabella segnando le proprietà di cui gode ciascuna relazione indicata (Ri= riflessiva, Si=simmetrica, Tr=transitiva).

	relazione	insieme	proprietà
a)	Avere lo stesso perimetro	poligoni	[Ri] [Si] [Tr]
b)	Essere fratello di	persone	[Ri] [Si] [Tr]
c)	Essere figlio di	persone	[Ri] [Si] [Tr]
d)	Essere più alto di	persone	[Ri] [Si] [Tr]
e)	Avere gli angoli rispettivamente congruenti	triangoli	[Ri] [Si] [Tr]
f)	Iniziare con la stessa lettera	parole	[Ri] [Si] [Tr]
g)	Giocare nella stessa squadra	calciatori	[Ri] [Si] [Tr]
h)	$(a,b)\Re(x,y)$ se e solo se a+b=x+y	N x N	[Ri] [Si] [Tr]

Svolgimento

La relazione a) gode delle tre proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva; infatti

- "il poligono p ha lo stesso perimetro di se stesso" è vera per qualunque poligono (proprietà Riflessiva);
- "il poligono p_1 ha lo stesso perimetro del poligono p_2" implica la verità della proposizione "il poligono p_2 ha lo stesso perimetro di p_1", qualunque siano i due poligoni p_1 e p_2 (proprietà Simmetrica);
- se "il poligono p_1 ha lo stesso perimetro di p_2" e "p_2 ha lo stesso perimetro di p_3" allora si ha anche che "p_1 ha lo stesso perimetro di p_3", qualunque siano i poligoni p_1, p_2, p_3 (proprietà Transitiva).

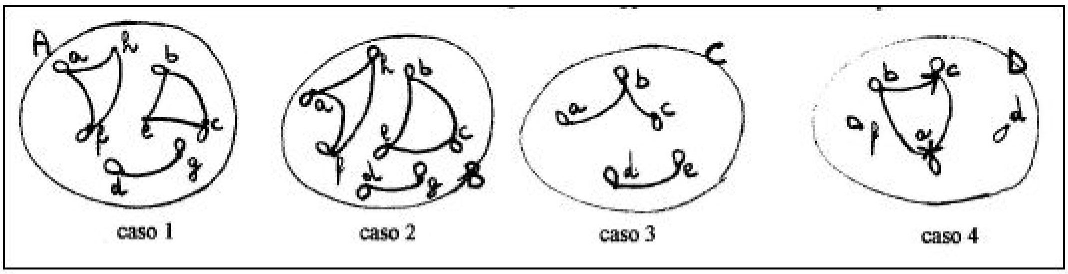
Verifica tu se anche le altre relazioni godono delle tre proprietà **R**iflessiva, **S**immetrica, **T**ransitiva, come "essere fratello di", "avere gli angoli rispettivamente uguali", "iniziare con la stessa lettera".

DEFINIZIONE. Chiamiamo **relazione d'equivalenza** la relazione che gode delle tre proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.

168 Quali delle seguenti sono relazioni di equivalenza?

	relazione	insieme	è d'equivalenza?	
a)	essere multiplo	numeri naturali	[V]	[F]
b)	avere lo stesso numero di sillabe	parole italiane	[V]	[F]
c)	essere minore	interi relativi	[V]	[F]
d)	vincere	squadre di calcio	[V]	[F]
e)	avere lo stesso numero di angoli	poligoni	[V]	[F]
f)	essere il plurale	parole italiane	[V]	[F]
g)	essere il cubo	numeri italiani	[V]	[F]

169 Analizza i seguenti grafi e individua quello che rappresenta una relazione d'equivalenza:



- Nel caso 1 non è rappresentata una relazione d'equivalenza perché ....
- Nel caso 2 la presenza del cappio su ciascun elemento indica che la relazione gode della proprietà ...., il fatto che coppie di elementi siano collegate da archi indica che vale la proprietà ...., infine terne di elementi sono vertici di .... e quindi la relazione gode della proprietà ....

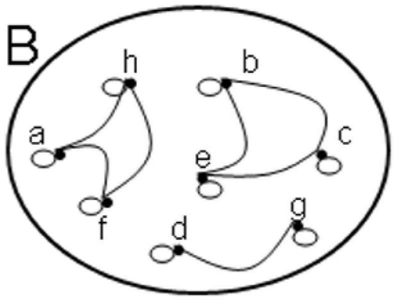
In conclusione …

- La relazione del caso 3 non gode della proprietà ……………… pertanto … ... … … … . . . .
- Nel caso 4 sussistono le proprietà .... e ...., ma non la proprietà ……….......................... pertanto la relazione ....

Esempi

Dato l'insieme B = {a, b, c, d, e, f, g, h} costruiamo alcuni suoi sottoinsiemi seguendo le istruzioni:

ripeti
scegliamo a caso un elemento di B;
formiamo un sottoinsieme contenente l'elemento scelto e tutti gli altri che con quello sono in relazione;
***finché** non abbiamo esaurito tutti gli elementi.*

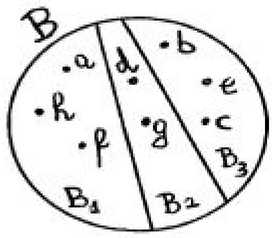


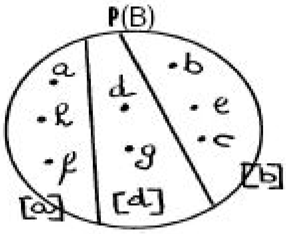
Svolgimento

- Scegliamo l'elemento *a*, formiamo il sottoinsieme avente come elementi *a*, *h*, *f* che con a sono in relazione: $B_1 = \{a, h, f\}$.

Gli elementi dell'insieme B non sono esauriti, quindi ripetiamo i passi scegliendo un elemento tra quelli rimasti.

- Scegliamo *g* e formiamo il sottoinsieme B_2 avente come elementi *g* e *d*, l'unico che con esso è in relazione: $B_2 = \{g, d\}$.
  Gli elementi dell'insieme *B* non sono esauriti, quindi ripetiamo i passi scegliendo un elemento tra quelli rimasti.
- Scegliamo *c* e formiamo il sottoinsieme B_3 avente come elementi *c, e, b* che con esso sono in relazione: $B_3 = \{c, e, b\}$.





Abbiamo esaurito gli elementi dell'insieme assegnato.
Abbiamo così ottenuto tre sottoinsiemi dell'insieme B, che hanno queste particolari caratteristiche

- nessuno è vuoto,
- a due a due sono disgiunti,
- la loro unione è l'insieme B.

Premettiamo le definizioni:

DEFINIZIONE. Determinare una **partizione di un insieme X** significa suddividere l'insieme stesso in un numero finito di sottoinsiemi $X_1, X_2, X_3, \dots\dots\dots X_n$, detti **classi**, tali che

1) nessun sottoinsieme è vuoto,
2) a due a due sono disgiunti,
3) la loro unione è l'insieme X.

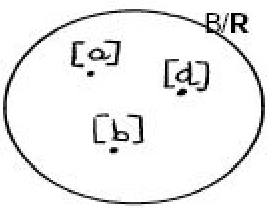
La partizione di X è l'insieme i cui elementi sono le classi $X_1, X_2, X_3, \dots\dots\dots X_n$, e viene indicato con $P(X) = \{X_1, X_2, X_3, \dots\dots\dots X_n\}$.

DEFINIZIONE. Quando in un insieme *A* è stata introdotta una relazione d'equivalenza, si chiama **classe d'equivalenza** ogni sottoinsieme di *A* contenente tutti e soli gli elementi tra loro in relazione. Si viene così a determinare **una partizione dell'insieme *A* in classi d'equivalenza** ciascuna indicata racchiudendo in parentesi quadrate un suo qualunque elemento.

Nell'esempio sopra riportato le classi d'equivalenza sono i sottoinsiemi di B indicati con [a] , [b] , [d] ; la partizione dell'insieme *B* in classi d'equivalenza è rappresentata con il diagramma di Eulero-Venn a fianco disegnato.

DEFINIZIONE. Si chiama **insieme quoziente** di un insieme *A* rispetto a una relazione di equivalenza *R*, l'insieme i cui elementi sono le classi d'equivalenza determinate dalla relazione *R*. L'insieme quoziente si indica con il simbolo *A/R*.

Nel caso dell'esempio precedente si passa all'insieme quoziente B/*R* del seguente diagramma di Eulero-Venn:



Ogni volta che si ha una relazione d'equivalenza R in un insieme A, possiamo stabilire la seguente catena di passaggi :

insieme A → partizione P(A) → insieme quoziente A/R

170 Fissa l'attenzione sulla relazione *R*:" frequentare la stessa classe" introdotta nell'insieme *S* degli alunni iscritti nella tua scuola.
Verifica che *R* è una relazione d'equivalenza. Costruisci le classi d'equivalenza. Quante ne hai potuto formare? Come sono indicate nella realtà che vivi quotidianamente? Determina la partizione **P**(S) in classi d'equivalenza e infine l'insieme quoziente *S/R* .

171 Studia in *N* la relazione *R*: "avere la stessa cifra delle unità". Verifica se è una relazione d'equivalenza, costruisci l'insieme quoziente dopo aver risposto alle seguenti domande:

- Quanti numeri naturali sono tra loro equivalenti?
- Da quanti elementi è costituito l'insieme *N/R*?
- Qual è l'elemento che sceglieresti come rappresentante di ciascuna classe?

172 Considera la relazione *R*: "avere lo stesso resto nella divisione per due" introdotta nell'insieme N e studiane le proprietà.

- E' una relazione d'equivalenza? Se la risposta è affermativa, costruisci l'insieme quoziente *N/R*.
- Quante classi d'equivalenza hai formato?
- Puoi sfruttare quanto ottenuto per enunciare le definizioni di numero pari e di numero dispari?
- Giustifica, in base allo svolgimento dell'esercizio, l'affermazione: "L'insieme dei numeri pari è il complementare in N dell'insieme dei numeri dispari"?

173 Considera l'insieme $A=\{x\in\mathbb{N}/1\leqslant x\leqslant 20\}$ e i suoi sottoinsiemi

$A_1 = \{1, 5, 9, 13, 17\}$; $A_2 = \{2, 6,10, 14, 18\}$; $A_3 = \{3, 7, 11, 15, 19\}$; $A_4 = \{4, 8, 12, 16, 20\}$

1. Rappresenta gli insiemi con un diagramma di Eulero-Venn.
2. Si può affermare che quei sottoinsiemi determinano una partizione dell'insieme A?
3. È vero che a ciascuno dei suddetti sottoinsiemi appartengono i numeri di A aventi lo stesso resto nella divisione per 4?
4. Quei sottoinsiemi sono dunque classi d'equivalenza? Qual è il predicato della relazione che le determina?

174 Nell'insieme *N* dei numeri naturali stabilisci se è d'equivalenza la relazione *R*: "x *R* y se e solo se x ha le stesse cifre di y".

175 Nell'insieme *C* degli alunni della tua classe verifica se la relazione *R*: "x *R* y se e solo se il cognome di *x* ha la stessa lettera iniziale del cognome di *y*" è d'equivalenza; determina in caso affermativo la partizione dell'insieme *C* e l'insieme quoziente C/*R*.

176 Nell'insieme delle parole della lingua italiana verifica se la relazione x R y se e solo se x ha lo stesso numero di lettere di y è una relazione di equivalenza. In caso affermativo individua alcune classi di equivalenza.

177 Nell'insieme dei nomi dei giorni della settimana considera la relazione x R y se e solo se x e y hanno almeno tre lettere in comune. Verifica se è una relazione di equivalenza e in caso affermativo individua le classi di equivalenza.

178 Nell'insieme dei numeri naturali da 1 a 100, verifica se la relazione "x R y se e solo se x e y hanno lo stesso numero di lettere" è una relazione di equivalenza. Individura quante sono le classi di equivalenza. Scrivi tutti gli elementi delle classi di equivlenza [1] e [10].

179 Nell'insieme dei numeri naturali da 1 a 100, verifica se la relazione "x R y se e solo se x+y è dispari" è una relazione di equivalenza.

180 Nell'insieme dei nomi dei mesi dell'anno verifica se la relazione " x R y se e solo se x e y hanno almeno 3 lettere in comune è una relazione di equivalenza. Eventualmente individua le classi di equivalenza.

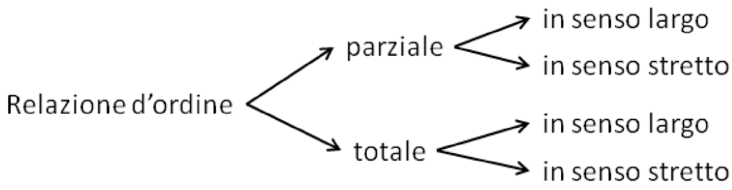
181 Sia S un insieme non vuoto in cui è definita una relazione R riflessiva e transitiva; in S si definisca la relazione # ponendo, per ogni x, y appartenenti a X , x#y se e solo se xRy e yRx. Verificare che # è relazione di equivalenza in X.

►10. Relazioni di ordine

Nel linguaggio di ogni giorno avrai certamente spesso usato espressioni come ”devo mettere in ordine i miei libri” oppure “qui non c’è ordine” e altre espressioni simili.
Anche in matematica, fin dalla scuola elementare, hai imparato a ordinare gli elementi dell’insieme dei numeri naturali: dati due numeri naturali hai imparato infatti a stabilire quale dei due è il maggiore.

DEFINIZIONE. Una relazione $\Re$, introdotta in un insieme A, si chiama **relazione d’ordine** se è antisimmetrica e transitiva.

Riguardando le varie relazioni introdotte sin qui, possiamo stabilire che esistono relazioni d’ordine di vario tipo, schematizzate nel seguente diagramma:

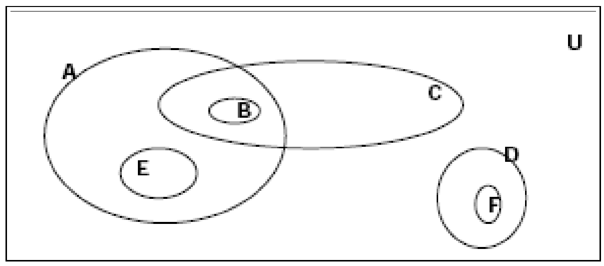


Attraverso alcuni esempi, vogliamo chiarire le differenze tra i diversi tipi; a questo scopo introduciamo la

DEFINIZIONE. Data una relazione $\Re$ d’ordine in un insieme A, **due elementi distinti** x e y sono **confrontabili** se rispetto ad $\Re$ si ha $x \Re y$ oppure $y \Re x$.

Esempio

In base al diagramma il diagramma di Eulero-Venn a fianco introduciamo nell’insieme di insiemi
S = {U, A, B, C, D, E, F}
la relazione *R*: "essere sottoinsieme di".



Ricordiamo che, dati due insiemi X e Y, X è sottoinsieme di Y quando ogni elemento di X appartiene a Y ; in simboli
$X \subseteq Y$ e si legge X è contenuto in Y o X è uguale a Y.
Vogliamo studiare le proprietà della relazione *R*.

1. Poiché ogni insieme è sottoinsieme di se stesso, possiamo dire che *R* è riflessiva.
2. Se $X \subseteq Y$ e $X \neq Y$ allora $Y \not\subset X$ quindi *R* è una relazione antisimmetrica.
3. Se $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq Z$ allora $X \subseteq Z$ quindi *R* è una relazione transitiva.

Inoltre si mette chiaramente in evidenza che esistono almeno due elementi dell’insieme S che non sono in alcun modo in relazione: ad esempio $A \not\subset D$ e $D \not\subset A$, ossia A e D non sono confrontabili.
Una relazione di questo tipo si dice relazione d’ordine parziale (si dice parziale perché almeno due elementi non sono confrontabili), **in senso largo** (perché la relazione gode anche della proprietà riflessiva).

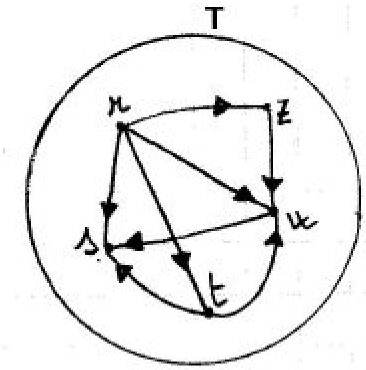
182 Riprendiamo il diagramma di Eulero-Venn dell’esempio precedente e introduciamo nell’insieme S = {U, A, B, C, D, E, F}la relazione *R*: ”essere sottoinsieme proprio di“. Studiamo le proprietà di questa relazione.
Cosa è cambiato rispetto alla relazione precedente? … … … … … … … … … … … … … … … ..
Sono ancora valide le proprietà antisimmetrica e transitiva? … … … … … … … … … … … … …
Esistono elementi di S non confrontabili? … … … … … … … … … … … … … … … … … … ...
Una relazione di questo tipo si dice relazione d’ordine parziale (esistono almeno due elementi che non sono confrontabili), **in senso stretto** (la relazione gode della proprietà antiriflessiva**).**



183 Nell'insieme M = {1, 8, 3, 4, 10, 2, 7, 0, 5, 9, 6} viene introdotta la relazione *R* così definita: "x*R*y se e solo se y –x appartiene a N".
La relazione è riflessiva? La relazione è antisimmetrica? La relazione è transitiva? È vero che due elementi distinti sono sempre confrontabili?
Una relazione di questo tipo si dice relazione d'ordine totale (due qualsiasi elementi si possono mettere in relazione, cioè sono confrontabili), **in senso largo** (la relazione gode della proprietà riflessiva)**.**

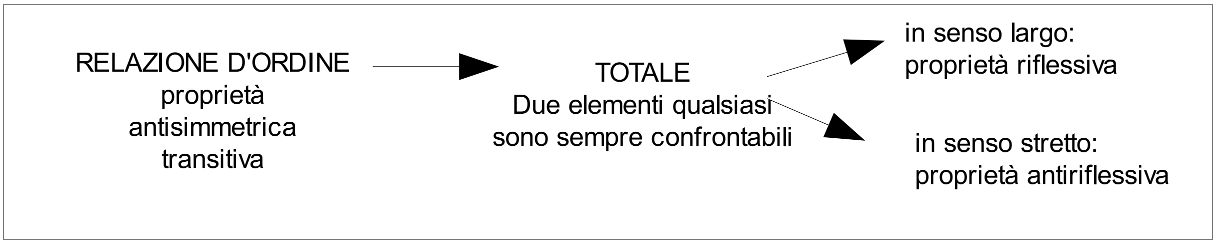
184 E' assegnata la relazione *R* nell'insieme *T*, rappresentata col grafo.
Analizzando il grafo, rispondi alle domande:

- La relazione è riflessiva? … …
- La relazione è antisimmetrica? … …
- La relazione è transitiva? … ….
- Due elementi distinti sono sempre confrontabili? … …



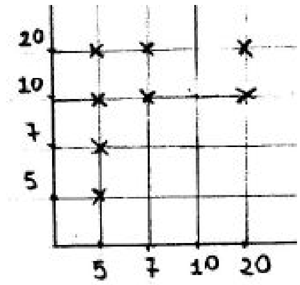
Alla prima domanda avrai risposto negativamente: nessun elemento dell'insieme *T* è in relazione con se stesso, mentre valgono le proprietà antisimmetrica e transitiva; infine scelti due elementi qualsiasi dell'insieme *T*, essi sono sempre confrontabili.

Una relazione di questo tipo si dice relazione d'ordine totale (due qualsiasi elementi sono confrontabili), **in senso stretto** (la relazione gode della proprietà antiriflessiva)**.**



185 Verifica che la relazione *R*: "essere divisore" introdotta nell'insieme *J* = {3, 6, 10, 15, 21} è una relazione d'ordine parziale in senso largo.

186 Perché la relazione *R* assegnata con il grafico cartesiano riportato a lato, pur essendo una relazione d'ordine non può essere classificata in nessuna delle tipologie studiate? Dai una breve motivazione indicando quali proprietà non sono soddisfatte dalla relazione rappresentata.



187 Nell'insieme degli studenti della tua classe determina le proprietà della relazione *R*: "x*R*y se e solo se l'altezza di *x* non supera l'altezza di *y*".
È una relazione d'ordine? Di quale tipo?

188 Nell'insieme *A* = {12, 4, 2, 8, 3, 21, 5, 60} la relazione *R*: "essere divisibile" è una relazione d'ordine? Se lo è di che tipo di relazione si tratta? Totale, parziale, in senso largo, in senso stretto.

189 Nell'insieme *N*–{0} la relazione "essere divisibile" è d'ordine totale in senso largo?

190 Rappresenta nelle tre modalità studiate una relazione che sia solo simmetrica; ripeti le rappresentazioni per una relazione che sia almeno simmetrica. Quale significato hanno le due richieste formulate sopra?

191 L'insieme $\mathbf{G}_R$ di una relazione introdotta nell'insieme A = {a, b, c, d, e} è $\mathbf{G}_R$ = {(a,a) ; (a,b) ; (b,b) ; (d,d) ; (c,d) ; (d,e) ; (e,e) }; quale delle seguenti affermazioni è vera

[A] *R* è una relazione antiriflessiva
[B] *R* è una relazione solo antisimmetrica
[C] *R* è una relazione riflessiva
[D] *R* è una relazione transitiva e antisimmetrica

192 La relazione *R* : "essere vicini di banco" inserita nell'insieme degli alunni della tua classe è una relazione d'equivalenza? È una relazione d'ordine?

193 I tre sottoinsiemi A_1 = { 36, 135, 432}; A_2 = {65}; A_3 = {66, 3522, 93, 435} dell'insieme A = {36, 65, 66, 93, 135, 432, 435, 3522 }costituiscono una partizione dell'insieme A? Sapresti trovare una caratteristica per gli elementi di ciascun sottoinsieme? A_1, A_2, A_3 sono classi d'equivalenza?

194 Nell'insieme *N* la relazione *R*: " x *R* y se e solo se $x \cdot y$ è un numero dispari" è d'equivalenza?

195 La relazione *R* : "x *R* y se e solo se x sta nella stessa nazione di y" nell'insieme

196 *K* = {Parigi, Madrid, Milano, Siviglia, Bari, Granata, Venezia, Lione}

197 è d'equivalenza? Costruisci *A/R*.Verifica se la relazione *R* assegnata con la matrice rappresentata sotto è d'equivalenza, in caso positivo determina la partizione dell'insieme *A* = {□, ◊, ∞,∇} e l'insieme quoziente *A/R*.

	□	◊	∞	∇
□	1	1	0	0
◊	1	1	0	0
∞	0	0	1	1
∇	0	0	1	1

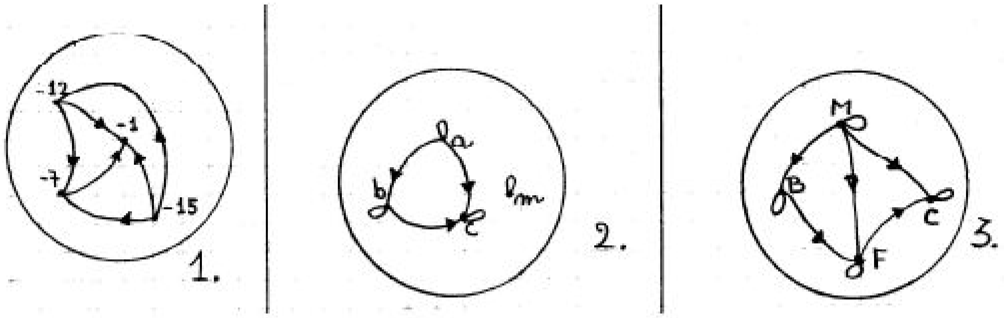
198 In un torneo di pallavolo gareggiano quattro squadre A, B, C, D; rappresenta con un grafo a frecce le seguenti informazioni, relative alle prime tre giornate:

- I° giorno: A vince contro B; C vince contro D
- II° giorno: D vince contro A; B vince contro C
- III° giorno: A vince contro C; B vince contro D

Il IV giorno si gioca la semifinale tra le prime due classificate e le altre due. Se per ogni vittoria si ottiene un punteggio di 10 punti e per ogni sconfitta un punteggio di 2 punti, quale squadra gioca la semifinale con B? Il torneo è vinto dalla squadra C. Rappresenta con un grafo a frecce la situazione della semifinale e quella della finale. È unica la risposta a quest'ultimo quesito?

199 Associa a ciascun grafo la corretta relazione d'ordine:

a) d'ordine totale largo; b) d'ordine totale stretto; c) d'ordine parziale largo

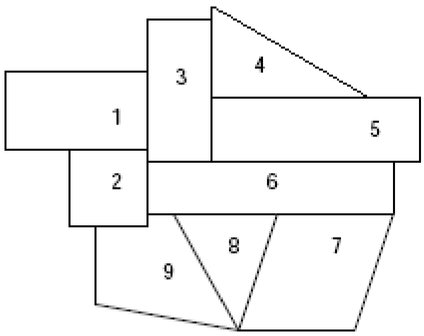


200 Nell'insieme di tutti gli iscritti a FaceBook determina le proprietà della relazione R: "x *R* y se e solo se il numero di amici di x supera il numero di amici di y". È una relazione d'ordine? Di quale tipo?

201 Nell'insieme delle parole della lingua italiana verifica se la relazione "x R y se e solo se x ha più lettere di y" è una relazione d'ordine. In caso affermativo dire se è totale o parziale, in senso largo o in senso stretto.

202 Nell'insieme dei numeri naturali, verifica se la relazione "x R y se e solo se x ha un numero di cifre maggiore del numero di cifre di y" è una relazione d'ordine. In caso affermativo dire se è totale o parziale, in senso largo o in senso stretto.

203 Andrea, insegnante di grafica, ha chiesto ai suoi alunni di usare il minimo numero di colori per colorare questo modello, in modo che poligoni confinanti non risultino con lo stesso colore.
Come si può risolvere il problema?



Traccia di soluzione:
Nell'insieme Z = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} studia la relazione R: "confinare con", rappresentandola con un grafico cartesiano e sfrutta i risultati trovati per risolvere il problema. [Risposta: 3]
La soluzione può essere trovata fissando un punto interno a ciascuna regione: due punti sono uniti se e solo se le regioni confinano, il segmento che li congiunge deve attraversare solo il loro confine comune; i punti che non sono congiunti indicano regioni che avranno lo stesso colore.

►11. Corrispondenze tra insiemi

Prime definizioni

Ti proponiamo due semplici esercizi per introdurre l'argomento che qui vogliamo trattare.

204 Quando camminiamo per la strada della nostra città, vediamo tanti segnali lungo il percorso che, attraverso simboli, ci danno informazioni sul comportamento corretto che dobbiamo tenere.
Sia A = {segnali stradali della figura sotto} e B = {descrizione del segnale}. Come nell'esempio, collega con una freccia un segnale stradale con il suo significato.



Curva pericolosa a destra

Divieto di transito

Divieto di sosta

Fermarsi e dare precedenza

Attraversamento ciclabile

205 In occasione dei giochi olimpici del 2008, artisti cinesi hanno interpretato graficamente alcuni sport tracciando i simboli riprodotti in figura.
Tra questi alcuni sono evidenziati con lettere dell'alfabeto (a,b,c,d,e). Sia F = {a, b, c, d, e} e *K* il predicato binario: "rappresenta graficamente".
Scrivi tutte le proposizioni vere che puoi formare prendendo come soggetto del predicato *K* un elemento di F e come complemento un elemento dell'insieme degli sport S={corsa, pallacanestro, tennis, tiro con l'arco, sollevamento pesi}
come nell'esempio:
Il simbolo *e rappresenta graficamente la corsa*
Il simbolo *a* …………………………………….
Il simbolo ………………………………………
Il simbolo ……………………………………..
Il simbolo ……………………………………..



In entrambi gli esercizi, hai formato coppie ordinate associando ad un elemento del primo insieme un elemento del secondo insieme mediante il predicato binario enunciato.

DEFINIZIONE. Si chiama **corrispondenza *K* tra due insiemi A e B**, il predicato binario avente come soggetto un elemento di A e come complemento un elemento di B. Essa definisce un sottoinsieme $\mathbf{G}_K$ del prodotto cartesiano AxB, costituito dalle coppie ordinate di elementi corrispondenti:
$G_k=\{(a,b)\in A\times B / a\,K\,b\}$.

Osservazione
Nel capitolo precedente abbiamo chiamato relazione un predicato binario che si riferisce a due elementi dello stesso insieme; la differenza di terminologia sta semplicemente nella sottolineatura del fatto che si considerano appartenenti allo stesso insieme oppure appartenenti a due insiemi diversi il soggetto e il complemento del predicato binario enunciato.
A seconda del contesto in cui analizziamo un predicato binario, parleremo di corrispondenza o di relazione.
Nelle pagine che seguono tratteremo di corrispondenze, mettendo in luce le loro caratteristiche.

DEFINIZIONE. Si chiama **dominio D** di una corrispondenza l'insieme A in cui si trova il soggetto della proposizione vera costruita con il predicato ***K***; **codominio C** l'insieme degli elementi che costituiscono il complemento della stessa proposizione.

Per indicare in linguaggio matematico che si è stabilita una corrispondenza tra due insiemi A e B scriviamo:

$k: A \rightarrow B$ "predicato" oppure ***K***: $A \xrightarrow{K:predicato} B$

Formalizziamo i primi 2 esercizi di questo capitolo:

$k: A \rightarrow B$ "significare", oppure $A \xrightarrow{K:significare} B$; dominio **A**; codominio **B**

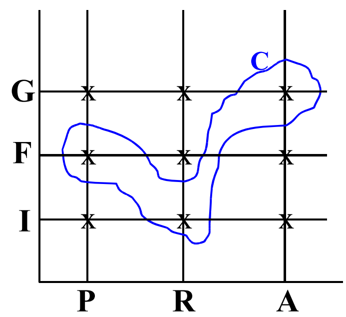
$k: F \rightarrow S$ "rappresentare graficamente", oppure $F \xrightarrow{K:rappresentare\ graficamente} S$ dominio F; codominio S.

DEFINIZIONE. Definita una corrispondenza $k: A \rightarrow B$, nella coppia (a,b) di elementi corrispondenti, **b** si chiama **immagine di a nella corrispondenza *K***. L'insieme delle immagini degli elementi del dominio è un sottoinsieme del **C**odominio chiamato **insieme Immagine**. Verrà indicato con **IM** e $\text{IM} \subseteq C$.

Rappresentazione di una corrispondenza

Esempio

Consideriamo gli insiemi: A = {**P**arigi, **R**oma, **A**tene} e B = {**I**talia, **F**rancia, **G**recia}; il prodotto cartesiano AxB è rappresentato col grafico cartesiano (i suoi elementi sono segnati con le crocette in nero).



Esso è formato dalle 9 coppie ordinate aventi come primo elemento una città (elemento di A) e come secondo elemento uno stato d'Europa (elemento di B).

Il predicato binario ***K***: "essere la capitale di", introdotto nell'insieme AxB, determina il sottoinsieme $\mathbf{G}_K$ i cui elementi sono le coppie (Parigi, Francia); (Roma, Italia) ; (Atene, Grecia).

Il dominio della corrispondenza è D = {**P**arigi, **R**oma, **A**tene} e il codominio è C = {**I**talia, **F**rancia, **G**recia}e IM = **C**.

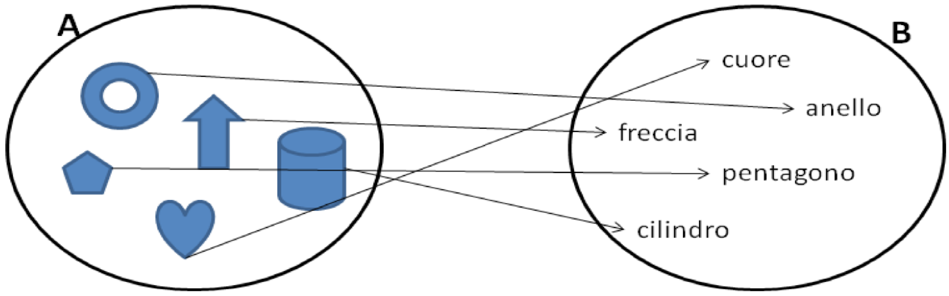
Rappresentare una corrispondenza con un grafico cartesiano

206 Rappresenta con un grafico cartesiano la corrispondenza K: "essere nato nell'anno" di dominio l'insieme A = {Galileo, Napoleone, Einstein, Fermi, Obama, } e codominio l'insieme B = {1901, 1564,1961,1879,1769,1920,1768} . Rappresenta per elencazione il sottoinsieme G_K del prodotto cartesiano AxB. Stabilisci infine gli elementi dell'immagine IM.

207 L'insieme A={casa, volume, strada, ufficio, clavicembalo, cantautore, assicurazione} è il codominio della corrispondenza *K*: "essere il numero di sillabe di" il cui dominio è $X = \{x \in \mathbb{N} / 0 < x < 10\}$. Rappresenta con un grafico cartesiano la corrispondenza assegnata, evidenzia come nel primo esempio di questo paragrafo l'insieme G_K , scrivi per elencazione l'insieme IM .

Esempio

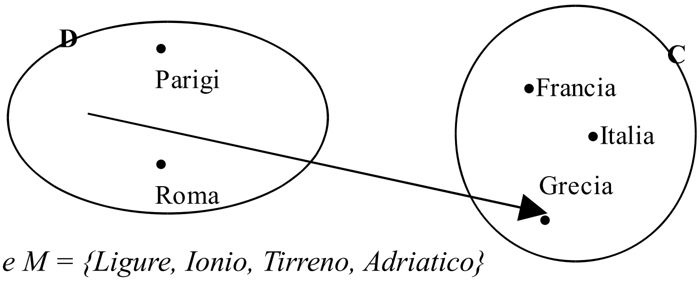
Nella figura sottostante sono rappresentati gli insiemi A e B con diagrammi di Eulero-Venn;



Collegando con una freccia, ciascun elemento di A con la sua forma, possiamo rappresentare con un grafico sagittale la corrispondenza ***K***: "essere di forma" tra gli insiemi assegnati.
A risulta essere il **D**ominio e **B** il **C**odominio della corrispondenza; **IM = C.** La freccia che collega ogni elemento del dominio con la sua immagine rappresenta il predicato ***K***.

Rappresentare una corrispondenza con un grafico sagittale

208 Completa la rappresentazione con grafico sagittale della corrispondenza "essere capitale di" .
La freccia che collega gli elementi del dominio con quelli del codominio rappresenta il predicato ***K***: " essere la capitale di".

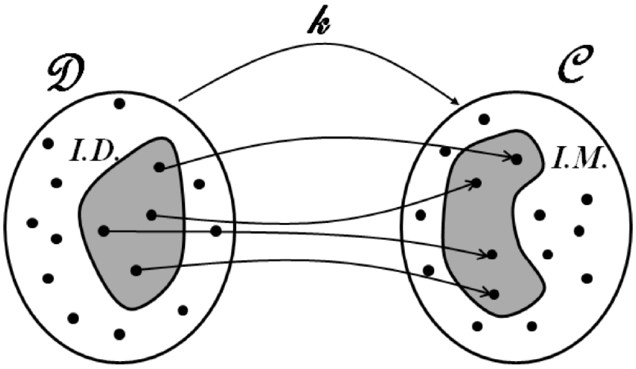


Esempio

Consideriamo gli insiemi R = {regioni d'Italia} e M = {Ligure, Ionio, Tirreno, Adriatico} e la corrispondenza $k : R \rightarrow M$ *"essere bagnata/o da"; **R** è il **D**ominio e **M** il **C**odominio di questa corrispondenza.*
L'insieme $\mathbf{G}_K$ delle coppie ordinate aventi come primo elemento una regione e come secondo elemento un mare è:
$\mathbf{G}_K$ = {(Liguria, Ligure); (Toscana, Tirreno); (Lazio, Tirreno); (Campania, Tirreno); (Basilicata, Tirreno); (Calabria, Tirreno); (Calabria, Ionio); (Puglia, Ionio); (Puglia, Adriatico); (Molise, Adriatico); (Abruzzo, Adriatico); (Emilia-Romagna, Adriatico); (Marche, Adriatico); (Veneto, Adriatico);(Friuli Venezia Giulia, Adriatico}.
Se rappresentiamo questa corrispondenza con un grafico sagittale notiamo che non tutti gli elementi del **D**ominio hanno l'immagine in ***K***. La corrispondenza definita si può generare solo in un sottoinsieme del **D**ominio.

DEFINIZIONE. Chiamiamo **I**nsieme di **D**efinizione della corrispondenza, indicato con **I.D.** il sottoinsieme del **D**ominio i cui elementi hanno effettivamente un corrispondente nel **C**odominio.

Nel grafico è rappresentata una generica situazione formatasi dall'aver definito una corrispondenza tra due insiemi; sono in grigio l'**I**nsieme di **D**efinizione, sottoinsieme del Dominio e l'insieme **IM**magine, sottoinsieme del **C**odominio.



Osserviamo che in alcuni casi si ha la coincidenza del **D**ominio con l'**I**nsieme di **D**efinizione e la coincidenza del Codominio con l'insieme IMmagine: **D=I.D.** e **C=IM**

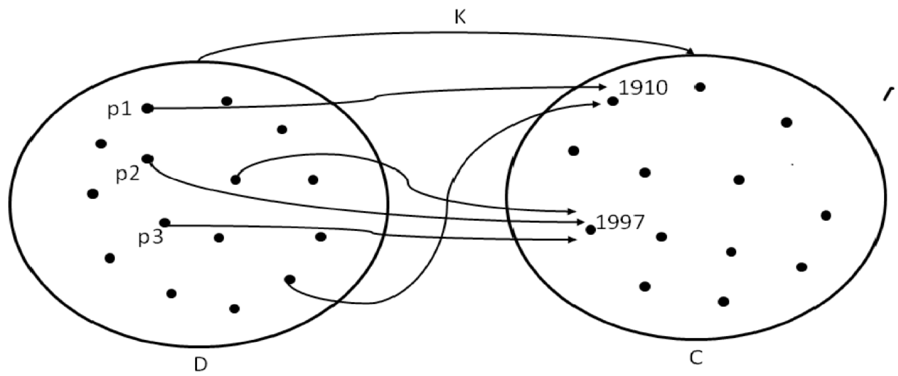
Caratteristiche di una corrispondenza

Esempio

Generalizziamo uno degli esercizi precedenti sulle date di nascita, prendiamo come dominio **D** = {persone italiane viventi} e come codominio **C** = {gli anni dal 1900 al 2009}.

Evidentemente **I.D. = D**, ogni persona ha un determinato anno di nascita, ma **più persone sono nate nello stesso anno**; inoltre IM potrebbe coincidere con C, vista la presenza sul territorio nazionale di ultracentenari, comunque scriveremo $IM \subseteq C$.

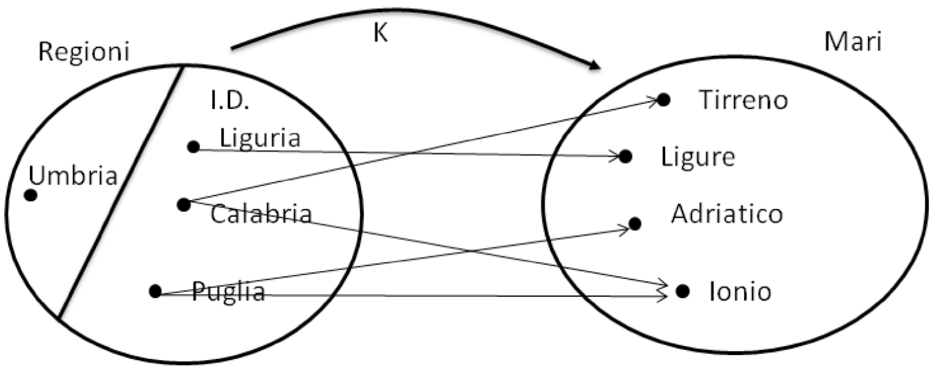
Il grafico sagittale di questa corrispondenza è del tipo:



Esempio di corrispondenza molti a uno: più persone sono nate nello stesso anno.

Esempio

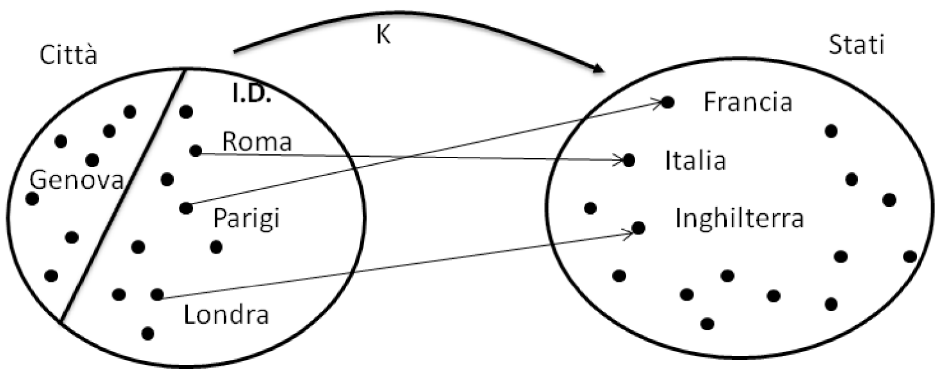
Analizziamo la corrispondenza dell'esempio precedente $k: R \to M$ "essere bagnata/o da" tra l'insieme delle regioni d'Italia e l'insieme dei mari; $I.D. \subset D$ poiché alcune regioni non sono bagnate da alcun mare; **molte regioni sono bagnate dallo stesso mare**, ma succede che **alcune regioni sono bagnate da due mari**. **IM = C**: un mare bagna almeno una regione. Il grafico sagittale di questa corrispondenza è del tipo:



Esempio di corrispondenza di tipo "molti a molti".

Esempio

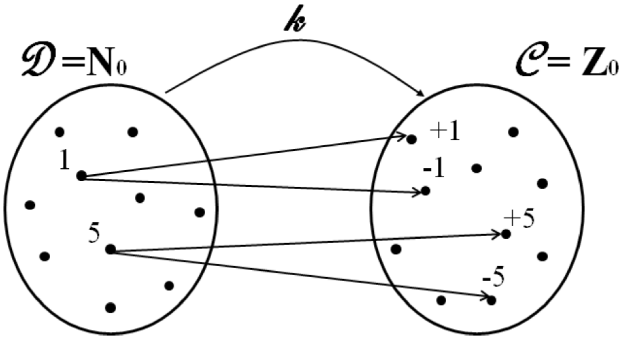
Generalizziamo la corrispondenza ***K***: "essere la capitale di" tra il dominio C={città d'Europa} e il codominio S={stati d'Europa}. È evidente che $I.D. \subset C$ non tutte le città sono capitali, mentre *IM = C* in quanto ogni stato ha la sua capitale; inoltre due città diverse non possono essere capitali dello stesso stato. Il grafico sagittale di questa corrispondenza è del tipo:



Esempio di corrispondenza "uno a uno".

Esempio

Consideriamo tra l'insieme N_0 dei numeri naturali diversi da zero e l'insieme Z_0 degli interi relativi diversi da zero la corrispondenza ***K***: "essere il valore assoluto di". Per la definizione di valore assoluto di un intero, possiamo senz'altro dire: **N_0 =D=I.D.** ; **Z_0 =C=IM.** Ma succede che **numeri opposti hanno lo stesso valore assoluto**, quindi ogni elemento di N_0 ha due immagini, per cui il grafico sagittale di questa corrispondenza è:

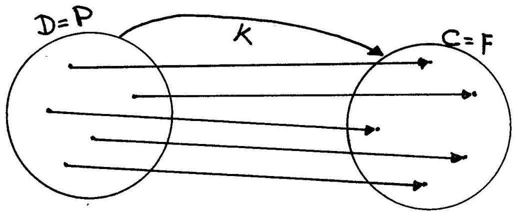


Esempio di corrispondenza "uno a molti".

DEFINIZIONE. Le **corrispondenze** di tipo molti a uno e uno a uno sono dette **univoche**; in esse ogni elemento dell'Insieme di Definizione ha una sola IMmagine nel codominio.

Esempio

Consideriamo la corrispondenza ***K*** che associa ad ogni persona il suo codice fiscale: ogni persona ha il proprio codice fiscale, persone diverse hanno codice fiscale diverso. **D**ominio e **I.D**. coincidono e sono l'insieme P={ persone}, **C**odominio e **IM** coincidono e sono l'insieme F={ codici fiscali }. Il grafico sagittale di questa corrispondenza è del tipo a fianco riportato.



È di questo stesso tipo il grafico sagittale della corrispondenza che associa ad ogni automobile la sua targa, ad ogni moto il suo numero di telaio, ad ogni maggiorenne, cittadino italiano, il suo certificato elettorale ……..

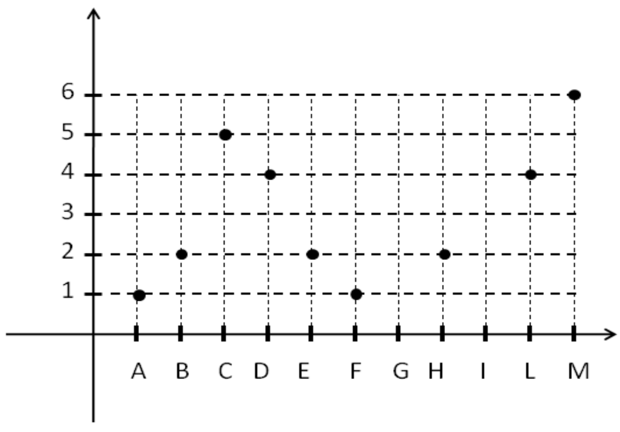
In tutti questi casi la corrispondenza è di tipo **uno → uno**, il dominio coincide con l'insieme di definizione e l'insieme immagine coincide con il codominio.

DEFINIZONE. Una corrispondenza di tipo **uno → uno** in cui **D = I.D.** e **C = IM** è detta **corrispondenza biunivoca**.

209 È univoca la corrispondenza ***K*** definita tra l'insieme P = { parola del proverbio "rosso di sera, bel tempo si spera"}e l'insieme A = {lettere dell'alfabeto italiano}che associa ad ogni parola la sua iniziale? Ti sembra corretto affermare che Dominio e Insieme di Definizione coincidono? Completa con il simbolo corretto la relazione tra insieme IMmagine e Codominio: IM ….C. Fai il grafico sagittale della corrispondenza.

210 **K** è la corrispondenza tra l'insieme N dei naturali e l'insieme degli interi relativi Z espressa dal predicato "essere il quadrato di". Ti sembra corretto affermare che Dominio e Insieme di Definizione coincidono? Perché IM = C? La corrispondenza è univoca?

211 Una corrispondenza K è assegnata con il suo grafico cartesiano:

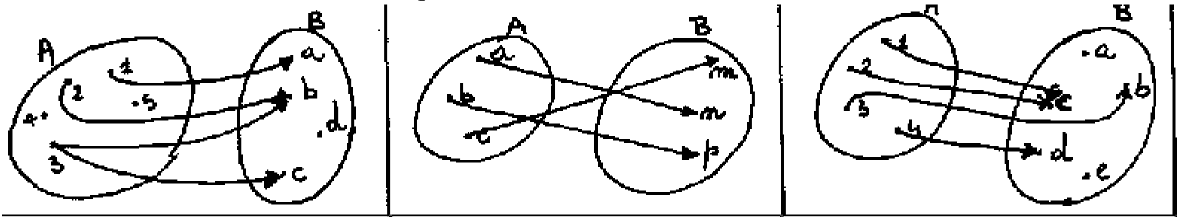


Completa e rispondi alle domande:

D = { ……………………………}
C = { ……………………………}
I.D.= { ……………………………}
IM = { ……………………………}

1. La corrispondenza è univoca?
2. 2 è l'immagine di quali elementi dell'Insieme di Definizione?
3. Quale elemento del codominio è l'immagine di M?

212 I tre grafici sagittali rappresentano altrettante corrispondenze, K_1, K_2, K_3. Completa per ciascuna di esse la descrizione schematizzata nel riquadro sottostante:



D = …………… **C** = …………… **I.D.**= ………… **IM** = ……… **Tipo** = ……………	**D** = …………… **C** = …………… **I.D.**= ………… **IM** = ……… **Tipo** = ……………	**D** = …………… **C** = …………… **I.D.**= ………… **IM** = ……… **Tipo** = ……………

213 Il Dominio della corrispondenza ***K*** è l'insieme ZxZ e Z ne è il Codomino; l'immagine della coppia (a,b) è l'intero p = a•b.

- Stabilisci l'Insieme di Definizione e l'insieme Immagine.
- Perché questa corrispondenza non è biunivoca?
- Tutte le coppie aventi almeno un elemento uguale a zero hanno come immagine ………
- 1 è l'immagine di ……………………
- Te gli elementi della coppia sono numeri concordi allora l'immagine è ………
- Un numero negativo è immagine di ………………………..

Fai degli esempi che illustrino le tue affermazioni precedenti.

214 Il Dominio della corrispondenza ***K*** è l'insieme ZxZ e Q ne è il Codomino; l'immagine della coppia (a,b) è il numero razionale $q=\frac{a}{b}$.

1) Stabilisci l'Insieme di Definizione e l'insieme IMmagine.
2) Completa:

- lo zero è immagine delle coppie ………………………..
- se gli elementi della coppia sono numeri opposti l'immagine è ……………..
- se gli elementi della coppia sono numeri concordi allora l'immagine è ………
- un numero negativo è immagine di ………………………..

fai degli esempi che illustrino le tue affermazioni precedenti.

215 In un gruppo di 10 persone, due si erano laureate in medicina e tre in legge nell'anno 1961, mentre quattro anni dopo, una si era laureata in fisica, un'altra in scienze e due in legge.
Considerate i seguenti insiemi:
P = {x / x è una persona del gruppo} ; A = {1960, 1961,1964, 1965}; F = {x / x è una facoltà universitaria}
Fatene la rappresentazione con diagramma di Eulero-Venn e studiate le corrispondenze K_1, K_2, espresse dai predicati:

K_1: "essersi laureato nell'anno" K_2: "essere laureato in"

mettendo in evidenza per ciascuna Dominio, Codominio, Insieme di Definizione, IMmagine, tipo.
Completate:

d) Nel gruppo ci sono … persone laureate in legge, di cui … nell'anno 1961 e le altre … nell'anno…
e) Nel 1961 si sono laureate … di cui … in medicina
f) Negli anni ……….. non si è laureata nessuna persona del gruppo considerato
g) Tra le10 persona … non si è laureata

N.B. ciascuno possiede una sola laurea
Maria si è laureata in fisica nello stesso anno in cui si è laureato suo marito Luca; Andrea è fratello di Luca, non è medico, ha frequentato una facoltà diversa da quella del fratello e si è laureato in un anno diverso. Supponendo che Maria, Luca, Andrea siano tra le 10 persone di cui sopra, completate:

- Maria si è laureata nell'anno …… Andrea si è laureato nell'anno ……… in ……….. Luca si è laureato nell'anno ……… in ……….. N.B. ciascuno possiede una sola laurea

►12. Funzioni o applicazioni

Diamo la seguente definizione

DEFINIZIONE. Una corrispondenza univoca tra due insiemi A e B non vuoti si chiama **funzione o applicazione** di A in B se e solo se Dominio = Insieme di Definizione = A .

Esempio

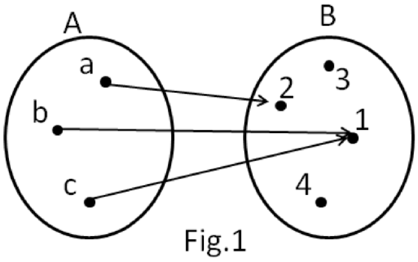


Fig.1

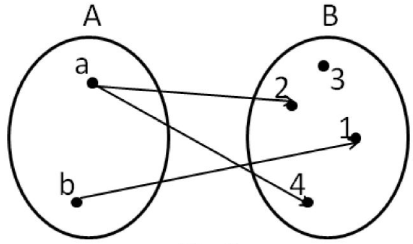


Fig.2

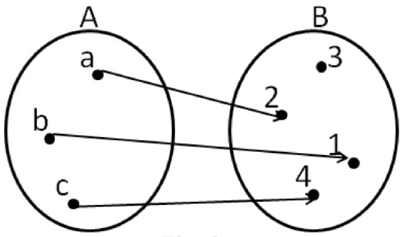


Fig.3

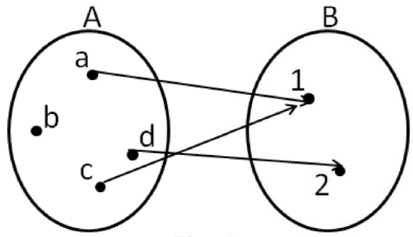


Fig.4

Analizziamo le corrispondenze sopra rappresentate con grafico sagittale:
La corrispondenza di fig.1 rappresenta una funzione.
La corrispondenza di fig. 2 non rappresenta una funzione perché l'elemento a di A è in corrispondenza con due elementi di B, il 2 e il 4, quindi non è una corrispondenza univoca.
La corrispondenza della fig.3 rappresenta una funzione.
La corrispondenza della fig.4 non è una funzione perché il **D**ominio non coincide con l'insieme A.

I termini funzione o applicazione sono sinonimi, tuttavia si preferisce usare il termine "funzione" quando i due insiemi A e B sono insiemi numerici. Solitamente una funzione viene indicata con la lettera ***f*** e si intende la legge che **associa ad ogni elemento x di A uno e un solo elemento y di B**.
Per indicare la legge che fa passare dall'insieme A all'insieme B usiamo la scrittura

$$f:\ A \rightarrow B \ \ \textit{oppure} \ \ A \overset{f}{\longrightarrow} B$$

DEFINIZIONI
L'elemento **y** di B, corrispondente di un elemento x del **D**ominio, viene detto **immagine di x nella funzione *f*** e si scrive **y = *f*(x)** che si legge *"y uguale effe di x"*.
Il sottoinsieme proprio o improprio di B formato dagli elementi che sono immagini degli elementi del **D**ominio si chiama **Codominio o insieme IMmagine** e si scrive **C = IM = *f*(D).** Osserviamo che non necessariamente ogni elemento di B è immagine di un elemento del dominio per cui $C \subseteq B$.

216 Per le funzioni rappresentate nell'esempio precedente, completa:
fig.1 : D = ID = {………} ; C = IM = {……..} ; f(a) = …….. ;
fig.3 : D = ID = {………} ; C = IM = {……..} ; f(….) = 4 ;

217 È vero che la corrispondenza che associa ad ogni regione italiana il suo capoluogo di provincia è una funzione?

1. Completa: D = ID = …………………….
2. È vero che IM = { città d'Italia}? …………………………………
3. Completa f(Liguria) = ………………….; f(…………..) = Cagliari?

218 Assegnati gli insiemi A={mare, ruspa, fegato, generale} e B={1,2,3,4,5,6,7,8,9} la corrispondenza che associa ad ogni elemento di A il numero di lettere di cui è composta la parola è una funzione?

1. Rappresentala con grafico sagittale e stabilisci l'insieme IMmagine
2. Quale relazione sussiste tra B e IM?

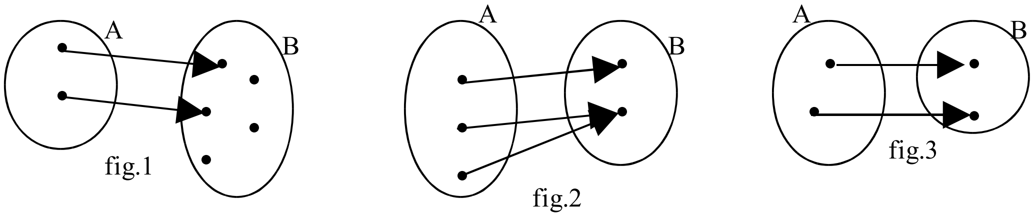
219 Quali tra le seguenti corrispondenze sono funzioni?

	dominio	codominio	corrispondenza
a)	libri	autori	a ogni libro associa l'autore
b)	canzoni	cantanti	a ogni canzone associa il cantante
c)	portoni di una via	numeri	a ogni portone associa il numero civico
d)	computer	sistemi operativi	a ogni computer associa il S.O. installato

Funzioni iniettive, suriettive, biunivoche

Esempio

Nella figure sottostanti sono rappresentate funzioni:



In fig.1 si ha $IM \subset B$ elementi distinti del Dominio A hanno immagini distinte in B
In fig.2 si ha $IM = B$ ma elementi distinti di A hanno la stessa immagine in B
In fig.3 si ha $IM = B$ ed elementi distinti del Dominio A hanno immagini distinte in B

I tre esempi ci illustrano tre tipi diversi di funzioni:

> DEFINIZIONI
> Si dice **iniettiva** una funzione in cui elementi distinti del Dominio hanno immagini distinte in B: **per qualunque x_1, x_2 di A con $x_1 \neq x_2$ si ha $f(x_1) \neq f(x_2)$.**
> Si dice **suriettiva** una funzione in cui **IM = B.**
> Si dice **biunivoca o biiettiva** una funzione che sia **contemporaneamente iniettiva e suriettiva.**

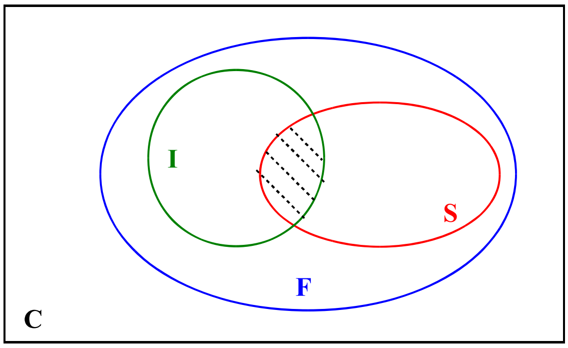
Pertanto in fig.1 è rappresentata una funzione iniettiva, in fig.2 una funzione suriettiva e in fig.3 una funzione biunivoca.

220 Si è ammessi alla facoltà U se nel test d'ingresso si è avuto un punteggio compreso tra 60 incluso e 100 incluso. La corrispondenza che associa ad ogni studente che ha superato il test il suo punteggio è una funzione? Se rispondi affermativamente, sai dire di che tipo è la funzione?

221 Spiega perché la funzione che associa a ciascuna persona il suo codice fiscale è biunivoca.

Diagramma riepilogativo sui diversi tipi di corrispondenze

Legenda:
C insieme delle corrispondenze
F insieme delle funzioni
S insieme delle funzioni suriettive
I insieme delle funzioni iniettive
$I \cap S$ insieme delle funzioni biunivoche

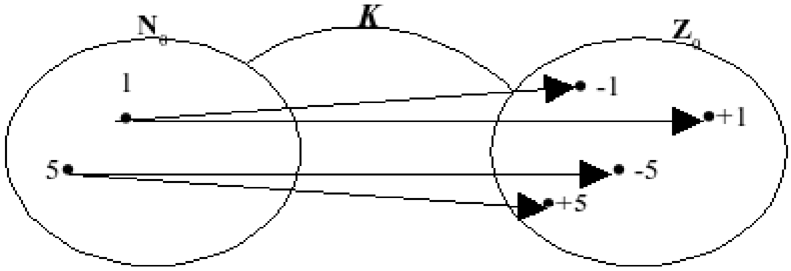


Funzioni tra insiemi numerici

Analizziamo alcune corrispondenze definite tra gli insiemi numerici. In questo caso la funzione ***f*** può essere espressa tramite una formula o scrittura analitica, una tabella, un algoritmo, oppure semplicemente con linguaggio comune, purché in modo preciso e inequivocabile. Il generico elemento **x** del dominio si chiama **variabile indipendente**; il corrispondente elemento **y = *f*(x)** si chiama **variabile dipendente**.

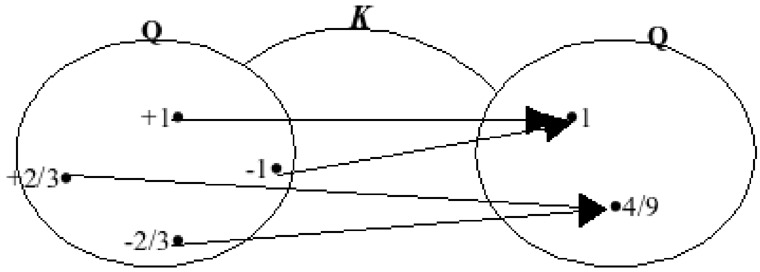
Esempio

Consideriamo la corrispondenza ***K***: “essere il valore assoluto” tra l’insieme N_0 dei naturali diversi da zero e l’insieme Z_0 degli interi relativi diversi da zero. Questa corrispondenza **non è una funzione** in quanto **non è** una corrispondenza **univoca**: un elemento di N_0 ha due immagini poiché ogni numero naturale è valore assoluto di due interi opposti, come rappresentato dal grafico sottostante:



Esempio

Consideriamo la corrispondenza ***K*** che **associa ad ogni numero razionale il suo quadrato**. Essa è una funzione di **D**ominio **Q**: di ogni numero razionale si può determinare il quadrato che è unico; poiché numeri opposti hanno lo stesso quadrato la funzione in esame **non** è **iniettiva**, come rappresentato dal grafico sottostante:



L’immagine y di ogni x appartenente a Q è il suo quadrato: in simboli matematici scriviamo la funzione tramite una formula ***f:*** $y = x^2$.

Per quanto riguarda l’insieme **IM**magine o **C**odominio della funzione esso è un sottoinsieme proprio di **Q**: il numero razionale $+\frac{3}{4}$ non è quadrato di nessun razionale e neppure -25, razionale negativo, è quadrato di un numero razionale, quindi $IM \subset \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$, pertanto la funzione non è suriettiva.

Esempio

Analizziamo la corrispondenza che **associa ad ogni intero il suo valore assoluto**.

Sappiamo che il valore assoluto di un intero è un numero naturale, e ogni intero ha un solo valore assoluto.

La corrispondenza è univoca e il dominio coincide con l’insieme Z, pertanto è una funzione:

f: Z → N rappresentata in forma analitica con $y=|x|$ con $x \in \mathbb{Z}$ e $y=f(x) \in \mathbb{N}$.

$x \in \mathbb{Z}$	0	+1	-1	-2	+2	+3	-3	.....
$y \in \mathbb{N}$	0	1	1	2	2	3	3	.....

Nella tabella sono rappresentati alcuni elementi del **D**ominio con le rispettive immagini: da cui si deduce che tale funzione non è iniettiva.

222 Con riferimento all’esempio precedente, è vero che scelto un qualunque numero naturale è possibile determinare almeno un numero intero di cui è immagine? Completate: f(…….) = 45

L’osservazione precedente permette di concludere che tale funzione è suriettiva?

Fate la rappresentazione sagittale della funzione.

Esempio

È assegnata la funzione $f: x \in N \rightarrow (x-2) \in Z$. In questo caso la funzione associa ad ogni numero naturale il numero intero ottenuto da quello sottraendo 2. L’ espressione analitica della funzione è ***f***: y = x – 2 e la legge così espressa si può descrivere anche attraverso una tabella

$x \in \mathbb{N}$	0	1	2	3	4	5	6	.....
$(x-2) \in \mathbb{Z}$	-2	-1	0	+1	+2	+3	+4	....

Ogni elemento dell’insieme N trova il corrispondente in Z; elementi diversi del dominio hanno immagini diverse pertanto la funzione è **iniettiva**; il Codominio o insieme IMmagine è un sottoinsieme proprio di Z e precisamente **C = IM =** $\{y \in \mathbb{Z} / y \geqslant -2\}$, pertanto la funzione non è suriettiva.

Esempio

Analizziamo la corrispondenza: $f_1: x \in N \to (x-2) \in N$ costruendo la relativa tabella:

$x \in \mathbb{N}$	0	1	2	3	4	5	6	.....
$(x-2) \in \mathbb{N}$			0	1	2	3	4	....

Vediamo che né 0 né 1 hanno l'immagine nella corrispondenza assegnata.

Fissiamo allora come Dominio un sottoinsieme di N e precisamente **D = ID = N – {0,1}**; e procediamo nell'analisi della funzione $f_1: y = x-2$;

223 Completa l'analisi della funzione dell'esempio precedente:

1. elementi diversi del **D**ominio hanno immagini diverse, quindi tale funzione è **iniettiva**; si ha anche **C=IM = N** e pertanto la funzione è **suriettiva**, quindi …………
2. Preso y = 8 sapresti trovare l'elemento del **D**ominio di cui è immagine? …………

Esempio

Consideriamo la corrispondenza che **associa ad ogni numero razionale il suo inverso** (o reciproco). Sappiamo che "fare l'inverso" di un numero razionale x significa scrivere il numero razionale $\frac{1}{x}$, ma questa operazione ha significato solo se x è diverso da 0; operiamo dunque una restrizione su Q e fissiamo **D = ID = Q_0** La corrispondenza è una funzione tra **Q_0** e **Q**. In simboli matematici ***f:*** $y = \frac{1}{x}$

224 Stabilite se la funzione ***f:*** $y = \frac{1}{x}$ è iniettiva. Nell'insieme **IM**magine c'è lo zero?

Completate **C = IM = ………**

Completate la tabella

$x \in \mathbb{Q}_0$	-2	-7/8	+1				-1	
$y \in \mathbb{Q}_0$				+1/3	-12/5	-7/8		-1

225 Consideriamo la funzione ***f*** che **associa ad ogni numero razionale il suo triplo**.

$Q \xrightarrow{f} Q$ la sua espressione in forma analitica è ***f***: y = ………

Dominio = **ID** = **Q;** possiamo moltiplicare per 3 qualunque numero razionale.

Codominio = **IM** = **Q;** infatti il triplo di un numero razionale è ancora un numero razionale.

Rispondete:

1. Qual è l'immagine di 0? ………………………………
2. Quale elemento del dominio ha per immagine 5? ………………………………..
3. È vero che ogni numero positivo ha l'immagine positiva? ……………………….
4. È vero che –1 è immagine di –3? ………………………………
5. La funzione è iniettiva?
6. È biunivoca?

Fai il grafo sagittale della funzione.

226 Per ciascuna delle seguenti funzioni determinare l'insieme di definizione, l'insieme immagine e stabilire se la funzione è iniettiva o suriettiva.

a) $y: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \to 2x$

b) $y: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \to x^2$

c) $y: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $x \to \frac{1}{x}$

c) $y: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $x \to 2x$

d) $y: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $x \to \frac{1}{x}$

Funzioni inverse

È assegnata la funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ descritta mediante le istruzioni

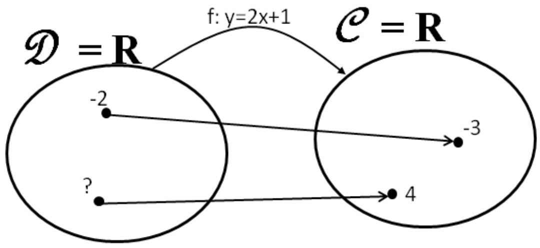
Prendi $x\in\mathbb{R}$ → moltiplica per 2 → aggiungi 1 → scrivi y (1)

La forma algebrica è $y=2\cdot x+1$; essa è definita per qualunque numero reale e l'insieme immagine coincide con il codominio.

Scelto arbitrariamente un valore da assegnare alla variabile indipendente x=-2 otteniamo la sua immagine determinando il risultato delle operazioni descritte nelle istruzioni (1) y=-3.

Preso ora y=4, elemento dell'insieme Immagine della funzione, quali istruzioni dobbiamo seguire per determinarne la controimmagine? Il problema si formalizza in questo modo:

"per quale valore di x aggiungendo 1 al suo doppio si ottiene 4?"



Le due questioni sono rappresentate nel diagramma di Eulero-Venn e percorrendo la (1) con le operazioni inverse otteniamo il valore di x sottraendo 1 al valore dato per y e dividendo il risultato per 2. Le istruzioni da eseguire sono:

da y togli 1→ dividi il risultato per due → scrivi x

in formula $x=(y-1):2$.

La funzione così ottenuta si chiama **funzione inversa** di f(x) e si scrive f^{-1} .

Poiché la funzione assegnata è iniettiva, ci rendiamo subito conto che per ogni y dell'insieme immagine possiamo determinare la controimmagine (cioè l'unico valore di x tale che f(x) = y).

DEFINIZIONE. Per **funzione inversa di una funzione iniettiva y = f(x)** si intende quella funzione che permette di determinare la controimmagine di un qualunque elemento dell'insieme immagine di f(x). Il simbolo della funzione inversa è f^{-1} .

Osserviamo che $D\left(f^{-1}\right)=\mathrm{IM}(f)$ e $\mathrm{IM}\left(f^{-1}\right)=D(f)$

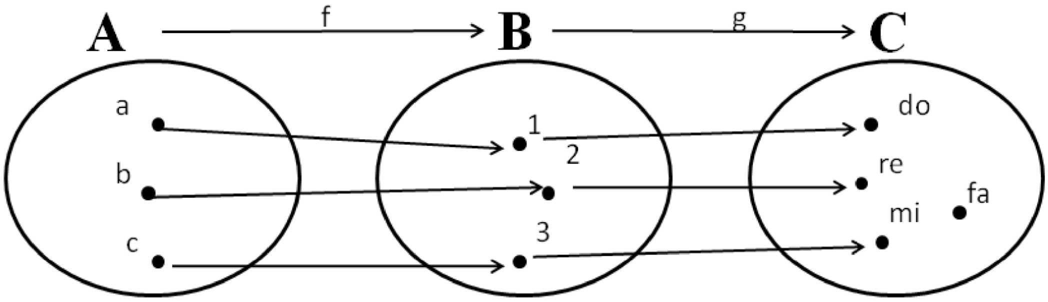
227 Per ciascuna delle funzioni elencate, riempite le colonne della tabella

y=f(x)	f(x) è iniettiva?	x=f^{-1}(y)
$y=2x$		
$y=x+2$		
$y=2x-2$		
$y=x^2$		
$y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$		
$y=\sqrt{2}\cdot x$		

228 Assegnata la funzione lineare $f: y=m\cdot x+q$, essendo una funzione iniettiva la sua inversa è: ...

Composizione di funzioni

Date due funzioni $f:A\rightarrow B$ e $g:B\rightarrow C$ è possibile definire la funzione composta $g\circ f:A\rightarrow C$ che a un elemento a di A associa prima l'elemento b=f(a) e poi l'elemento c=g(b), in un'unica formula si può scrivere g(f(a))=c.



Esempio

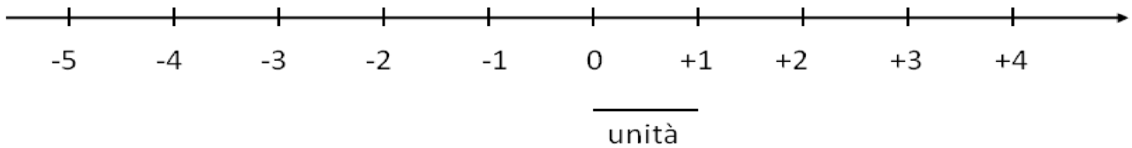
- Data la funzione f(x)=2x e la funzione g(x)=x+1, determina l'espressione analitica della funzione composta.

Prima agisce la funzione f che raddoppia il valore di x. Al valore ottenuto, che è 2x, si applica la g che fa aumentare di 1. Pertanto la funzione composta raddoppia x e poi aggiunge 1. L'espressione è g(f(x))=2x+1.
Osserva che la composizione di funzioni non è commutativa. Infatti la funzione f(g(x)) si ottiene facendo agire prima la g(x) che aumenta di 1 il valore della variabile e poi la f(x) che raddoppia il valore della variabile; allora f(g(x))=2(x+1)

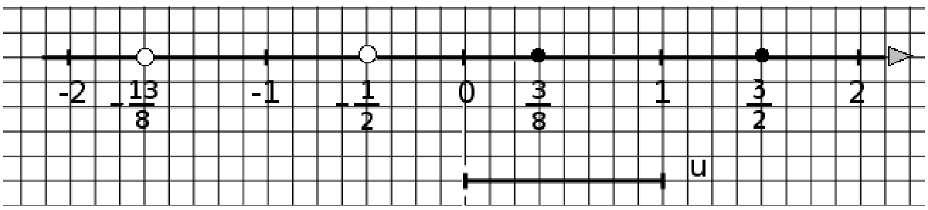
229 Date le funzioni $f(x)=2x+1$ e $g(x)=3x+2$ che hanno per dominio rispettivamente $A=\{x\in\mathbb{Z}/-2\leq x\leq 2\}$, $B=\{x\in\mathbb{Z}/-1\leq x\leq 3\}$. Determina C codominio di f e D codominio di g. Determina $C\cup D$ e $C\cap D$. Scrivi le espressioni analitiche delle funzioni $f\circ g$ e $g\circ f$.

►13. La retta e gli insiemi numerici

Nello studio degli insiemi numerici abbiamo visto come si possono depositare su una semiretta i numeri naturali; la legge costruttiva di questa rappresentazione genera tra l'insieme N = {0, 1, 2, 3, 4, …. } e i punti della semiretta una corrispondenza avente come dominio N e come codominio i punti della semiretta. Ad ogni numero naturale possiamo far corrispondere un punto della semiretta, ma **non tutti i punti della semiretta sono immagine di un numero naturale**: **la corrispondenza non è biunivoca.**
Lo stesso fatto avviene se consideriamo l'insieme Z come Dominio e i punti di una retta orientata come Codominio; nella figura viene rappresentata la corrispondenza generata con la legge costruttiva già enunciata nel capitolo dei numeri interi.



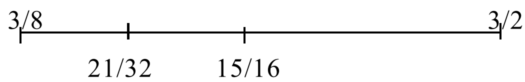
Ad ogni numero intero possiamo far corrispondere un punto della retta orientata, ma **non tutti i punti della retta sono immagine di un numero intero**: l'insieme **IM**magine **non coincide con** il **C**odominio e **la corrispondenza non è biunivoca.**
Gli insiemi N e Z sono infiniti e la loro caratteristica comune è che tra due naturali consecutivi o tra due interi consecutivi non possiamo trovarne un altro. Si dice che **N e Z sono** due **insiemi discreti**.
Consideriamo ora l'insieme **Q** dei numeri razionali; sappiamo che anche questi numeri, rappresentati da frazioni, possono essere disposti su una retta orientata come mostrato nella figura sottostante



Esempi di rappresentazione di numeri razionali sulla retta orientata.

L'insieme **Q** rispetto agli insiemi **N** e **Z** presenta un'altra caratteristica: è **denso**, cioè tra due numeri razionali ci sono infiniti altri numeri razionali.
Come possiamo confermare questa affermazione?

Osserviamo la figura precedente: fra 3/8 e 3/2 si trova certamente il numero 1. Costruiamo il numero $q=\frac{\frac{3}{8}+\frac{3}{2}}{2}$ ottenuto dividendo per due la somma dei due numeri estremi dell'intervallo considerato, si ottiene $q=\frac{15}{16}$ che è minore di 1 e, a maggior ragione, minore di $\frac{3}{2}$, ma maggiore di $\frac{3}{8}$, come puoi verificare trasformando la frazione in una equivalente con denominatore 16.
Con lo stesso procedimento possiamo determinare $q_1=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{8}+\frac{15}{16}\right)=\frac{21}{32}$ che risulta maggiore di $\frac{3}{8}$ e minore di q. Con questo procedimento, che non ha mai termine, possiamo determinare infiniti altri numeri razionali compresi tra $\frac{3}{8}$ e $\frac{3}{2}$.



Questa possibilità ci fa supporre che tutti i punti della retta orientata possano essere immagine di un numero razionale, cioè che esista una corrispondenza biunivoca tra l'insieme **Q** e i punti della retta.
Invece, no! Nel capitolo "Insiemi Numerici-introduzione ai numeri reali" abbiamo visto che benché l'insieme **Q** sia infinito e denso, quando pensiamo di aver disposto sull'asse dei numeri tutti i suoi elementi rimangono sulla retta ancora altri punti liberi. La retta geometrica sembra avere "più punti" di quanti siano i numeri razionali: gli infiniti punti lasciati scoperti dai razionali sono immagine di numeri irrazionali.
L'insieme che si ottiene dall'**unione dell'insieme Q** con l'**insieme J degli irrazionali** è l'**insieme R dei numeri reali**, cui Cantor attribuì cardinalità $\aleph_1$. La retta geometrica orientata è in corrispondenza

biunivoca con **R,** il che vuol dire che ad ogni numero reale corrisponde un punto sulla retta orientata e un punto della retta è immagine di un solo numero reale, razionale o irrazionale.

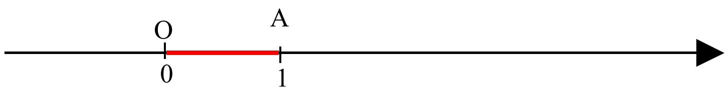
DEFINIZIONE. Si chiama **ascissa di un punto sulla retta reale** il numero reale α che è la sua immagine nella corrispondenza biunivoca.

Esempio

Determinare l'immagine del numero reale $\alpha=1+\sqrt{2}$ *sulla retta reale.*

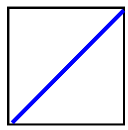
Soluzione:

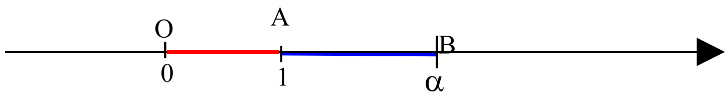
Fisso la retta orientata e un suo punto O al quale attribuisco ascissa 0; fisso un segmento arbitrario come unità di misura e quindi determino il punto A di ascissa 1 riportando il segmento unitario a partire da O, nel verso indicato dalla freccia.





Costruisco il segmento rappresentativo del numero irrazionale $\sqrt{2}$, che è la diagonale del quadrato di lato l'unità. Metto questo segmento adiacente al segmento OA, come in figura:

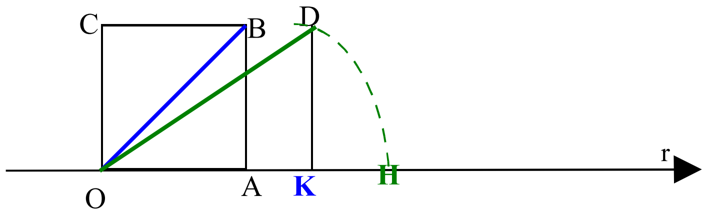




Il punto B è l'immagine del numero α, e scriviamo B(α)

Sulla retta razionale si possono collocare tutti i numeri del tipo $\sqrt{n}$ **con** $n\in\mathbb{N}_0$ **.**

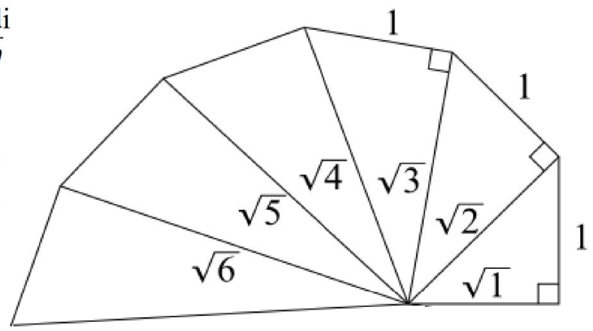
Nella figura è segnato il punto **K** immagine del numero $\sqrt{2}$; sulla perpendicolare alla retta r nel punto K prendiamo il segmento KD = OA e congiungiamo D con O. Per il teorema di Pitagora sul triangolo OKD si ha $\overline{OD}^2=\overline{OK}^2+\overline{KD}^2=\overline{OK}^2+\overline{OA}^2$ e passando alle misure $\overline{OD}^2=(\sqrt{2})^2+1^2=2+1=3$ pertanto $\overline{OD}=\sqrt{3}$; puntando il compasso in O con raggio OD tracciamo l'arco che incontra la retta r in **H** immagine del numero irrazionale $\sqrt{3}$



Proseguendo in questo modo possiamo ottenere sulla retta razionale i punti associati ai numeri del tipo $\sqrt{n}$.

Un'altra classica costruzione, nota come "spirale di Teodoro", permette di ottenere i segmenti di misura $\sqrt{n}$ con $n\in\mathbb{N}_0$.

Si inizia con la costruzione del triangolo rettangolo isoscele di cateto 1; sappiamo già che la sua ipotenusa è il segmento di misura $\sqrt{2}$. Sulla perpendicolare in C ad AC si prende il segmento CD di misura 1: applicando il teorema di Pitagora come abbiamo fatto sopra, otteniamo $\overline{AD}=\sqrt{3}$. Ripetiamo la costruzione dal vertice D e otteniamo il triangolo rettangolo ADE la cui ipotenusa è $\overline{AE}=\sqrt{4}$ e poi $\overline{AF}=\sqrt{5}$ e così via.



230 Determinate sulla retta reale i punti immagine dei seguenti numeri reali:

$\alpha=\frac{3}{2}\sqrt{2}$; $\beta=\frac{2}{5}+\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\delta=-(\sqrt{3}+\sqrt{2})$; $\lambda=\sqrt{3}-3$

231 Verificate che il numero $\chi=\sqrt{3}+\sqrt{2}$ non è uguale al numero $\omega=\sqrt{5}$, usando la rappresentazione sulla retta orientata.

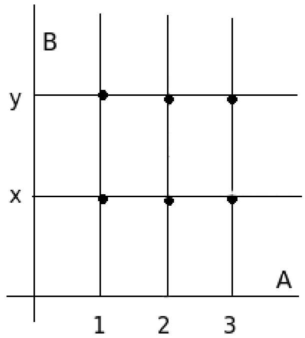
232 Stabilite il valore di verità della proposizione: "poiché tra 2 e 3 non vi è nessun altro numero naturale, anche tra $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ non vi è nessun numero reale".

►14. Il metodo delle coordinate cartesiane

Ricordiamo che abbiamo definito **prodotto cartesiano** di due insiemi non vuoti A e B l'insieme formato da tutte le coppie ordinate tali che il primo elemento appartenga ad A e il secondo a B. Mediante proprietà caratteristica si scrive: $A\times B=\{(a\,;b)|a\in A \text{ e } b\in B\}$.

Esempio

Il prodotto cartesiano dei due insiemi A={1,2,3} e B={x,y} è AxB = {(1;x), (1;y), (2;x), (2;y), (3;x), (3;y)} e graficamente si può rappresentare con un diagramma cartesiano come nella figura accanto.



Sappiamo che una retta orientata, fissata una unità di misura arbitraria, è l'immagine geometrica dell'insieme dei numeri reali: ad ogni numero reale corrisponde un punto della retta e un qualunque punto della retta è immagine di un solo numero reale.

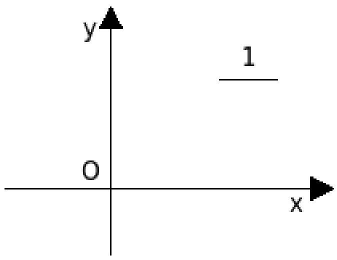
Introduzione al sistema di riferimento cartesiano ortogonale

Preso l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, costruiamo il prodotto cartesiano $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$: esso è costituito dall'insieme delle coppie ordinate tali che il primo elemento sia un numero reale come pure il secondo elemento. In $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ avremo coppie il cui primo elemento è 0, coppie il cui primo elemento è un numero positivo e infine coppie il cui primo elemento è un numero negativo, coppie che possiamo sinteticamente rappresentare nel seguente modo:

$\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ = {(0;0), (0;+), (0;-), (+;0), (+;+), (+;-), (-;0), (-;+), (-;-) }

È possibile dare una rappresentazione grafica di questo insieme di infiniti elementi?

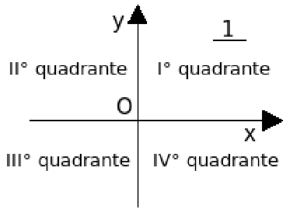
Consideriamo sul piano una coppia di rette perpendicolari, indichiamo con O il loro punto di intersezione, fissiamo convenzionalmente un verso di percorrenza su ciascuna retta (convenzionalmente sull'orizzontale da sinistra a destra, sulla verticale dal basso all'alto) e infine scegliamo un segmento arbitrario come unità di misura.

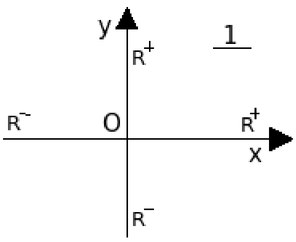


Indichiamo con **x** l'asse orizzontale che chiamiamo **asse delle ascisse** e con **y** l'asse verticale che chiamiamo **asse delle ordinate**.

DEFINIZIONE. Si chiama **riferimento cartesiano ortogonale monometrico** la coppia di rette orientate, perpendicolari, dotate di unità di misura.

Gli assi dividono il piano in quattro zone chiamate quadranti che sono numerati come in figura.





Ogni punto dell'asse delle ascisse è immagine di un numero reale:
O è immagine di zero, i punti alla sua destra rappresentano i numeri reali positivi, quelli alla sua sinistra tutti i numeri reali negativi; analogamente sull'asse delle ordinate il punto O è immagine dello zero, sopra di questo si collocano i numeri positivi e sotto i numeri negativi.

Per rappresentare gli elementi di $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ cioè le coppie ordinate di numeri reali (α;β) procediamo nel seguente modo:

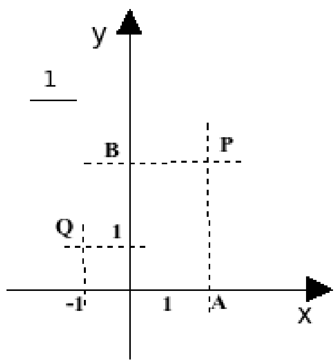
- determiniamo sull'asse x il punto A immagine del numero reale α;
- da A tracciamo la retta parallela all'asse y;
- determiniamo sull'asse y il punto B immagine del numero reale β;
- da B tracciamo la retta parallela all'asse x.

Il punto P, intersezione delle parallele tracciate, è l'immagine della coppia ordinata (α;β).

Esempio

Determiniamo l'immagine delle coppie ordinate (2;3) e (-1;1)

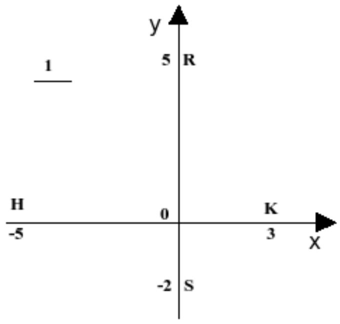
Nella figura accanto è tracciata la costruzione descritta sopra: P è il punto del



piano immagine della coppia (2;3) e Q è il punto immagine della coppia (-1;1). Rappresenta le coppie (4;-1) e (-4;1). Quali punti rappresentano le coppie con un elemento uguale a zero?

Esempio

Determiniamo l'immagine delle seguenti coppie: (0;5) , (0;-2) , (-5;0) , (3;0)
Osserviamo che il punto immagine dello zero sull'asse x coincide con O, quindi la coppia (0;5) sarà associata al punto R dell'asse y e la coppia (0;-2) al punto S dello stesso asse. Analogamente, poiché il punto immagine dello zero sull'asse y coincide con O, le coppie (-5;0) e (3;0) sono associate rispettivamente ai punti H e K dell'asse x.



Il punto **O** è immagine della coppia (0;0) ed è chiamato **Origine**.

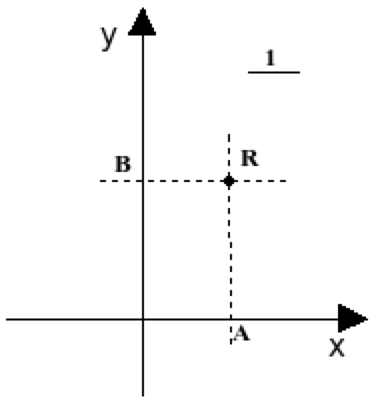
Prima conclusione: ogni coppia di numeri reali è rappresentata da un punto del piano dotato di riferimento cartesiano ortogonale monometrico.

233 Per ciascuna coppia di punti indica in quale quadrante si trova, se si trova su un asse indica l'asse:

$(0;-1)$ $\left(\frac{3}{2};-\frac{5}{4}\right)$ $\left(0;\frac{1}{3}\right)$ $\left(\frac{5}{3};1\right)$

$\left(1;-\frac{5}{3}\right)$ $(-8;9)$ $\left(-2;-\frac{1}{4}\right)$ $(-1;0)$

Completa l'osservazione conclusiva:
Tutte le coppie del tipo (+;+) individuano punti del ………..…...……
Tutte le coppie del tipo (..;..) individuano punti del IV° quadrante"
Tutte le coppie del tipo (-;+) individuano punti del ………......………
Tutte le coppie del tipo (-;-) individuano punti del ………...…………
Tutte le coppie del tipo (…;0) individuano punti del ………...………
Tutte le coppie del tipo (…;…) individuano punti dell'asse y"



Prendiamo ora un punto R del piano sul quale sia stato fissato un riferimento cartesiano ortogonale monometrico e tracciamo da R la parallela all'asse y che interseca l'asse x nel punto A. A questo punto è associato un numero reale α. Analogamente da R tracciamo la parallela all'asse x che interseca l'asse y nel punto B immagine di un numero reale β. Al punto R associamo la coppia di numeri reali (α;β).
Diremo che **R è il punto di coordinate (α;β)**, α si chiama **ascissa** del punto R, β **ordinata** del punto R.
Seconda conclusione: ogni punto del piano dotato di riferimento cartesiano ortogonale monometrico individua una coppia ordinata di numeri reali.
In conclusione, esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ e l'insieme dei punti del piano dotato di riferimento cartesiano ortogonale monometrico. Possiamo dunque "confondere" coppia di numeri reali con punto del piano e anzi diremo, secondo gli esempi precedenti, "P è il punto (2;3), Q il punto (-1;1)" invece di "P è il punto immagine della coppia (2;3)" o "P è il punto di coordinate (2;3)".

Un po' di storia
Nel II° secolo a.C. Ipparco compilò il primo catalogo stellare in cui precisò la posizione di circa 850 stelle sulla sfera celeste mediante due numeri: latitudine e longitudine.
La posizione di un punto era dunque individuata attraverso una coppia di numeri.
Ancora oggi attraverso latitudine e longitudine viene individuato un punto sulla superficie terrestre.
I romani nel fondare una città segnavano due solchi perpendicolari ai quali riferivano la posizione di case, monumenti, strade.
Nel XVII secolo con le opere di Pierre de Fermat e di René Descartes il metodo di rappresentare punti con coppie di numeri divenne un procedimento matematico per descrivere enti geometrici attraverso numeri, equazioni, disequazioni e tradurre le relazioni tra elementi della geometria in relazioni tra enti algebrici.
La geometria analitica tratta questioni geometriche con metodi di tipo algebrico.

Distanza di due punti

Assegnato nel riferimento cartesiano ortogonale il punto $P(\alpha;\beta)$, il numero reale $|\alpha|$ rappresenta la misura della distanza del punto dall'asse y e il numero reale $|\beta|$ rappresenta la misura della distanza di P dall'asse x.

<u>Esempio</u>

Determinare la misura della distanza dagli assi coordinati dei punti P(+1;-3) , Q(+5;+5) , R(-2;+3) , S(-5;-1).
Dati: P(+1;-3)
Obiettivo:
$PH \perp$asse X ; il segmento PH è la distanza di P dall'asse x.
$PK \perp$asse y ; il segmento PK è la distanza di P dall'asse y.
Per quanto detto sopra si ha
$\overline{PH}=|-3|=-(-3)=3$ $\overline{PH}=|+1|=1$
Completate la soluzione dell'esempio, seguendo la traccia.

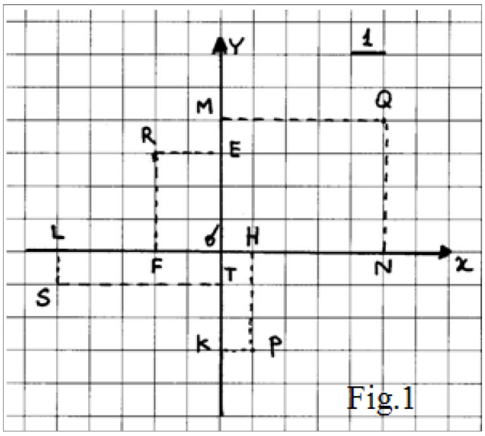
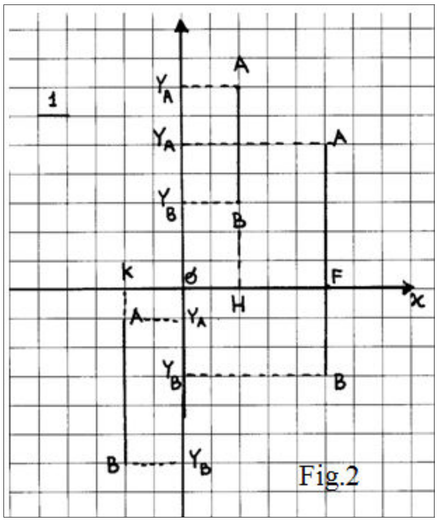


Fig.1

Vogliamo ora determinare la misura $\overline{AB}$ di un segmento AB, inserito in un riferimento cartesiano ortogonale monometrico Oxy, conoscendo le coordinate degli estremi A e B del segmento stesso.
I° caso: i due punti hanno la stessa ascissa: il segmento AB è parallelo all'asse y e può presentarsi in diverse posizioni rispetto all'asse x.
Dati: A(2;7) , B(2;3) Obiettivo: $?\ \overline{AB}$
Procedura risolutiva: $\overline{AB}=\overline{AH}-\overline{BH}=y_A-y_B=7-3=4$
Dati: A(5;5) , B(5;-3) Obiettivo: $?\ \overline{AB}$
Procedura risolutiva:
$\overline{AB}=\overline{AF}+\overline{BF}=y_A+(-y_B)=y_A-y_B=5-(-3)=8$
Dati: A(-2;-1) , B(-2;-6) Obiettivo: $?\ \overline{AB}$
Procedura risolutiva:
$\overline{AB}=\overline{BK}-\overline{AK}=-(y_B)-(-y_A)=y_A-y_B=-1+6=5$


Fig.2

Osserviamo che in ogni caso abbiamo sottratto dall'ordinata maggiore l'ordinata minore; generalizzando possiamo concludere:
La misura del segmento AB parallelo all'asse delle ordinate è $\overline{AB}=|x_a-x_B|$ **indipendentemente da quale estremo abbia ordinata maggiore.**

234 Sono assegnati i punti A(3;-1) , B(3;5) , M(-1;-1) , N(-1;-7). È vero che $\overline{AB}=\overline{MN}$?

II° caso: i due punti hanno la stessa ordinata: il segmento AB è parallelo all'asse x e può presentarsi in diverse posizioni rispetto all'asse y. (Fig.3)
Seguendo il procedimento applicato nel primo caso, dopo aver rilevato le coordinate degli estremi del segmento AB nella figura accanto, verifica che in ogni caso $\overline{AB}=|x_A-x_B|$
La misura del segmento AB parallelo all'asse delle ascisse è $\overline{AB}=|x_A-x_B|$ **indipendentemente da quale estremo abbia ascissa maggiore.**

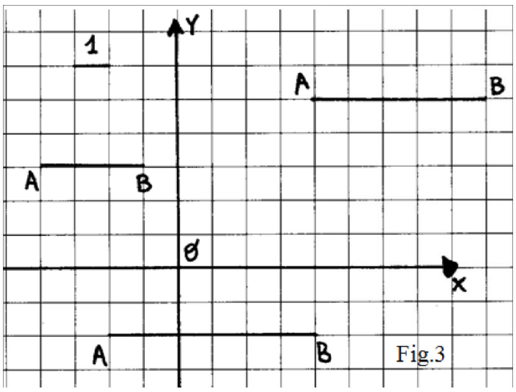


Fig.3

235 Sono assegnati i punti A(1;5) , B(-4;5) , C(-4;-2) , D(5;-2). Quale poligono si ottiene congiungendo nell'ordine i quattro punti assegnati? Determinate l'area del quadrilatero ABCD.

236 Determinate l'area del quadrilatero MNPQ sapendo che M(6;-4) , N(8;3) , P(6;5) , Q(4;3).

III° caso: è questo il caso generale: il segmento ha una direzione diversa da quella degli assi coordinati. (Fig.4)

Dati: $A(x_A ; y_A), B(x_B ; y_B)$ Obiettivo: $?\ \overline{AB}$

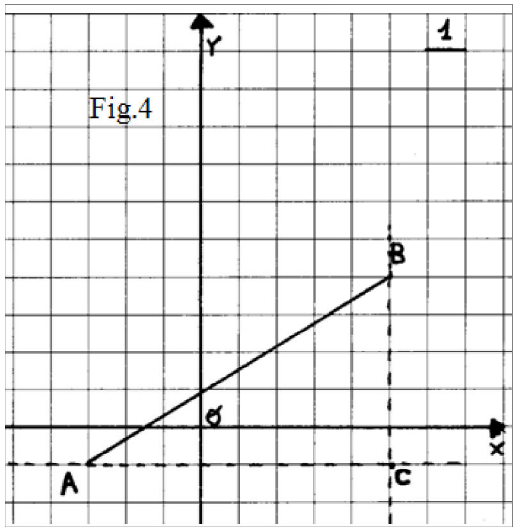
Tracciando da A la parallela all'asse x e da B la parallela all'asse y si determina il vertice C del triangolo rettangolo ABC di cui AB è l'ipotenusa.

Per il teorema di Pitagora si ottiene:

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_C - y_B)^2}$$

Poiché $x_C = x_B$ e $y_C = y_A$ sostituendo si ha:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} .$$



La misura del segmento AB, note le coordinate dei suoi estremi è $\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$ **.**

237 Determina $\overline{AB}$ sapendo che A(7;-1) e B(-3;-6).

238 Determina la distanza di $P(-3 ; 2{,}5)$ dall'origine del riferimento.

239 Calcola la misura del perimetro del triangolo ABC di vertici $A(3 ; -2)$, $B(4 ; 1)$, $C(7 ; -4)$.

240 Determina il perimetro del quadrilatero di vertici A(1;5) , B(-4;5) , C(-4;-2) , D(5;-2).

241 Determina il perimetro del quadrilatero di vertici M(6;-4) , N(8;3) , P(6;5) , Q(4;3).

242 Determina il perimetro e la misura delle diagonali del quadrilatero di vertici $A(1 ; -3), B(4 ; 3), C(-3 ; 1), D(-6 ; -5)$.

243 Verifica che il triangolo di vertici E(4;3) , F(-1;4) , G(3;-2) è isoscele.

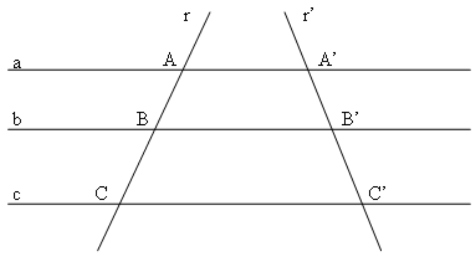
244 Il triangolo ABC ha il lato BC appoggiato sull'asse x; il vertice B ha ascissa $\frac{5}{4}$, il vertice C segue B e $\overline{BC} = \frac{17}{2}$. Determina le coordinate del vertice C, l'area e il perimetro sapendo che il terzo vertice è $A(-1 ; 5)$.

245 I punti $F(3 ; 0)$, $O(0 ; 0)$, $C(0 ; 5)$ sono i vertici di un rettangolo; determina le coordinate del quarto vertice, il perimetro, l'area la misura delle sue diagonali.

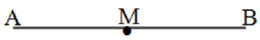
246 Il punto G appartiene all'asse x, ha ascissa maggiore all'ascissa di F ed è tale che $\overline{EF} = \overline{FG}$. Determina il perimetro del trapezio OGEC.

Punto medio di un segmento

Ricordiamo il teorema di Talete: "in un fascio di rette parallele tagliato da due trasversali, a segmenti congruenti su una trasversale corrispondono segmenti congruenti sull'altra trasversale". Cioè, se $AB = BC$ allora $A'B' = B'C'$

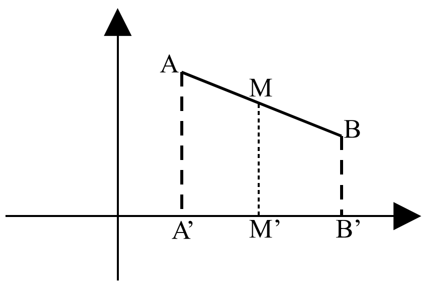


Richiamiamo anche la definizione di punto medio di un segmento: il punto medio di un segmento AB è il punto interno al segmento che lo divide in due parti congruenti: $AM \equiv MB$.



Vogliamo ora affrontare il seguente problema: conoscendo le coordinate degli estremi A e B di un segmento determiniamo le coordinate del suo punto medio.

Dati:	Obiettivo
$A(x_A ; y_A)$	$?\ M(x_M ; y_M)$
$B(x_B ; y_B)$	
$AM = MB$	



Strategia: essendo $AM \equiv MB$. per il teorema di Talete $A'M' \equiv M'B'$. ; si ha inoltre $A'(x_A;0)$, $B'(x_B;0)$, $M'(x_M;0)$ e quindi $x_M - x_A = x_B - x_M$ da cui $2x_M = x_A + x_B$ e dunque $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$.

Con ragionamento analogo tracciando dai punti A, B, M le parallele all'asse x si ricava $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$.

Le coordinate del punto medio M di un segmento AB, con $A(x_A;x_B), B(x_B;y_B)$ **sono** $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$ **e** $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$ **.**

Esempio

Determinare le coordinate del punto medio del segmento di estremi $A\left(-\frac{3}{4};1\right)$, $B\left(2;-\frac{1}{2}\right)$

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-\frac{3}{4}+2}{2} = \frac{5}{8};\quad y_M = \frac{1+\left(-\frac{1}{2}\right)}{2} = \frac{1}{4} \quad \text{quindi} \quad M\left(\frac{5}{8};\frac{1}{4}\right)$$

247 Determina le coordinate del punto medio dei segmenti i cui estremi sono le seguenti coppie di punti:

a) $A(-\sqrt{2};0), B(0;\sqrt{2})$

b) $A\left(\frac{2}{3};-\frac{3}{2}\right), B\left(-\frac{1}{6};3\right)$

c) $A(-1;4), B(1;-4)$

d) $A\left(0;-\frac{3}{2}\right), B(-2;-1)$

e) $A\left(1+\sqrt{2};\frac{1}{\sqrt{3}}\right); B\left(-\sqrt{2};-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

f) $A\left(\frac{7}{5};-\frac{7}{5}\right), B(1;-1)$

g) $A\left(-3;\frac{1}{2}\right), B\left(\frac{1}{2};-3\right)$

248 I vertici del triangolo ABC sono i punti $A\left(\frac{2}{3};-\frac{3}{2}\right)$, $B\left(-\frac{1}{6};1\right)$, $C\left(\frac{4}{3};0\right)$, determina le coordinate dei punti M, N, P , punti medi rispettivamente dei lati AB, AC, BC.

249 I vertici del triangolo ABC sono i punti $A(-3;5), B(3;-5), C(3,5)$, i punti M, N, P sono i punti medi rispettivamente dei lati AB, AC, BC. Determina il perimetro di ABC e di MNP. Quale relazione sussiste tra i perimetri ottenuti? Secondo te vale la stessa relazione anche tra le aree dei due triangoli?

$R.\left[2p_{ABC}=2(8+\sqrt{34});\ 2p_{MNP}=(8+\sqrt{34});\ \frac{2p_{ABC}}{2p_{MNP}}=2;\ S_{ABC}=30;\ S_{MNP}=\frac{15}{;}\ \frac{S_{ABC}}{S_{MNP}}=4\right]$

250 Verifica che il triangolo di vertici $A(2;3), B(6;-1), C(-4;-3)$ è rettangolo. È vero che CB è l'ipotenusa? Verifica che AM, con M punto medio di BC è metà di BC stesso. Come sono i triangoli AMC e AMB?

251 Verifica che i segmenti AB e CD di estremi i $A\left(\frac{1}{2};2\right), B\left(-\frac{3}{4};-2\right), C(3;1), D\left(-\frac{7}{2};-1\right)$ punti hanno lo stesso punto medio. È vero che $AC = BD$?

►15. Il grafico di una funzione

Ricordiamo le seguenti

DEFINIZIONI
Una funzione ***f*** è una corrispondenza univoca tra due insiemi non vuoti: ad ogni elemento **x** (**variabile indipendente)** del **D**ominio associa uno e un solo valore **y** della **variabile dipendente**.
L'elemento **y**, corrispondente di un elemento **x** del **D**ominio, viene detto **immagine di x nella funzione *f*** e si scrive **y = *f*(x)** che si legge *"y uguale effe di x"*.

Le funzioni numeriche, cioè aventi per Dominio e Codominio insiemi numerici, possono essere espresse:

- **Con linguaggio comune**, purché in modo preciso e inequivocabile:
  esempio: La funzione ***f*** "associa ad ogni numero razionale il suo triplo"
- **Attraverso un algoritmo**, cioè una serie di istruzioni per trasformare il valore della variabile indipendente (in ingresso) nel valore della variabile dipendente (in uscita) :
  Per esempio:

  Prendi un numero razionale → Moltiplicalo per 3 → Scrivi il risultato

  Variabile indipendente: x
Valore in ingresso ⟹ ***f*** ⟹ Variabile dipendente: y
Valore in uscita

- **Mediante una tabella**:

x	-2	0	3	7	10
y	-6	0	9	21	30

- **Con una formula** che indica il calcolo che si effettua sulla variabile indipendente per determinare in modo univoco il valore della variabile dipendente:
  Per esempio: y = 3x

252 Sono assegnate alcune funzioni con una formula; compila le tabelle accanto a ciascuna.

1) $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} \quad y = \frac{1}{2}x$

x					
y					

2) $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} \quad y = -x$

x					
y					

3) $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} \quad y = 2 - 3x$

x					
y					

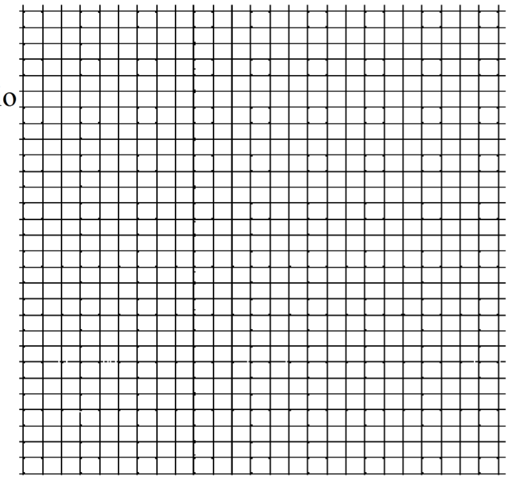
253 Esprimi con linguaggio comune la funzione 1) dell'esercizio precedente e rispondi alle domande:

a) Qual è l'immagine di 0? y = …………………
b) Quale elemento del **D**ominio ha per immagine 5? x =………………..
c) È vero che ogni numero positivo ha l'immagine positiva? Perché?
d) È vero che –1 è immagine di –2? Perché?

254 Traccia sul piano quadrettato a fianco un riferimento cartesiano ortogonale monometrico.
Completa la tabella per la funzione $y=2x$ avente come Dominio e Codominio l'insieme R dei numeri reali:

x	0		1/2	2	-3	
y		2				5

Ogni coppia (x;y) determina nel riferimento cartesiano un punto; rappresenta i punti le cui coordinate sono le coppie ordinate contenute nella tabella. Puoi osservare che i punti trovati sono allineati su una retta passante per l'origine del riferimento.



DEFINIZIONE. Si chiama **grafico di una funzione** l'insieme di tutti e soli i punti del piano cartesiano che rappresentano le coppie ordinate costruite tramite la funzione assegnata.

Osservazione
I pochi punti ottenuti dalla compilazione della tabella possono essere uniti con un tratto continuo perché assegnando alla variabile indipendente altri valori reali, ad esempio compresi tra 0 e 2, si potrebbero determinare infiniti punti che risulterebbero allineati con i precedenti.

Funzione di proporzionalità diretta

x	0	-1	1/2	2	-3	-5/2
y	0	2	-1	-4	6	5
y/x						

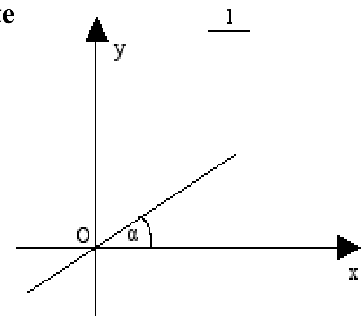
Compila la terza riga della tabella contenente il rapporto tra la variabile dipendente y e la variabile indipendente x. Cosa osservi?

Completa: $\frac{y}{x}=\ldots\ldots$

DEFINIZIONE. Una funzione in cui risulta **costante e diverso da zero il rapporto** tra la variabile dipendente e la variabile indipendente si chiama **funzione di proporzionalità diretta**.
In simboli, y direttamente proporzionale a $x \Leftrightarrow \frac{y}{x}=k$ con $k \in \mathbb{R}$ e $k \neq 0$ o anche $y=k \cdot x$

Il grafico di una funzione di proporzionalità diretta è una retta passante per l'origine; la costante k si chiama coefficiente angolare della retta.

Nella figura è rappresentata una retta passante per l'origine del riferimento; essa forma con l'asse orientato delle x un angolo α; la costante k ci dà informazioni su tale angolo.



255 Dopo aver determinato per ciascuna delle seguenti funzioni la costante k, traccia il grafico in un riferimento cartesiano ortogonale:

a) $f_1: y=\frac{1}{2}x$
b) $f_2: y=x$
c) $f_3: y=\frac{4}{3}x$
d) $f_4: y=\frac{3}{5}x$
e) $f_5: y=5x$
f) $f_6: y=-\frac{1}{2}x$
g) $f_7: y=-x$
h) $f_8: y=-\frac{3}{4}x$

256 Riporta in uno stesso riferimento cartesiano ortogonale le prime cinque funzioni. Evidenzia con un tratto più calcato la funzione f_2 e compila la tabella:

funzione	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
k: coefficiente angolare					

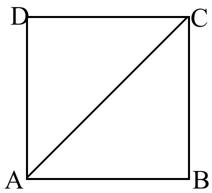
Cancella i termini errati nella seguente analisi:
"*Tutte le funzioni hanno coefficiente angolare positivo/negativo; tutte le rette formano con l'asse orientato delle x un angolo ottuso/acuto; tutte le rette aventi coefficiente minore di 1 stanno sopra/sotto la f_2; tutte le rette aventi coefficiente maggiore di 1 stanno sopra/sotto la f_2.*"

257 Ripeti l'esercizio precedente per le seconde cinque funzioni, evidenziando la funzione f_7; costruisci l'analoga tabella e cancella i termini errati nella seguente analisi:
"*Tutte le funzioni hanno coefficiente angolare positivo/negativo; tutte le rette formano con l'asse orientato delle x un angolo ottuso/acuto; tutte le rette aventi coefficiente minore di -1 stanno sopra/sotto la f_7; tutte le rette aventi coefficiente maggiore di -1 stanno sopra/sotto la f_7.*"

Conclusione
Se la costante di proporzionalità è positiva, l'angolo α è acuto, se la costante è negativa allora l'angolo α è ottuso.

Problema

Nel quadrato ABCD il cui lato misura x, determinare il perimetro e la diagonale.

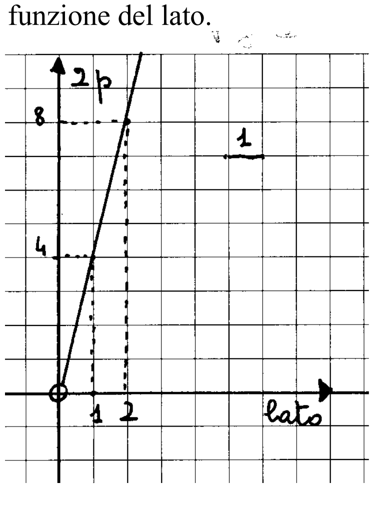


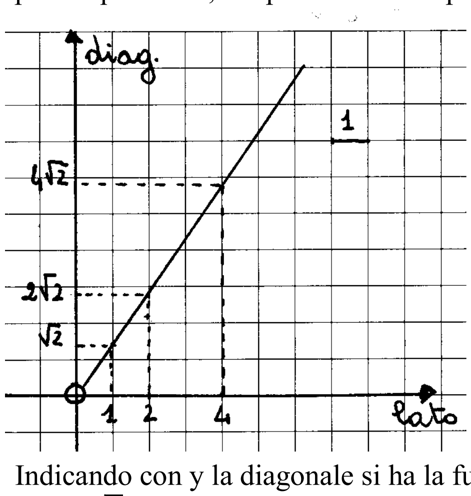
Dati: $\overline{AB}=x$ con $x>0$

Obiettivo: $?\ 2p;\ ?\ \overline{AC}$

Soluzione

$2p=4\cdot x$, al variare del lato varia il perimetro, che risulta essere dunque funzione del lato.
Indicato con y il perimetro scriviamo $y=4x$, funzione di proporzionalità diretta con $Dominio=R^+$, coefficiente $k=4$. La rappresentazione grafica di questa funzione è una semiretta contenuta nel primo quadrante, ma privata del suo punto origine.





Determiniamo ora la diagonale: per il teorema di Pitagora si ha

$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2+\overline{BC}^2 = x^2+x^2 = 2x^2$ da cui

$\overline{AC} = \sqrt{2\cdot x^2} = x\cdot\sqrt{2}$

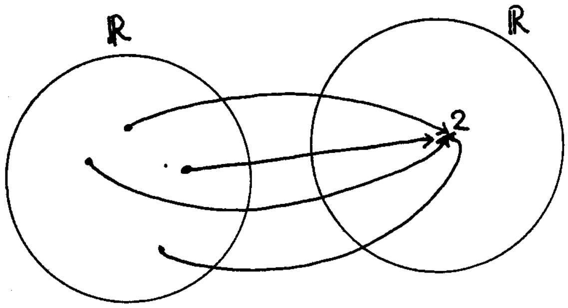
Indicando con y la diagonale si ha la funzione di proporzionalità diretta $y = \sqrt{2}\cdot x$ con coefficiente $k = \sqrt{2}$, di dominio $D=R^+$.
La rappresentazione grafica di questa funzione è una semiretta contenuta nel primo quadrante, ma privata del suo punto origine.

258 x rappresenta la misura del lato di un triangolo equilatero; determina la misura della altezza al variare della misura del lato. Nel riferimento cartesiano ortogonale traccia il grafico della funzione ottenuta.

259 Quale deve essere la misura del lato di un quadrato per avere la diagonale di 2metri?

La funzione costante

Il seguente grafo rappresenta una funzione in cui **D**ominio = **R** e l'insieme **IM**magine = **{2}**:

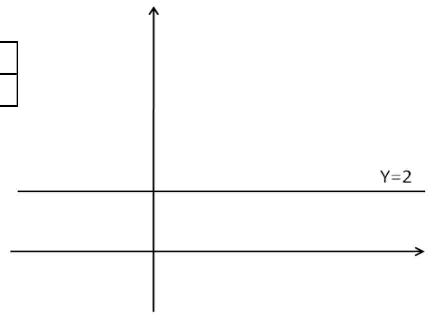


DEFINIZIONE. Si chiama **funzione costante** la legge che associa ad ogni valore assunto dalla variabile indipendente lo stesso valore della variabile dipendente; in simboli: $\forall x \in \mathbb{R}$ è $y = k$ con $k \in \mathbb{R}$.

Rappresentiamo la funzione del grafo come formula, compiliamo la tabella e infine tracciamo il suo grafico nel riferimento cartesiano ortogonale:

formula: $y=2$

x	-2	0	-3	1	2	…
y	2	2	2	2	...	...



Il grafico di una funzione costante è una retta parallela all'asse delle ascisse (asse x).

Osserviamo che se k è positivo la retta sta nel semipiano delle ordinate positive (I° e II° quadrante); se k è negativo la retta sta nel semipiano delle ordinate negative (III° e IV° quadrante); se k =0 allora la retta coincide con l'asse x delle ascisse.

260 Traccia nel riferimento cartesiano ortogonale il grafico delle funzioni:

y=-2; y=6; y=0; y=-1 y=+3

261 Traccia nel riferimento cartesiano la funzione $y=1$ e $y=-3$; nello stesso riferimento traccia la funzione $y=2x$. Le tre rette individuano nel piano due punti. Determina la distanza dei due punti.

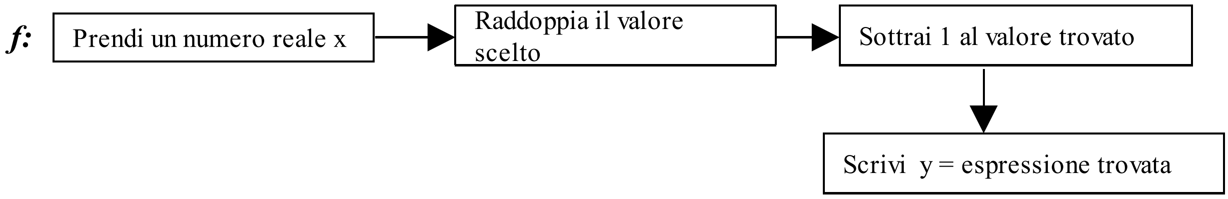
262 Le due funzioni f_1 e f_2 di proporzionalità diretta assegnate dalle tabelle seguenti delimitano sulla funzione y= -2 un segmento; determina la misura del segmento e il suo punto medio.

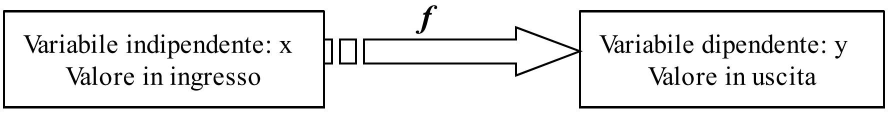
f_1:	x	-2	0	+3	-1
	y	2	0	-3	1
f_2	x	1	0	+3	-2
	y	4	0	12	-8

263 Traccia il grafico cartesiano delle funzioni $f_1: y = 2x$ $f_2: y = -\frac{1}{2}x$ $f_3: y = 2$ e indica con A e B rispettivamente i punti di intersezione di f_1 con f_3 e di f_2 con f_3. Considera il triangolo AOB (O è l'origine del riferimento). È vero che $\overline{AB}^2=\overline{AO}^2+\overline{OB}^2$? Sai trarre una caratteristica del triangolo AOB? Traccia nello stesso riferimento la funzione $f_4 = y-4$ e indica con C e D rispettivamente i punti di intersezione di f_1 con f_4 e di f_2 con f_4. Calcola l'area del quadrilatero ABCD.

La funzione lineare

Le seguenti istruzioni individuano una funzione:





Completa:
La funzione assegnata si esprime con linguaggio comune: " la differenza tra ……………………..

La formula che indica il legame algebrico tra la variabile indipendente e la variabile dipendente è y = … …
La tabella che ne rappresenta alcuni valori è:

x	-2	0	…	…	…	…	…
y			0				

Rappresenta i punti del grafico in un riferimento cartesiano ortogonale.
Rispondi:

- i punti trovati sono allineati? SI NO
- la funzione è una proporzionalità diretta? SI NO

DEFINIZIONE. Una funzione espressa dalla formula $y = m \cdot x + q$ con $m \in \mathbb{R}$ e $q \in \mathbb{R}$ il cui grafico è una retta si dicono **funzioni lineari**.

264 Sono assegnate le funzioni lineari: $f_1 : y = \frac{1}{2}x - 2$ $f_2 : y = -x - \frac{3}{4}$ $f_3 : y = 6x - 6$

Rappresentale in un riferimento cartesiano ortogonale dopo aver compilato per ciascuna una tabella di valori.

265 Segna nel riferimento cartesiano ortogonale i punti assegnati tramite la tabella:

x	-3	-3/2	0	3	6
y	-2	-1	0	2	4

La funzione assegnata è una proporzionalità diretta?
Scrivi la formula $y = \dots\dots\dots$
Completa ora la tabella avente i medesimi valori della variabile indipendente, ma i valori della variabile dipendente siano ottenuti dai precedenti diminuiti di 2:

x	-3	-3/2	0	3	6
y	…	…	-2	…	…

Scrivi la formula della nuova funzione $y = \dots\dots\dots$
Traccia il suo grafico nello stesso riferimento. È una funzione lineare? ………..

Significato dei coefficienti m e q nella funzione lineare y = mx+q

Se $m=0$ la funzione è $y=q$, il suo grafico è una retta parallela all'asse x.
Se $m\neq 0$ esso è il coefficiente angolare della retta; ci dà informazioni sull'angolo che la retta forma con l'asse orientato delle ascisse.
Se $m>0$ l'angolo formato con l'asse delle ascisse è un angolo acuto; se $m<0$ l'angolo è ottuso.
Se $q=0$ la funzione è $y=ax$, il suo grafico è una retta passante per l'origine.
Se $q\neq 0$ esso è l'ordinata del punto di intersezione della retta con l'asse delle ordinate (asse y)

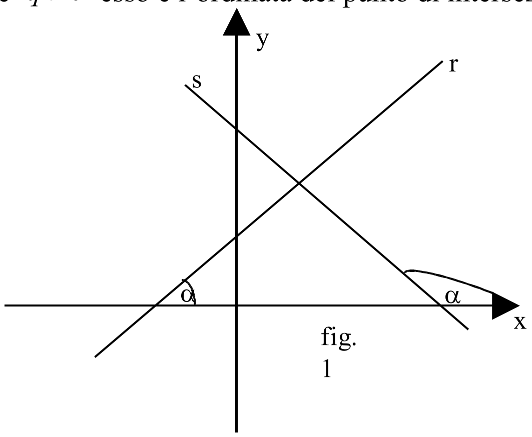


fig. 1

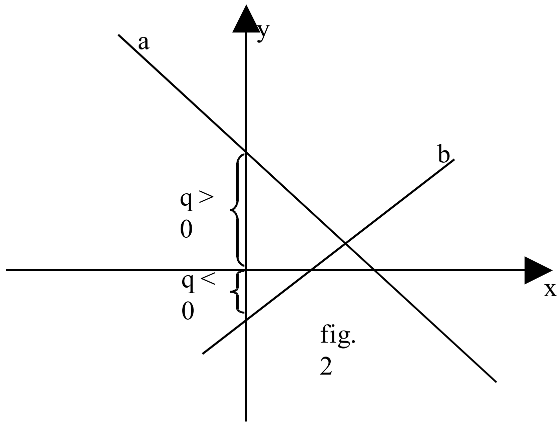


fig. 2

Conclusione
La funzione costante e la funzione di proporzionalità diretta sono funzioni lineari.

266 Riferendoti ai grafici delle figure 1 e 2, completa:

- nella formula della funzione avente r come grafico si ha m …. 0 e q …...0;
- nella formula della funzione avente s come grafico si ha m …. 0 e q …...0;
- nella formula della funzione avente a come grafico si ha m …. 0 e q …...0;
- nella formula della funzione avente b come grafico si ha m …. 0 e q …...0.

È possibile assegnata una tabella di corrispondenza determinare la formula della funzione lineare?
Si può determinare; noi analizzeremo solo un caso particolare.

Esempio
Stabilisci se la tabella assegnata rappresenta una funzione lineare e determina la formula che la descrive.

x	-2	-1	0	1	2/3
y	-8	-5	-2	1	0

x	-2	-1	0	1	2/3
y	-6	-3	0	3	2

Soluzione
Segno nel riferimento cartesiano i punti corrispondenti alle coppie ordinate $(x\,;\,y)$ date dalla tabella e osservo che il grafico è una retta non passante per l'origine. Non si tratta dunque di una proporzionalità diretta (d'altra parte il rapporto y/x non è costante!).
Per determinare la formula devo stabilire il valore di m (coefficiente angolare) e di q .
Dalla tabella so individuare il valore di q=-2, infatti per x=0 si ha y=-2. Per determinare m sommo 2 a tutte le ordinate e trovo la tabella della proporzionalità diretta $y=3x$. Quindi la formula della funzione lineare cercata è $y=3x-2$.
Questo procedimento è possibile perché nella tabella è già evidente il valore di q .

267 Le tabelle individuano coppie di punti allineati; trova la formula che descrive ciascuna funzione lineare e traccia il suo grafico.

F_1	x	5	-1	0	3	1
	y	-2	4	-3	0	2
F_2	x	-4	-4/3	0	-1/3	4/3
	y	-2	0	1	3/4	2
F_3	x	-6	-1	0	3	1
	y	-11/3	-1/3	1/3	7/3	1

La funzione di proporzionalità inversa

Problema

La base e l'altezza di un rettangolo ABCD misurano rispettivamente 3cm e 4cm.
Determina la sua area.
Soluzione: ………………………………….
Se le misure dei lati sono numeri interi, esistono altri rettangoli equivalenti a quello dato?
………………………………………..
Costruisci i rettangoli equivalenti, indicando accanto a ciascuno la misura dei lati.
Se le misure fossero numeri reali, potresti determinare **tutti** i rettangoli equivalenti a quello assegnato?
……………………………………………….
Generalizziamo: I lati x e y di tutti i rettangoli equivalenti a quello dato sono legati dalla condizione $x \cdot y = 12$ con $x \in \mathbb{R}^+$ e $y \in \mathbb{R}^+$

x	6	8	10	1/3	4/3
y	2	3/2	6/5	36	9

Osserviamo che se fissiamo il valore di x il lato y vale $y = \frac{12}{x}$ come nella tabella

Rappresenta ora nel riferimento cartesiano ortogonale i punti individuati dalla tabella: essi si collocano nel primo quadrante perché ………………………………………………………
Ti sembrano allineati? ……………………….

DEFINIZIONE. Una funzione in cui risulta **costante e diverso da zero il prodotto** tra la variabile dipendente e la variabile indipendente si chiama **funzione di proporzionalità inversa**. In simboli:
y inversamente proporzionale a $x \Leftrightarrow x \cdot y = k$ con $k \in \mathbb{R}_0$ e $x \neq 0$ o anche $y = \frac{k}{x}$

Il grafico di una funzione di proporzionalità inversa è una curva chiamate iperbole.
Analizziamo tale funzione e rappresentiamo il suo grafico a secondo dei valori della costante k.

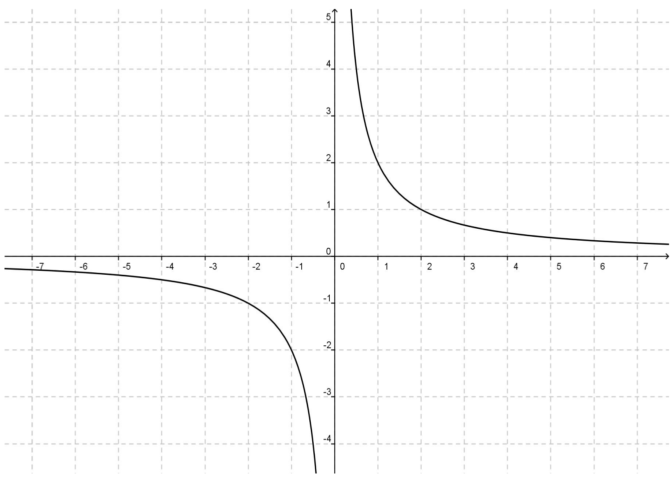
Caso k > 0: quando ci proponiamo di costruire una tabella di valori, le variabili x e y sono senz'altro concordi; al numero positivo x corrisponde il numero positivo $y = \frac{k}{x}$ dunque i punti nel riferimento cartesiano si collocano nel primo quadrante; al numero negativo x corrisponde il numero negativo $y = \frac{k}{x}$ dunque i punti nel riferimento cartesiano si collocano nel terzo quadrante.

Esempio

rappresentare graficamente la funzione $y = \frac{2}{x}$.

Per far questo assegniamo a x alcuni valori, positivi e negativi:

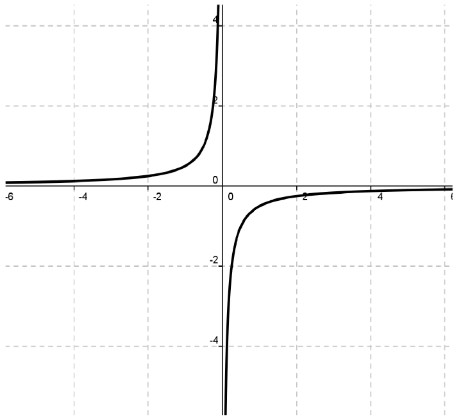
x	-3	-1	-1/2	1	4	1/2	3
y	-2/3	-2	-4	2	1/2	4	2/3



e riportiamo i punti nel riferimento cartesiano ortogonale. Essi si collocano nel primo e terzo quadrante come previsto, non sono allineati. Non possiamo attribuire alla variabile indipendente il valore zero perché non si può dividere per zero, né alcun valore di x potrà avere come immagine $y=0$ in quanto un quoziente è zero se il dividendo è zero (in questo caso è 2).
Il dominio è $D = \mathbb{R}_0$ e l'insieme immagine è $\text{IM} = \mathbb{R}_0$.
Il grafico di questa funzione non ha punti appartenenti agli assi coordinati. Questa curva **è una iperbole**; essa è formata da due rami che si collocano nel I° e III° quadrante.

Caso k < 0: quando ci proponiamo di costruire una tabella di valori, le variabili x e y sono senz'altro discordi; al numero positivo x corrisponde il numero negativo $y = \frac{k}{x}$ dunque i punti nel riferimento cartesiano si collocano nel quarto quadrante; al numero negativo x corrisponde il numero positivo $y = \frac{k}{x}$ dunque i punti nel riferimento cartesiano si collocano nel secondo quadrante.

Esempio



Rappresentare graficamente la funzione $y = -\frac{1}{2x}$.

Per far questo assegniamo a x alcuni valori, positivi e negativi:

x	-2	-1	-1/2	1	2	1/2	3/2
y	+1/4	1/2	1	-1/2	-1/4	-1	-1/3

e riportiamo i punti nel riferimento cartesiano ortogonale. Essi si collocano nel secondo e quarto quadrante come previsto, non sono allineati. Non possiamo attribuire alla variabile indipendente il valore zero perché non si può dividere per zero, né alcun valore di x potrà avere come immagine $y=0$ in quanto un quoziente è zero se il dividendo è zero, in questo caso $-\frac{1}{2}$. Il dominio è $D = \mathbb{R}_0$, l'insieme immagine è $\mathrm{IM} = \mathbb{R}_0$.

Il grafico di questa funzione non ha punti appartenenti agli assi coordinati. Questa curva **è una iperbole**; essa è formata da due rami che si collocano nel II° e IV° quadrante.

268 Traccia il grafico delle seguenti funzioni di proporzionalità inversa:

a) $f_1 = -\frac{3}{2x}$ b) $f_2 = \frac{1}{x}$ c) $f_3 = \frac{5}{x}$

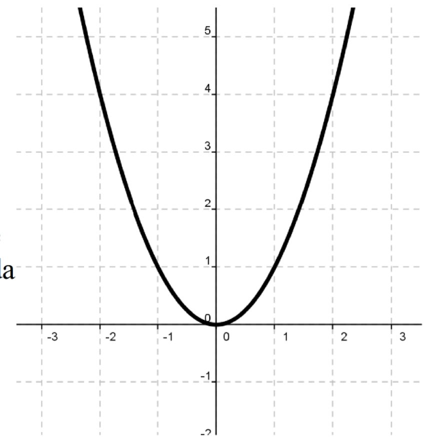
d) $f_4 = \frac{-3}{x}$ e) $f_5 = -\frac{1}{x}$ f) $f_6 = -\frac{2}{5x}$

269 Traccia nelle stesso riferimento cartesiano ortogonale la curva γ $y = -\frac{1}{2x}$ e le rette $r_1:\ y=2$ e $r_2:\ y=-2$. Verifica che l'origine del riferimento è il punto medio del segmento avente per estremi i punti $A_1 = r_1 \cap \gamma$ e $A_2 = r_2 \cap \gamma$.

La funzione di proporzionalità quadratica

È assegnata la tabella che esprime il legame tra due variabili reali; determina se essa rappresenta una funzione costane, una funzione di proporzionalità diretta, di proporzionalità inversa oppure una funzione lineare:

x	-2	-1	1/2	0	2	3	3/2
y	4	1	1/4	0	4	9	9/4



Costruisci le proposizioni del tipo:

"La tabella rappresenta/non rappresenta una funzione di …………."

Come avrai notato dall'analisi delle coppie assegnate, quella tabella associa ad ogni valore della variabile indipendente il suo quadrato.

Il dominio di tale funzione è $D=R$, mentre l'Immagine è $\mathrm{IM}=R^+ \cup \{0\}$.

Possiamo osservare che è costante il rapporto tra il valore della variabile dipendente e il quadrato della variabile indipendente quando è diversa da zero; essendo $\frac{y}{x^2}=1$ con $x \neq 0$ la formula in cui si esprime il legame algebrico delle due variabili è, in questo caso, $y=x^2$.

Costruiamo il suo grafico, utilizzando i punti della tabella:

DEFINIZIONE. Una funzione in cui risulta **costante e diverso da zero il rapporto** tra la variabile dipendente e il quadrato della variabile indipendente si chiama **funzione di proporzionalità quadratica**.

In simboli: y proporzionale a $x^2 \Leftrightarrow \frac{y}{x^2} = k$ con $k \in \mathbb{R}$ e $k \neq 0$ o anche $y = k \cdot x^2$

Il grafico di una funzione di proporzionalità quadratica è una curva passante per l'origine, chiamata parabola. Il punto O(0;0) si chiama vertice della parabola.

270 Traccia il grafico delle seguenti funzioni di proporzionalità quadratica:

a) $f_1 = -x^2$ b) $f_2 = x^2$ c) $f_3 = -\frac{1}{2}x^2$

d) $f_4 = -\frac{5}{2}x^2$ e) $f_5 = \frac{3}{4}x^2$ f) $f_6 = \frac{7}{3}x^2$

271 Dai grafici dell'esercizio precedente trai le conclusioni, completando:

- se $k > 0$ allora i punti della parabola si trovano……………..
- se $k < 0$ allora i punti della parabola si trovano ……………..
- se $k > 1$ allora la curva è più aperta o più chiusa rispetto alla $y = x^2$? ………………
- se $0 < k < 1$ allora la curva è più aperta o più chiusa rispetto alla $y = x^2$?……………
- se $k < -1$ allora la curva è più aperta o più chiusa rispetto alla $y = -x^2$?……………
- se $-1 < k < 0$ allora la curva è più aperta o più chiusa rispetto alla $y = -x^2$?…………

272 Determina la distanza del punto di ascissa $x = -2$ della parabola $y = 3x^2$ dal suo vertice.

273 Sono assegnate le funzioni $f_1 :\ y = (-x)^2$ e $f_2 :\ y = -x^2$ di proporzionalità quadratica.

h) Spiega se e perché sono o non sono la stessa funzione.
i) Danne di ciascuna la descrizione in linguaggio comune.
j) Costruisci per ciascuna una tabella di valori e costruisci il rispettivo grafico.
k) Puoi confermare la risposta data alla prima richiesta?

274 Completa la seguente tabella:

funzione	in linguaggio comune	formula	tipo
F_1	Associa ad ogni x reale il valore –2/3		
F_2	Associa ad ogni x reale il triplo del suo quadrato		
F_3		$y = -5x^2$	
F_4	Associa ad ogni x reale il suo doppio aumentato di 3/2		
F_5	Associa ad ogni x reale diverso da zero l'opposto del suo reciproco		
F_6		$y = -5$x	

Traccia nel riferimento cartesiano ortogonale le funzioni assegnate. Per quale/i è vero che per qualunque x del dominio è $\text{IM} = \mathbb{R}$ **?**

275 Il rettangolo ABCD ha il lato AB triplo del lato BC. Indica $\overline{BC} = x$; determina il perimetro del rettangolo in funzione di x. $2\text{p} = \ldots\ldots\ldots$

Spiega perché è necessaria la condizione $x > 0$; rappresenta graficamente nel riferimento cartesiano la funzione perimetro. Determina ora l'area in funzione di x, $area = \ldots\ldots\ldots$; rappresenta la funzione area, nello stesso riferimento.

276 Il triangolo rettangolo ABC, retto in A ha i cateti l'uno doppio dell'altro. Indica la misura del cateto minore $\overline{AB} = x$ e spiega perché è necessaria la condizione $x > 0$. Determina in funzione di x l'area del triangolo. $area = \ldots\ldots\ldots$ rappresenta questa funzione nel riferimento cartesiano ortogonale.

Stabilisci le misure dei cateti se l'area è di 20cm^2.

Calcola in funzione di x il perimetro del triangolo: $2\text{p} = \ldots\ldots\ldots$, rappresenta come varia la funzione perimetro al variare di x.

277 Nel triangolo isoscele ABC il lato obliquo AB è doppio della base BC; indica $\overline{BC} = x$ e determina in funzione di x il perimetro del triangolo. $2\text{p} = \ldots\ldots\ldots$

Di che funzione si tratta? Descrivila e rappresentala nel riferimento cartesiano ortogonale, dopo aver fissato le opportune condizioni sulla variabile indipendente.

Se il perimetro è cm120, quanto misurano i lati del triangolo?

Calcola, in questo caso, l'area del triangolo e la misura delle altezze relative ai lati uguali.

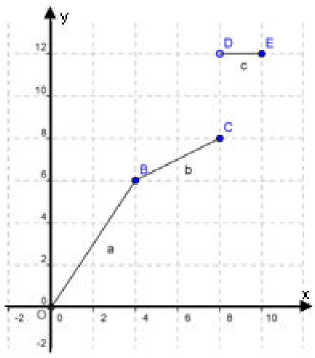
Funzione lineare a tratti

Problema

La ditta “Farvit” produce viti che vengono vendute a peso in imballaggi particolari il cui peso non supera i 10Kg.; la tabella dei prezzi esposta nel magazzino degli ordini è la seguente:

peso ≤ 4Kg	Costo =1,5·peso
4 Kg < peso ≤ 8Kg	Costo =0,5·peso + 4euro
8Kg < peso ≤ 10Kg	Costo = 12 euro

Pensando il peso come variabile indipendente che possa assumere qualunque valore reale positivo, possiamo rappresentare la tabella esposta con un grafico.

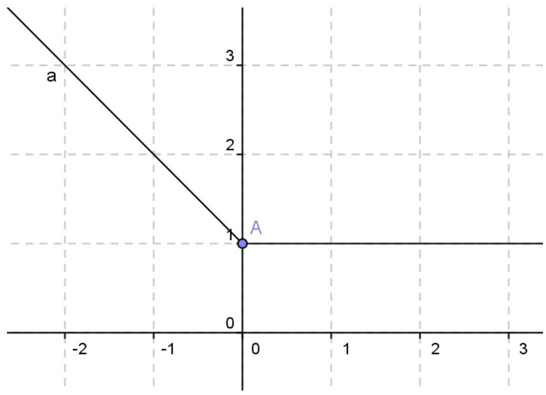


Osserviamo che il punto C rappresenta il costo di un pacco di 8Kg.; il punto D è l’estremo di un segmento aperto a sinistra.
Per un peso di 8,1Kg il costo è di 10 euro.
Il grafico tracciato è formato da segmenti appartenenti a rette diverse: in questi casi si dice che la funzione è definita per casi.
Rispondete:
Qual è il costo di una confezione di 3Kg? costo =………
Segnate il punto corrispondente sul grafico.
Il punto E cosa rappresenta? ……………………………………..
Stabilite il Dominio e il codominio della funzione Costo.

DEFINIZIONE. Diciamo che una funzione è **definita per casi** quando è definita da espressioni diverse su sottoinsiemi diversi del dominio.

Esempio

È assegnata la funzione $f(x)=\begin{cases} f_1 : y=1-x \text{ con } x\le 0 \\ f_2 : y=1 \text{ con } x>0 \end{cases}$; tracciate il suo grafico.



1° passo: individuiamo il dominio che risulta dall’unione dei sottoinsiemi in cui è definita ciascuna espressione; quindi $D_f = D_{f1} \cup D_{f2} = \mathbb{R}$.

2° passo: f_1 è una funzione lineare, quindi determiniamo due punti per tracciarne il grafico: A(0,1) e B(-1,2); f_2 è una funzione costante.

3° passo: tracciamo il grafico che risulta formato dall’unione di due semirette aventi la stessa origine A(0,1)

278 Dopo aver determinato il Dominio, tracciare il grafico della funzione $f(x)=\begin{cases} y=1 \text{ se } x\ge 0 \\ y=0 \text{ se } x=0 \\ y=-1 \text{ se } x<0 \end{cases}$ e calcolare l’ordinata dei suoi punti A e B sapendo che $x_A=34$ e $x_B=-5$.

Osservazione

Il grafico dell’esempio e quello dell'esercizio hanno una notevole differenza:
le due semirette dell’esempio hanno la stessa origine, il grafico si può tracciare senza sollevare la matita dal foglio, le semirette dell'esercizio precedente hanno invece origine diversa e il grafico non può essere tracciato senza sollevare la matita dal foglio. Diciamo nel primo caso che la funzione è **continua** nel dominio, nel secondo caso che è **discontinua**.

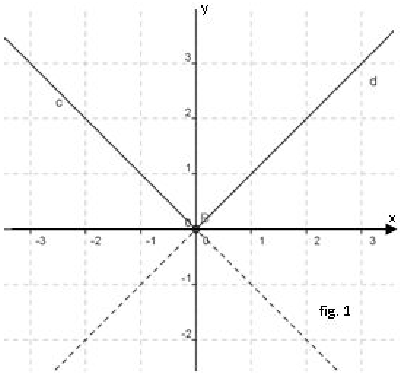
279 Tracciare il grafico della funzione $f(x)=\begin{cases} y=-1 \text{ se } x>1 \\ y=2x \text{ se } x\le 1 \end{cases}$

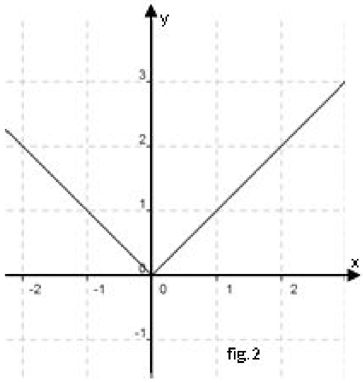
Funzione valore assoluto

Particolare importanza assume la funzione valore assoluto definita da R a R:

$$f(x)=|x|=\begin{cases} y=x & \text{se } x\geq 0 \\ y=-x & \text{se } x<0 \end{cases}$$

Vogliamo tracciarne il grafico. Nel riferimento cartesiano ortogonale tracciamo la retta y = x e su di essa evidenziamo la semiretta *d* avente l'origine in O i cui punti appartengono al primo quadrante; analogamente tracciamo la retta y = -x e su di essa evidenziamo la semiretta c avente l'origine in O i cui punti appartengono al secondo quadrante. Nelle figure sono rappresentati i passi descritti (fig.1) e quindi il grafico della funzione valore assoluto come unione delle due semirette evidenziate (fig.2).





Conclusione

Il grafico della funzione valore assoluto di equazione $y=|x|$ è formato da due semirette aventi come origine l'origine del riferimento cartesiano, la funzione è continua, è nulla per x = 0 e positiva per ogni $x\in\mathbb{R}-\{0\}$, il codominio è $C=\{y\in\mathbb{R}\,|\,y\geq 0\}$.

280 Tracciare il grafico della funzione $y=|x+1|$.

281 Un caseificio vende mozzarelle a € 4,50 al chilo ai clienti che acquistano fino 1 0kg di mozzarella, per i clienti che fanno acquisti superiori ai 10kg vende a € 4,00 al kg per la parte che eccede i 10kg e per i primo 10kg vende sempre a € 4,50. Per i clienti dei grandi supermercati che acquistano quantità superiori a 100kg vende a € 3,50 al kg. Codifica con opportune formule la funzione costo:

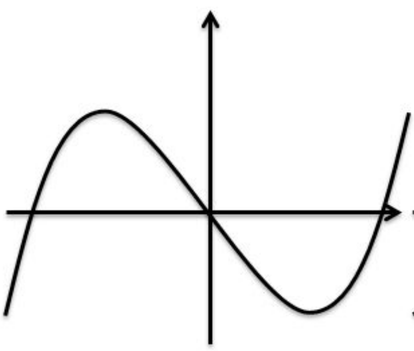
$$\begin{cases} \ldots\ldots\ldots & \text{se } x\leq 10 \\ \ldots\ldots\ldots & \text{se } 10<x<100 \\ \ldots\ldots\ldots & \text{se } x>100 \end{cases}$$

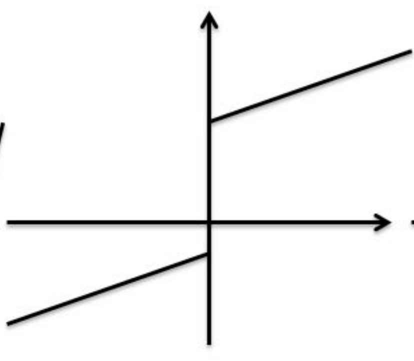
Determina il costo dei seguenti ordini

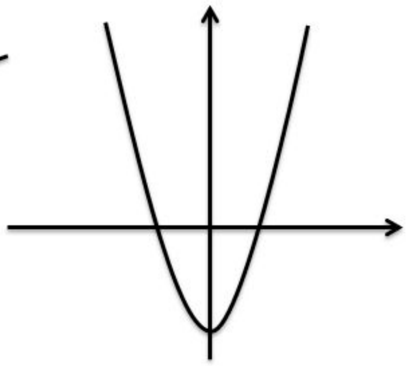
kg	3,5	11,8	78	120			
€					360	57	35

Rappresenta graficamente la funzione.

282 Dal grafico della funzione stabilisci insieme di definizione D, immagine IM, verifica se la funzione è iniettiva, sueriettiva o biettiva.







D = … … … D = … … … D = … … …

IM = … … … IM = … … … IM = … … …

Iniettiva – Suriettiva – Biettiva Iniettiva – Suriettiva – Biettiva Iniettiva – Suriettiva - Biettiva

►16. Particolari relazioni d’equivalenza

La costruzione dell’insieme dei numeri interi relativi

“ Dio fece i numeri naturali, tutto il resto è opera dell’uomo.”
Leopold Kronecker (Liegnitz 1823, Berlino 1891)

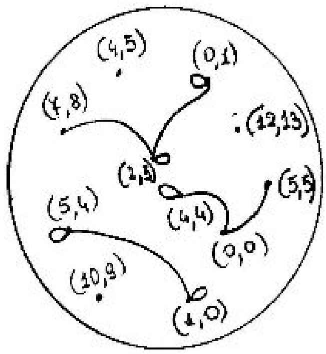
Esempio

Preso l'insieme A = {(4,5), (7,8), (0,1), (2,3), (5,4), (12,13), (10,9), (5,5), (1,0), (4,4), (0,0)}, sottoinsieme del prodotto cartesiano NxN, considera in A la relazione *R* così definita:

“(m,n) *R* (p,q) se e solo se la somma di m con q è uguale alla somma di n con p”

in linguaggio matematico: (m,n) *R* (p,q) se e solo se m+q = n+p

- Completa il suo grafo e deduci le proprietà:
- Costruisci e rappresenta con diagrammi di Eulero-Venn la partizione P(A) dell’insieme A e l’insieme quoziente A/*R*.
- Quante classi d'equivalenza hai ottenuto?
- È vero che ciascuna di esse può essere rappresentata da una coppia avente almeno un elemento nullo?
- Scrivi i rappresentanti delle classi d’equivalenza.



Proviamo ora a generalizzare quanto ottenuto.
Nel prodotto cartesiano NxN consideriamo la relazione *R* definita nell'attività precedente; essendo NxN formato da infiniti elementi non possiamo rappresentare il grafo della relazione, ma possiamo comunque studiarne le proprietà per stabilire se anche in questo insieme si mantengono le conclusioni raggiunte nell’esercizio.

- La relazione è riflessiva: per qualunque coppia (m,n) di NxN si ha (m,n) *R* (m,n).

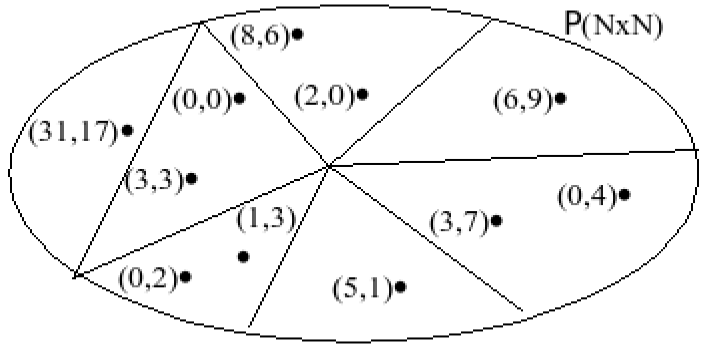
Infatti applicando il predicato della relazione si ottiene l'uguaglianza m+n = n+m, vera qualunque siano i numeri naturali m ed n poiché l'addizione in N gode della proprietà commutativa.
Con riferimento all'attività precedente hai potuto infatti mettere il cappio sopra ogni coppia: ad esempio è vero che (4,5) *R* (4,5) poiché 4+5 = 5+4.

- La relazione è simmetrica: per qualunque (m,n) e (p,q) appartenenti a NxN, se (m,n)*R*(p,q) allora (p,q)*R*(m,n).

Infatti se (m,n)*R*(p,q) si ha m+q = n+p; per la proprietà commutativa dell'addizione in N si ha anche p+n = q+m, uguaglianza che assicura la validità della relazione tra la coppia (p,q) e (m,n).
Nell’esercizio precedente, ad esempio, la coppia (5,4) è in relazione con la coppia (10,9) perché è vero che 5+9 = 4+10; da questa è anche vero che 10+4 = 9+5, uguaglianza che assicura (10,9)*R*(5,4): nel grafo hai usato archi per evidenziare coppie in relazione.

- La relazione è transitiva: se (m,n)*R*(p,q) e (p,q)*R*(s,t) allora (m,n)*R*(s,t) , per qualunque terna di coppie (m,n) , (p,q) , (s,t) appartenenti a NxN.

Infatti se (m,n)*R*(p,q) e (p,q)*R*(s,t) si ha m+q = n+p e p+t = q+s; sommando membro a membro le precedenti uguaglianze si ottiene m+q + p+t = n+p + q+s che può anche essere scritta
(m+t)+(q+p)=(n+s)+(q+p) per le proprietà commutativa e associativa dell'addizione in N. Confrontando i membri dell'uguaglianza si deduce che m+t = n+s, e quest'ultima assicura la verità dell'affermazione (m,n)*R*(s,t).
Riferendoti all'esercizio svolto sopra hai potuto stabilire che (5,4)*R*(10,9) e (10,9)*R*(1,0) poiché 5+9=4+10 e 10+0=9+1; procediamo come nel ragionamento precedente e sommiamo membro a membro le due uguaglianze; otteniamo 5+9+10+0 = 4+10+9+1, uguaglianza che si può anche scrivere (5+0)+(9+10) = (4+1)+(10+9), da cui 5+0=4+1 che assicura la verità di (5,4)*R*(1,0): nel grafo della relazione compaiono triangoli aventi come vertici coppie in relazione.



Conclusione 1
La relazione R così introdotta nell'insieme delle coppie ordinate di numeri naturali è una relazione d'equivalenza che determina una partizione in classi d'equivalenza dell'insieme NxN.

Analizzando con attenzione P(NxN), possiamo determinare quale coppia ci conviene assumere come rappresentante di ciascuna classe d'equivalenza.
Si può osservare che

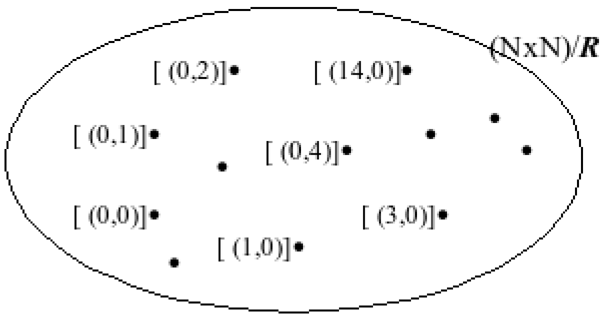
- coppie formate da elementi uguali appartengono alla stessa classe d'equivalenza che può quindi essere rappresentata dalla coppia (0,0);
- la coppia (m,n) con m > n è equivalente alla coppia (m-n,0) essendo m+0 = n+m-n; pertanto la classe d'equivalenza della coppia (m,n) può essere rappresentata dalla coppia (m-n,0);
- la coppia (m,n) con m < n è equivalente alla coppia (0, n-m) essendo m+n-m = n+0; pertanto la classe d'equivalenza della coppia (m,n) è rappresentata dalla coppia (0,n-m).

283 Determina la coppia avente un elemento nullo, equivalente a

(31,17) … … … …   (6,9) … … … …   (5,1) … … … …

Conclusione 2
Ciascuna classe d'equivalenza può essere rappresentata da una coppia di numeri naturali avente almeno un elemento nullo.

L'insieme quoziente (NxN)/*R* è pertanto:



DEFINIZIONI
Si chiama **numero intero relativo** ogni classe d'equivalenza ottenuta introducendo in NxN la relazione (m,n) *R* (p,q) se e solo se m+q = n+p.
Si chiama **forma canonica del numero intero relativo** la coppia scelta come rappresentante della classe d'equivalenza.

Possiamo ad esempio dire che la classe [(3,7)] è un numero intero relativo di forma canonica (0,4).

284 Completa la tabella:

numero intero relativo	elementi della classe d'equivalenza	forma canonica del numero intero
[(5,7)]		
	(7,5) (11,9) (34,32) (3,1) ……….	
		(7,0)
[(56,90)]		
	(3,3) (76,76) (9,9) (43,43) ……….	
		(0,4)
	(4,9) (8,13) (57,62) ……………	

DEFINIZIONI
Si chiama **numero intero positivo** la classe d'equivalenza [(n,0)] e si indica con il simbolo +n.
Si chiama **numero intero negativo** la classe d'equivalenza [(0,n)] e si indica con il simbolo -n
Si chiama **zero** la classe d'equivalenza [(0,0)] e si indica con 0
Si chiama **valore assoluto del numero intero relativo** il numero naturale diverso da zero che compare nella sua forma canonica.

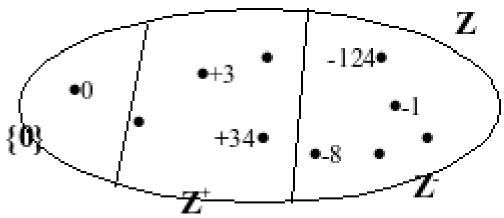
285 Completa la tabella:

numero intero	forma canonica	simbolo usuale	valore assoluto
		+ 6	
	(0,2)		
[(5,5)]			
		- 1	

DEFINIZIONE. L'insieme (NxN)/*R* è chiamato **insieme dei numeri interi relativi** e indicato con il simbolo $\mathbb{Z}$.

Osservazioni

- L'insieme dei numeri interi relativi viene semplicemente chiamato insieme dei numeri interi.
- Esso contiene tre sottoinsiemi Z^+ = {x / x è intero positivo}, Z^- = {x / x è intero negativo}, e l'insieme il cui unico elemento è lo zero {0}. Scriviamo quindi $Z = Z^+ \cup Z^- \cup \{0\}$ e rappresentiamo con diagramma di Eulero-Venn:



- Quando si debbano considerare solamente gli interi positivi e negativi si usa il simbolo Z_0 col quale si indica che l'insieme dei numeri interi relativi è stato privato dello zero: $Z_0 = Z^+ \cup Z^- = Z - \{0\}$

La costruzione dell'insieme dei numeri razionali
Indichiamo con N_0 l'insieme dei naturali privato dello zero, precisamente $N_0 = N - \{0\}$e costruiamo l'insieme NxN_0; esso sarà costituito da tutte le coppie ordinate di numeri naturali di cui il secondo elemento è diverso da zero, cioè $(0,3)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}_0$ mentre $(5,0)\notin\mathbb{N}\times\mathbb{N}_0$.
In questo insieme sia *R* la relazione così definita
(m,n)*R*(p,q) se e solo se m·q = n·p

Esempio
Segna se Vero o Falso e dai la motivazione di quanto affermi:

coppie	V	F	motivazione
(3,5) R (15,25)			
(3,9) R (1,3)			
(8,9) R (7,8)			
(0,6) R (0,1)			

Analizziamo le proprietà della relazione:

- La relazione è riflessiva: per qualunque $(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}_0$ si ha (m,n) *R* (m,n).

Infatti applicando il predicato della relazione si ottiene l'uguaglianza m·n = n·m, vera qualunque siano i numeri naturali m ed n poiché la moltiplicazione in N gode della proprietà commutativa.

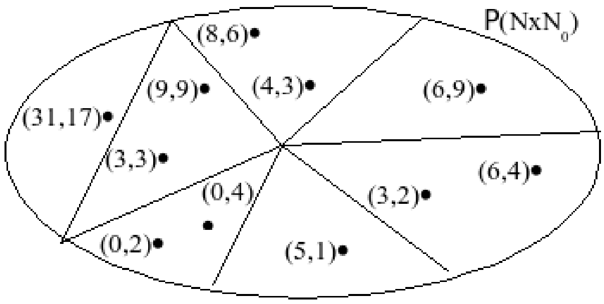
- La relazione è simmetrica: per qualunque (m,n) e (p,q) dell'insieme $\mathbb{N}\times\mathbb{N}_0$ se (m,n)*R*(p,q) allora (p,q)*R*(m,n).

Infatti se (m,n)*R*(p,q) si ha m·q = n·p; per la proprietà commutativa della moltiplicazione in N si ha anche p·n = q·m, uguaglianza che assicura la validità della relazione tra la coppia (p,q) e (m,n).

- La relazione è transitiva: se (m,n)*R*(p,q) e (p,q)*R*(s,t) allora (m,n)*R*(s,t) , per qualunque terna di

coppie (m,n) , (p,q) , (s,t) appartenenti a $N \times N_0$.
Infatti, se (m,n)*R*(p,q) e (p,q)*R*(s,t) sappiamo che $m \cdot q = n \cdot p$ e che $p \cdot t = q \cdot s$; ora moltiplicando membro a membro le precedenti uguaglianze si ottiene $m \cdot q \cdot p \cdot t = n \cdot p \cdot q \cdot s$ che può anche essere scritta $(m \cdot t) \cdot (q \cdot p) = (n \cdot s) \cdot (q \cdot p)$ per le proprietà commutativa e associativa della moltiplicazione in N. Confrontando i membri dell'uguaglianza e dividendo per i fattori uguali si deduce che $m \cdot t = n \cdot s$, che assicura la verità dell'affermazione (m,n)*R*(s,t).

Conclusione 3
Si può concludere che la relazione *R* introdotta nell'insieme $\mathbb{N} \times \mathbb{N}_0$ è una relazione d'equivalenza che determina una partizione in classi d'equivalenza dell'insieme $\mathbb{N} \times \mathbb{N}_0$.



Vogliamo determinare la coppia da assumere come rappresentante di ciascuna classe d'equivalenza.
Per fare questo associamo a ciascuna coppia (a,b) di $\mathbb{N} \times \mathbb{N}_0$ la frazione $\frac{a}{b}$ e osserviamo che la relazione *R* in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}_0$ prende significato se trasferita nell'insieme delle frazioni dalla operazione che permette di costruire frazioni equivalenti.

Esempio

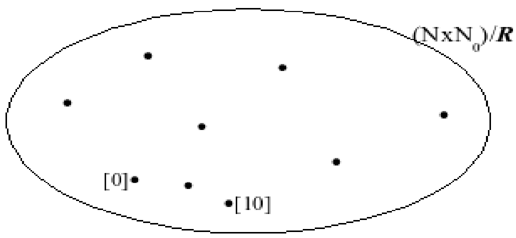
Presa la coppia (4,3) ad essa associamo la frazione $\frac{4}{3}$; alla coppia (8,6) associamo la frazione $\frac{8}{6}$. Le coppie (4,3) e (8,6) stanno nella stessa classe d'equivalenza poiché $4 \cdot 6 = 3 \cdot 8$; le frazioni $\frac{4}{3}$ e $\frac{8}{6}$ sono equivalenti secondo l'usuale definizione.

286 Completa il ragionamento:

Alla coppia (6,4) viene associata la frazione ……; alla coppia (.., ...) è associata la frazione $\frac{3}{2}$.
Le coppie … … … … … stanno nella … … … … … … … … … … … … … … ... … …;
le frazioni … … … … … … sono equivalenti secondo l'usuale definizione.

287 Ripeti l'esercizio prendendo coppie di $N \times N_0$ in relazione e mostrando la relazione di equivalenza tra le rispettive frazioni.

Conclusione 4
Tutte le coppie appartenenti ad una classe d'equivalenza risultano associate ad una stessa frazione; scegliamo dunque come rappresentante di ciascuna classe la frazione ridotta ai minimi termini.
L'insieme quoziente $\mathbb{N} \times \mathbb{N}_0 / R$ è pertanto:



DEFINIZIONI
Si chiama **insieme dei numeri razionali assoluti** l'insieme quoziente $\mathbb{N} \times \mathbb{N}_0 / R$; si indica con il simbolo Q_A.
Si chiama **numero razionale assoluto** ogni classe d'equivalenza ottenuta introducendo in NxN_0 la relazione *R*: (m,n) *R* (p,q) se e solo se m·q = n·p ; esso viene rappresentato da una frazione ridotta ai minimi termini.

Quanto abbiamo detto ci permette di passare dall'insieme delle frazioni ad un insieme di numeri che, benché scritti con il simbolo *m/n*, lo stesso usato per rappresentare una parte di una grandezza, hanno un significato completamente diverso dalla frazione. D'altra parte, hai già visto nella secondaria di primo grado che al simbolo *m/n* si può attribuire il significato di quoziente della divisione tra il numeratore e il denominatore e che i numeri razionali sono tutti quelli che si possono scrivere sotto forma di frazione.

288 Completa la tabella:

coppie	appartengono alla stessa classe d'equivalenza?	rappresentante della classe	rappresentano lo stesso numero razionale?	simbolo del numero razionale
(1,2); (3,6)	SI	$[\frac{1}{2}]$	SI	$\frac{1}{2}$
(2,7); (4,49)				
(8,5); (40,25)				
(60,12); (5,0)				
(20,2); (10,1)				

289 Completa la catena di trasformazioni:

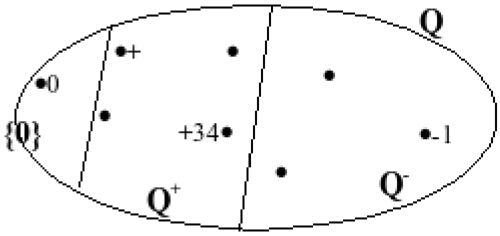
coppie	numero razionale come frazione	rappresentazione decimale
(1,2)*R*(3,6)	$\frac{1}{2}$	0.5
(2,7)*R*(4,14)		
(8,5)*R*(40,25)		
(60,12)*R*(10,2)		
(2,3)*R* (12,18)		

Conclusione 5
Se introduciamo la stessa relazione *R* nell'insieme ZxZ_0, possiamo ottenere le seguenti definizioni:

DEFINIZIONI
Si chiama **insieme dei numeri razionali relativi** l'insieme quoziente $(ZxZ_0)/R$; esso si indica con il simbolo Q.
Si chiama **numero razionale relativo** ogni classe d'equivalenza ottenuta introducendo in ZxZ_0 la relazione *R*: (m,n) *R* (p,q) se e solo se m·q = n·p ; esso viene rappresentato da una frazione ridotta ai minimi termini dotata di segno.

Osservazioni

- L'insieme dei numeri razionali relativi viene più semplicemente chiamato insieme dei numeri razionali.
- Esso contiene tre sottoinsiemi particolari Q^+ = {x / x è razionale positivo}, Q^- = {x | x è razionale negativo}, e l'insieme il cui unico elemento è lo zero {0}. Scriviamo quindi $Q = Q^+ \cup Q^- \cup \{0\}$ e rappresentiamo con diagramma di Eulero-Venn:



- Quando si devono considerare solamente i razionali positivi e negativi, zero escluso, si usa il simbolo Q_0 col quale si indica appunto l'insieme dei numeri razionali relativi privato dello zero:

  $Q_0 = Q^+ \cup Q^- = Q - \{0\}$

Classi di resti modulo n

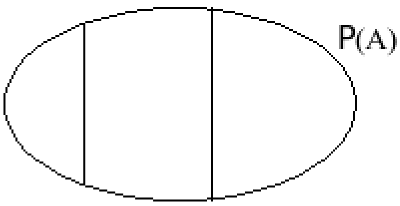
290 Considera la relazione *R*: "avere lo stesso resto nella divisione per 3" introdotta nell'insieme $A=\{n\in\mathbb{N}/0\leqslant n\leqslant 13\}$ e studiane le proprietà.

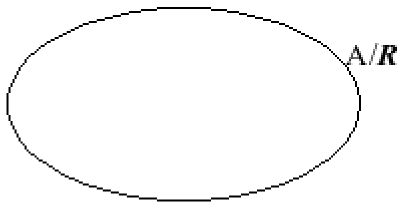
Ricordiamo che il resto della divisione si calcola con l'operazione *mod*; completiamo dunque la tabella sottostante:

	0 mod 3	1 mod 3	2 mod 3				6 mod 3	7 mod 3				11 mod 3		13 mod 3
resto	0						0					2		

La relazione *R* è d'equivalenza; infatti …
… …

Completa l'insieme P(A) partizione dell'insieme A e l'insieme quoziente A/*R*





Quali sono i rappresentanti delle classi d'equivalenza?
Sarebbe cambiato qualcosa se avessimo introdotto la stessa relazione nell'insieme N?
E se sostituissimo N con Z cosa cambierebbe?

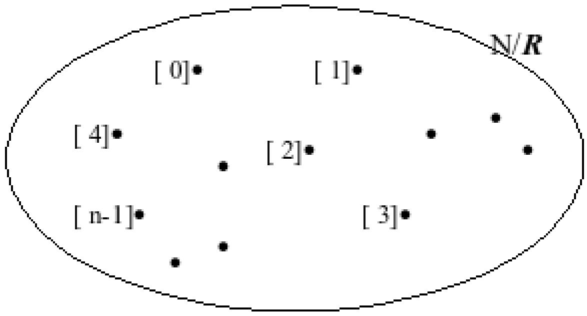
291 Nell'insieme N considera la relazione d'equivalenza *R*: "avere lo stesso resto nella divisione per 2". Quante classi d'equivalenza puoi formare? Rappresenta l'insieme P(N). Quali sono i rappresentanti di ciascuna classe? Riconosci in queste classi, particolari sottoinsiemi dell'insieme N?

Generalizziamo ora l'esercizio.
Fissato un numero naturale n > 1, considera la relazione *R*: "avere lo stesso resto nella divisione intera per n" introdotta nell'insieme N, studiane le proprietà e stabilisci se è d'equivalenza.
Osserviamo innanzitutto che nella divisione intera per n il resto si ottiene con l'operazione *mod* e si ha come resto 0, 1, 2, ………. n-1 cioè n resti;

- La relazione è riflessiva, infatti per qualunque mÎ N si ha m*R*m.
- La relazione è simmetrica, infatti per qualunque p e q dell'insieme N se p*R*q allora q*R*p. Precisamente, se p*R*q significa che p *mod* n = q *mod* n e per la proprietà simmetrica dell'uguaglianza possiamo scrivere q *mod* n = p *mod* n, uguaglianza che assicura la validità della relazione tra q e p.
- La relazione è transitiva: se p*R*q e q*R*s allora p*R*s , per qualunque terna di naturali. Infatti se p*R*q significa p *mod* n = q *mod* n e se q*R*s significa che q *mod* n = s *mod* n; per la proprietà transitiva dell'uguaglianza si ha p *mod* n = s *mod* n, uguaglianza che assicura la validità della relazione tra p e s.

Conclusione 6

La relazione *R*: "avere lo stesso resto nella divisione intera per n", introdotta nell'insieme dei numeri naturali, è una relazione d'equivalenza e permette quindi una partizione dell'insieme N in n classi d'equivalenza aventi come rappresentanti tutti e soli i possibili resti della divisione intera per n. L'insieme quoziente è formato da n elementi, viene rappresentato come in figura e viene chiamato **insieme delle classi di resti modulo *n*.**



L'insieme quoziente *N/R* si indica anche col simbolo N_n dove l'indice *n* indica il numero rispetto al quale si è eseguita l'operazione *mod*.

292 Determina gli elementi di N_7.

Traccia di soluzione:

Nell'insieme N si considera la relazione d'equivalenza *R*:"avere lo stesso resto nella divisone per 7"

Le classi d'equivalenza sono: [0], [ ], … … … … …, [6].

Nella classe [0] stanno tutti i … … … … … … … che divisi per 7 danno … …, cioè … … …

In quale classe sta il numero 427? E il numero 74?

293 Nell'insieme $\mathbb{Z}_6$ delle classi di resto modulo 6 si può definire la somma e il prodotto ricalcandola dall'addizione e moltiplicazione dei numeri naturali. Si ha pertanto:

[1] + [2] = [3]

[4] + [5] = [3] infatti 4+5=9 ma [9]=[3]

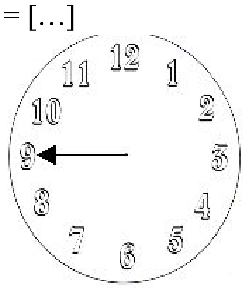
Determina: [5] + [3] = […] [3] + [3] = […] [1]+[0] = […]

Analogamente si può definire la moltiplicazione:

[5]·[3] = [3] infatti 5·3 = 15 ma 15:6= 2 con il resto di 3, quindi …

Determina: [5] · [2] = […] [3]·[1] = […] [3]·[0] = […]

294 Elenca e descrivi gli elementi dell'insieme Z_{12}.



Trovi qualche analogia con il disegno dell'orologio riprodotto accanto?

Come rispondi alla domanda :"5 ore dopo le 9 di mattina dove si trova la lancetta delle ore?" È sbagliato dire "4 ore dopo le 9 di mattina sono le 2"?

295 Nel supermercato al banco della frutta la bilancia presenta una tastiera come quella in figura, premendo il bottone relativo alla frutta da pesare si ottiene l'adesivo con il prezzo.

Sistema, senza contare casella per casella, il numero che corrisponde ai miei acquisti di oggi:

zucchine al numero75; arance al numero 63; spinaci al numero 48; patate al numero 56.

Hai potuto sfruttare le classi di resti modulo 8?

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...

►17. Insiemi finiti e insiemi infiniti

Cardinalità di un insieme

Il concetto di “corrispondenza biunivoca” permette di affrontare il problema del confronto tra insiemi. Stabiliamo subito una

DEFINIZIONE. Due insiemi A e B si dicono **equipotenti** se è possibile stabilire tra essi una corrispondenza biunivoca.

Esempio

Sia S l’insieme dei giorni della settimana e H l’insieme delle note musicali:
Sistemando gli elementi dei due insiemi come visualizzato nella seguente tabella

S	lunedì	martedì	mercoledì	giovedì	venerdì	sabato	domenica
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
H	do	re	mi	fa	sol	la	si

ci rendiamo conto che tra di essi si può stabilire una corrispondenza biunivoca, ottenuta semplicemente associando ad ogni giorno della settimana una e una sola nota musicale.
Possiamo procedere anche scrivendo i giorni della settimana ciascuno su un foglietto da inserire in un’urna A_1 e facendo altrettanto con gli elementi dell’insieme H inseriti in un’urna A_2 ; pescando alternativamente un foglietto da A_1 e uno da A_2 , ci accorgiamo che, esauriti i foglietti in A_1 sono contemporaneamente esauriti quelli in A_2 .
Concludiamo: **l’insieme S è equipotente all’insieme H**.

296 Mostra che l’insieme M dei mesi dell’anno è equipotente all’insieme O dei segni zodiacali.

Consideriamo ora l’insieme $\mathbb{N}_7=\{x\in\mathbb{N}/0<x\leqslant 7\}$ la cui rappresentazione per elencazione è $N_7 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6,7\}$; come abbiamo fatto nell’esempio precedente, possiamo visualizzare la corrispondenza biunivoca che si stabilisce tra S, H e N_7 per mezzo della seguente tabella

S	lunedì	martedì	mercoledì	giovedì	venerdì	sabato	domenica
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
H	do	re	mi	fa	sol	la	si
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
N_7	1	2	3	4	5	6	7

Si verifica facilmente che il predicato “essere equipotente” è una relazione d’equivalenza: la classe d’equivalenza di insiemi equipotenti è il numero naturale cardinale che ne indica la numerosità.

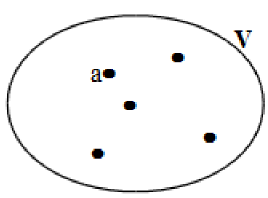
DEFINIZIONE. Si chiama **cardinalità** di un insieme A e si indica con *card*A o **#A** la classe d’equivalenza degli insiemi equipotenti ad A; essa indica il numero degli elementi di A. L’insieme vuoto ha cardinalità 0.

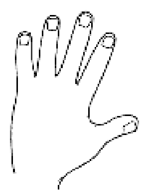
Gli insiemi H, S, N_7 appartengono alla stessa classe d’equivalenza, la caratteristica comune è il numero di elementi: #H = #S = # N_7 = 7.

DEFINIZIONE. Un **insieme** A si dice **finito** se esiste un n, naturale maggiore o uguale ad 1, tale che sussista una corrispondenza biunivoca tra A e N_n. In tal caso scriviamo *card*A = n.

Gli insiemi H e S di cui sopra sono insiemi finiti; gli insiemi M e O dell’esercizio 1 hanno cardinalità 12 e sono insiemi finiti.

297 Stabilisci la cardinalità dell’insieme V delle vocali della lingua italiana e dell’insieme D delle dita di una mano.





Completa l’insieme V. Stabilisci una corrispondenza ………..…. tra ….. e …… … Determina N_n ………..
Concludo: #V = ……… = ………

Prendiamo nuovamente in considerazione l’insieme $N_7 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6,7\}$ e un suo qualunque sottoinsieme

proprio, ad esempio $N_3 = \{1,2,3\}$; risulta evidente che non è possibile stabilire alcuna corrispondenza biunivoca tra N_7 e N_3 .
Questo fatto può essere preso come caratteristica di un insieme finito.
In generale possiamo affermare che l'insieme $\mathbb{N}_n=\{x\in\mathbb{N}/0<x\leqslant n\}$ con $n\geqslant 1$ non ha sottoinsiemi propri che possano essere messi in corrispondenza biunivoca con esso: si dice che N_n è un insieme finito e un qualunque insieme A in corrispondenza biunivoca con N_n è finito e ha cardinalità n.
Esistono insiemi che possono essere messi in corrispondenza biunivoca con un loro sottoinsieme proprio?

Esempio

Consideriamo l'insieme N dei naturali e il suo sottoinsieme proprio dei numeri pari, che indichiamo con P. Costruiamo una tabella: qui non possiamo inserire tutti i numeri naturali, quindi metteremo puntini di sospensione per indicare che l'elenco prosegue:

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	....
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
P	0	2	4	6	8	10	12	14	16	....

Abbiamo pertanto costruito una **corrispondenza tra** l'insieme **N** (Dominio) **e** l'insieme **P** (Codominio) **di tipo 1→1**: ad ogni numero naturale abbiamo associato il suo doppio (quindi un numero pari) che evidentemente è unico e viceversa ogni pari è l'immagine di un unico naturale. Inoltre il **D**ominio e l'**I**nsieme di **D**efinizione **coincidono** (ogni numero ha il doppio) e anche **C**odominio e insieme **IM**magine **coincidono** (ogni pari è immagine di un solo naturale). La corrispondenza è biunivoca, **N e P sono equipotenti** e la tabella va così modificata:

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	....
	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	
P	0	2	4	6	8	10	12	14	16	....

Questo fatto paradossale non può verificarsi solo per gli insiemi finiti.
Riportiamo la seguente definizione che risale al matematico Richard Dedekind.

DEFINIZIONE. Un **insieme** è **infinito** se e solo se può essere messo in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio.

298 Considera la corrispondenza ***K*** che ad ogni numero naturale associa un numero intero relativo secondo la seguente regola

- se $n\in N$ è pari allora il suo corrispondente è $+\left(\frac{n}{2}\right)$
- se $n\in N$ è dispari allora il suo corrispondente è $\frac{-(n+1)}{2}$

Completa:

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	....
K	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	

Qual è il numero naturale cui corrisponde il numero intero negativo –5 ? ……………
Qual è l'immagine (il corrispondente) di 15 ? ……………………
Qual è l'insieme IMmagine dell'insieme **N** ? ………………………
La legge definita genera una corrispondenza biunivoca tra **N** e **Z** ? …………………
Quale conclusione puoi trarre ? ………………………………

299 Nel "Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo", Galileo Galilei pone attraverso la domanda di Salviati e la risposta di Simplicio il problema dell'infinità dei naturali:

> **Salviati** - [...] Se io dirò, i numeri tutti, comprendendo i quadrati e i non quadrati, esser più che i quadrati soli, dirò proposizione verissima: non è così?

Simplicio - Non si può dire altrimenti.
Considera la corrispondenza ***K*** che ad ogni naturale associa il suo quadrato;
Completa:

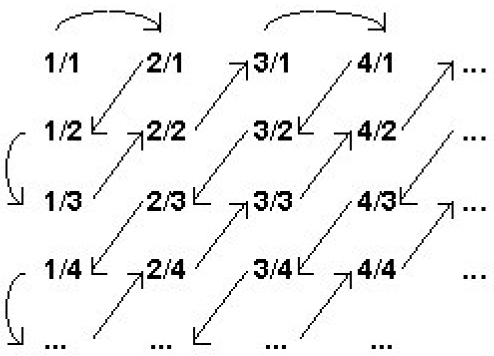
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	….
K	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
N^2										

(abbiamo indicato con N^2 l'insieme dei quadrati)

Qual è l'immagine di 5? ………..
Di quale naturale è immagine 121? …………………
K è una corrispondenza biunivoca tra **N** e $\mathbf{N^2}$? …………..
È vero che $\mathbf{N^2}$ è un sottoinsieme proprio di **N**? ……….
Quale conclusione puoi trarre ? ……………………..

DEFINIZIONE. Un **insieme** X si dice **numerabile** quando è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra esso e l'insieme N dei naturali.

Dagli esempi precedenti e dagli esercizi svolti, possiamo concludere che l'insieme N, l'insieme P dei pari, l'insieme N^2 dei quadrati, l'insieme Z degli interi, sono **insiemi numerabili**, hanno dunque tutti la stessa cardinalità.
Ma quale valore possiamo attribuire alla cardinalità degli insiemi sopra elencati se essi sono infiniti?
La **cardinalità** dell'insieme dei numeri naturali viene indicata da Cantor con il simbolo $\aleph_0$ (si tratta della prima lettera dell'alfabeto ebraico con l'indice 0 e si legge **aleph con 0**).
Nel 1874, attraverso un procedimento detto "diagonalizzazione", Cantor dimostra che anche **l'insieme Q dei numeri razionali è numerabile**. Vediamo come possiamo ripercorrere la dimostrazione di questo fatto.
Ricordiamo che ogni numero razionale può essere scritto sotto forma di frazione e che frazioni equivalenti sono lo stesso numero razionale. Costruiamo la seguente tabella delle frazioni, infinite righe e infinite colonne: nella prima colonna tutte la frazioni con numeratore 1, nella seconda quelle con numeratore 2 e così via. Attribuiamo ai suoi elementi l'ordinamento indicato dalle frecce; esso ci permette di costruire una corrispondenza biunivoca tra le frazioni positive e N; anzi considerando solamente quelle ridotte ai minimi termini, che rappresentano il numero razionale assoluto, si ottiene una corrispondenza biunivoca tra Q_A e N nel modo seguente:

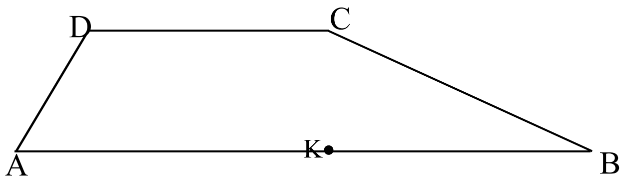


Q_A	1/1	2/1	1/2	1/3	3/1	4/1	3/2	2/3	1/4	….
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	….

Cantor nel 1874 enunciò il seguente teorema.

TEOREMA. Non c'è corrispondenza biunivoca tra l'insieme R dei numeri reali e l'insieme N.

determinando un altro tipo di infinito la cui cardinalità denotò con il simbolo $\aleph_1$
Noi tralasciamo la dimostrazione del teorema sopra enunciato per la sua complessità e la incontrerete nel corso degli studi superiori; qui abbiamo voluto mostrarvi che vi sono diversi gradi di infinito e che di fronte ad insiemi "infiniti" non possiamo affermare che "la parte è minore del tutto".
A questo proposito vi proponiamo il seguente esercizio.



300 Prolungate i lati obliqui del trapezio ABCD fino ad incontrarsi nel punto O.
Le semirette di origine O e comprese tra OA e OB, proiettano il segmento DC nel segmento AB, facendo corrispondere ad un punto di DC un punto di AB.
Direste Vera o Falsa l'affermazione: "I punti del segmento DC sono tanti quanti quelli del segmento AB" ? ……………
Seguite questi passaggi rispondendo ai quesiti

1. Quale punto corrisponde a D, e quale a C? ………………….
2. Ogni punto di CD trova un corrispondente punto in AB? …………………
3. Di quale punto è immagine il punto K di AB? ……………….
4. Ogni punto di AB è immagine di un solo punto di CD? ………………….
5. La proiezione costruita stabilisce una corrispondenza biunivoca tra CD e AB ? …………
6. A quale conclusione vi ha condotto questo esercizio? …………………..

301 Dati gli insiemi
$A=\{x : x=2n^2-1 \text{ con } n\in N \text{ e } 0\le n<2\};\quad B=\{y\in Z:\ -1\le y\le 1\}$ è vero che si possono mettere in corrispondenza biunivoca?

302 Dato l'insieme $K=\{a,b,c,d\}$, costruite l'insieme $K\times K$.
Considerate il suo sottoinsieme $H=\{(x,y): x \text{ precede } y \text{ nell' ordine alfabetico}\}$
È vero che tale insieme è equipotente all'insieme formato dalle facce di un cubo?

303 Attraverso la costruzione di un grafo sagittale, attribuite il valore di verità alla proposizione: "Il sottoinsieme T di **NxN** formato dalle coppie i cui elementi danno come somma 3 è equipotente all'insieme F dei divisori di 14."



304 Attribuite il valore di verità alle seguenti proposizioni:

a) un insieme infinito è numerabile — V F
b) un insieme infinito può essere posto in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio — V F
c) la cardinalità dell'insieme Q è maggiore di quella dell'insieme Z — V F
d) due insiemi equipotenti sono infiniti — V F

305 Considerate l'insieme $P^*=\{2^n \text{ con } n\in\mathbb{N}\}$ delle potenze di 2,

1. Completate la tabella sottostante:

n	0	1											
potenza													

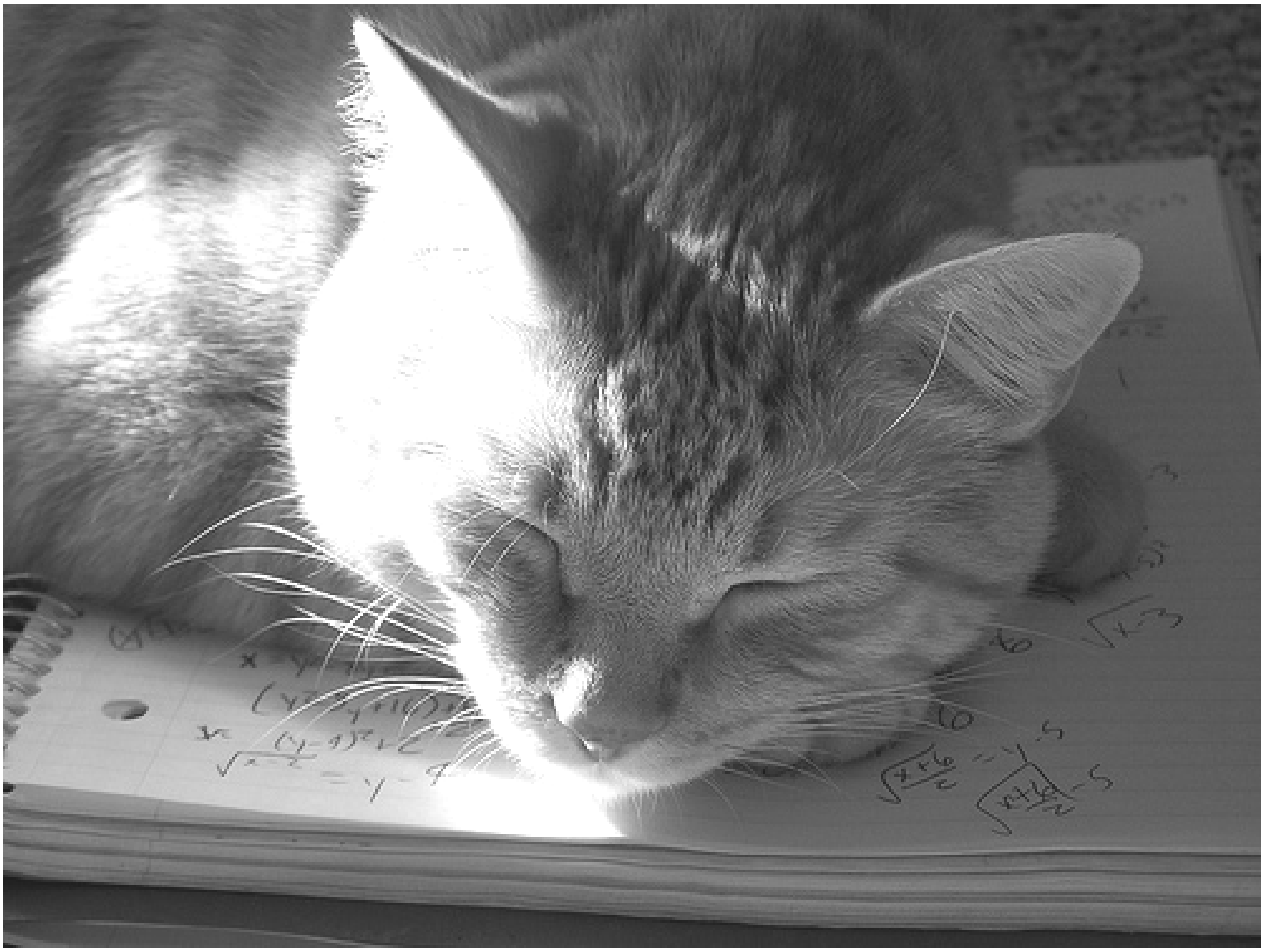
2. Quali proposizioni tra quelle assegnate sono vere?
   p1: P* è un sottoinsieme di N
   p2: 0 appartiene a P*
   p3: P* è numerabile
   p4: Nessun elemento di P* è maggiore di 2065438

[A] solo la p1 [B] la p1 e la p3 [C] la p1, la p2 e la p3 [D] tutte e quattro

3. Quali considerazioni potete fare sull'infinità di P*?

MATEMATICA C3 - ALGEBRA 1

3. CALCOLO LETTERALE



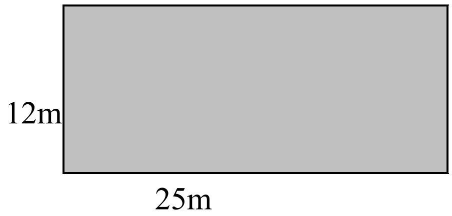
Ernest! Photo by: Ssmallfry
taken from: http://www.flickr.com/photos/ssmallfry/2262374892/
license: creative commons attribution 2.0

Indice

►1. Espressioni letterali e valori numerici

Lettere per esprimere formule

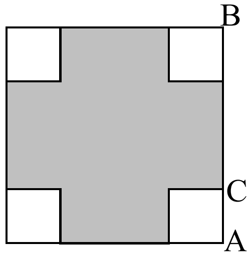
In tutte le villette a schiera di recente costruzione del nuovo quartiere Stella, vi è un terreno rettangolare di larghezza 12m e lunghezza 25m. Quanto misura la superficie del terreno?



Il prodotto delle dimensioni rappresenta la misura richiesta: $S=(25\cdot 12)m^2=300$ Il semplice problema che abbiamo risolto è relativo ad un caso particolare; quel terreno con quelle dimensioni. Ma se le dimensioni fossero diverse?
La procedura per determinare la misura della superficie ovviamente è sempre la stessa e la possiamo esprimere con una formula $A=b\cdot h$ nella quale abbiamo indicato con *b* la misura di una dimensione e con *h* la misura dell'altra dimensione, assegnate rispetto alla stessa unità di misura.

La formula ha carattere generale; essa serve ogni qualvolta si chiede di determinare la superficie di un rettangolo, note le misure delle dimensioni (base e altezza) rispetto alla stessa unità di misura.

In geometria si utilizzano tantissime formule che ci permettono di determinare perimetro e area delle figure piane, superficie laterale e totale e volume dei solidi. Nelle formule le lettere sostituiscono le misure di determinate grandezze, tipiche di quella figura o di quel solido.



1 Esprimi con una formula l'area della superficie della zona colorata, indicando con l la misura del lato AB e con b la misura di AC.
Svolgimento: l'area del quadrato è…., l'area di ciascuno dei quadratini bianchi è…. Pertanto l'area della superficie in grigio è….

Lettere per descrivere schemi di calcolo

L'insegnante chiede agli alunni di scrivere "il doppio della somma di due numeri".

- Antonella scrive: $2\cdot(3+78)$
- Maria chiede "quali sono i numeri? Se non li conosco non posso soddisfare la richiesta"
- Giulia scrive: $2\cdot(a+b)$

Maria si è posta il problema ma non ha saputo generalizzare la richiesta. Antonella si è limitata ad un caso particolare. Giulia ha espresso con una formula l'operazione richiesta dall'insegnante.

L'uso di lettere dell'alfabeto per indicare numeri ci permette di generalizzare uno schema di calcolo.

2 Scrivi l'espressione algebrica letterale relativa alla frase "eleva al quadrato la differenza tra il cubo di un numero e il doppio del suo quadrato"
Svolgimento: detto a il numero generico, il cubo di *a* si indica con…, il doppio quadrato di *a* si indica con … e infine il quadrato della differenza sarà: …………

3 Traduci in parole della lingua italiana il seguente schema di calcolo: $(a-b)^3$
Svolgimento: "Eleva al … … la differenza tra … … ..."

> DEFINIZIONE. Un'**espressione letterale** o **espressione algebrica** è uno schema di calcolo in cui compaiono numeri e lettere legati dai simboli delle operazioni.

Per scrivere un'espressione letterale ci si deve attenere a regole precise, quelle stesse che utilizziamo per scrivere espressioni numeriche.
Per esempio, la scrittura $3\cdot 4+$ non è corretta, in quanto il simbolo + dell'addizione deve essere seguito da un altro numero per completare l'operazione. Analogamente non è corretta l'espressione letterale $a\cdot c+$
Come nelle espressioni numeriche le parentesi indicano la priorità di certe operazioni rispetto ad altre.
La formula $a\cdot(x+y)$ specifica "il prodotto di un numero per la somma di due altri" . Essa è diversa da $a\cdot x+y$ che rappresenta "la somma del prodotto di due numeri con un terzo numero".

4 Individua tra quelle sottostanti le espressioni letterali scritte correttamente:

a) $b\cdot\frac{4}{5}+\left(3-\frac{7}{2}\right)\cdot a-a$ b) $\frac{a\cdot 1}{2}-\frac{a}{2}$ c) $(x\cdot(a-b)^2+(x-3)$

d) $x^y-a:2$ e) $-a+4b+c$ f) $a\cdot+2-b^4$

Lettere per esprimere proprietà

Per esprimere le proprietà delle operazioni tra numeri si usano le lettere per indicare che valgono per numeri qualsiasi.
La scrittura $(a+b)+c=a+(b+c)$ esprime la proprietà associativa dell'addizione. In essa le lettere a, b, c indicano numeri qualsiasi. I due schemi di calcolo ci dicono che per sommare tre numeri, è indifferente aggiungere alla somma dei primi due il terzo oppure aggiungere al primo la somma degli altri due.

5 Collega con una freccia la proprietà dell'operazione con la sua scrittura attraverso lettere:

PROPRIETÀ	ESPRESSIONE
Commutativa dell'addizione	$a\cdot(x+y)=a\cdot x+a\cdot y$
Associativa della moltiplicazione	$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$
Distributiva del prodotto rispetto alla somma	$a+b=b+a$

6 Esprimere con le lettere la proprietà commutativa della moltiplicazione

Svolgimento: considerati a e b due numeri qualsiasi, la proprietà commutativa si esprime per mezzo dell'espressione………; cioè ……………………….

7 Scrivi la formula che ci permette di calcolare l'area di un trapezio avente base maggiore $B=5$ cm, base minore $b=2$ cm e altezza $h=4$ cm.

8 Scrivi la formula che ci consente di calcolare il perimetro di un quadrato di misura *l*.

9 Determina l'altezza h relativa all'ipotenusa BC del triangolo rettangolo ABC.

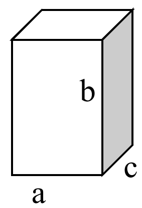
CASO NUMERICO: $\overline{AB}=8m.$ $\overline{AC}=15m.$

CASO GENERALE: Indica con x e y le misure dei cateti, e determina la formula per calcolare la misura di h_i .

10 Il volume della scatola avente le dimensioni di 7cm. 10cm. 2cm. è ……….

Generalizza la questione indicando con a, b, c la misura delle sue dimensioni ……………
Se raddoppiamo ciascuna dimensione allora il volume diventa

$\alpha)\ 2\cdot a\cdot b\cdot c \quad \beta)\ a^2\cdot b^2\cdot c^2 \quad \gamma)\ 6\cdot a\cdot b\cdot c \quad \delta)\ 8\cdot a\cdot b\cdot c$



Scrivi sotto forma di espressioni letterali le seguenti frasi

11 Moltiplica *a* per l'inverso di *a*. R. $\left[a\cdot\frac{1}{a}\right]$

12 Moltiplica *a* per l'opposto del cubo di *a*.

13 Sottrai ad *a* l'inverso di *b*. R. $\left[a-\frac{1}{b}\right]$

14 Somma al triplo di *a* il doppio quadrato di *b*.

15 Sottrai il doppio di *a* al cubo di *a*. R. $[a^3-2a]$

16 Moltiplica l'inverso di *b* per il quadrato dell'inverso di *a*.

17 Somma al cubo di *a* il quadrato della somma di *a* e *b*.

18 Dividi il quadrato di *a* per il triplo cubo di *b*.

19 Moltiplica il quadrato di *b* per l'inverso del cubo di *a*.

20 Il cubo di un numero, aumentato di 2, è uguale al quadrato della differenza tra lo stesso numero e uno.

21 Il reciproco della somma dei quadrati di a e di b.

22 Il cubo della differenza tra 1 e il cubo di a

23 La somma dei quadrati di a e di b per il quadrato della differenza tra a e b.

Il valore numerico di un'espressione letterale

Ogni espressione letterale rappresenta uno schema di calcolo in cui le lettere che vi compaiono sostituiscono numeri. L'espressione letterale $2\cdot x^2+x$ traduce una catena di istruzioni che in linguaggio naturale sono così descritte: "prendi un numero; fanne il quadrato; raddoppia quanto ottenuto; aggiungi al risultato il numero preso inizialmente".

Questa catena di istruzioni si può anche rappresentare in modo schematico $x\rightarrow x^2\rightarrow 2\cdot x^2\rightarrow 2\cdot x^2+x$ e può essere usata per istruire un esecutore a "calcolare" l'espressione letterale quando al posto della lettera x si sostituisce un numero.

Calcoliamo il valore dell'espressione $2\cdot x^2+x$, sostituendo alla lettera il numero naturale 5.

Seguiamo la schematizzazione $x\rightarrow x^2\rightarrow 2\cdot x^2\rightarrow 2\cdot x^2+x$ e otteniamo: $5\rightarrow 25\rightarrow 50\rightarrow 55$.

Il risultato è 55.

Più brevemente scriviamo 5 nell'espressione letterale al posto di x: otteniamo l'espressione numerica $2\cdot 5^2+5$ il cui risultato è 55.

E se al posto di x sostituiamo -5? Cambia il risultato?

Eseguiamo la sostituzione: $2\cdot(-5)^2+(-5)=$ = …….. Lasciamo a te il calcolo finale. Ti sarai accorto che il risultato è cambiato.

DEFINIZIONI. In un'espressione letterale **le lettere** rappresentano **le variabili** che assumono un preciso significato quando vengono sostituite da numeri.
Chiamiamo **valore di un'espressione letterale** il risultato numerico che si ottiene eseguendo le operazioni indicate dallo schema di calcolo quando alle lettere sostituiamo un numero. Il valore dell'espressione letterale **dipende dal valore assegnato alle sue variabili**.

Esempi

- Calcolare il valore numerico della seguente espressione: $3a(a-b)$ per a =1, b =1

Svolgimento $3\cdot 1\cdot(1-1)=3\cdot 1\cdot 0=0$.

24 Consideriamo l'espressione letterale $E=-3\cdot a+2\cdot(-a+1)$.

Osserviamo che vi compare una sola variabile, la lettera *a*; supponiamo che E rappresenti uno schema di calcolo tra numeri interi relativi. Determiniamo il valore dell'espressione per alcuni valori della variabile:

$a=-2\ \rightarrow\ E=-3\cdot(-2)+2\cdot(-(-2)+1)=+6+2\cdot(2+1)=6+6=12$

$a=1\ \rightarrow\ E=-3\cdot(1)+2\cdot(-(1)+1)=-3+2\cdot(-1+1)=-3+0=-3$

$a=-1\ \rightarrow\ E=-3\cdot(\ldots)+2\cdot(\ldots+1)=$……………

L'espressione letterale rappresenta ora uno schema di calcolo tra numeri razionali relativi: ad ogni valore razionale attribuito alla variabile, corrisponde un valore dell'espressione assegnata.

Completa la tabella:

a	-2	1	-1	0,1	$\frac{4}{5}$	$-\frac{7}{5}$	-11	0
$E=-3a+2(-a+1)$	12	-3						

25 Calcola il valore dell'espressione letterale $E=\frac{3}{7}\cdot a\cdot b-\frac{1}{2}\cdot(a-b)+a-b$ le cui variabili a, b rappresentano numeri razionali, per i valori assegnati nella tabella sottostante.

Svolgimento: se vogliamo calcolare il valore dell'espressione letterale dobbiamo scegliere due numeri razionali, uno da assegnare alla variabile a, l'altro alla variabile b.

a	3	0	2	$-\frac{3}{2}$
b	-3	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$
$E=\frac{3}{7}\cdot a\cdot b-\frac{1}{2}\cdot(a-b)+a-b$				

Risposte: $(3,-3)\rightarrow -\frac{6}{7}$; $\left(0,-\frac{1}{2}\right)\rightarrow\frac{1}{4}$; $\left(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)\rightarrow\frac{27}{28}$

26 Calcolare il valore numerico dell' espressione: $\frac{a}{a-3}+\frac{b}{3-b}$ per $a = -1$, $b = 0$

Svolgimento: = $\frac{-1}{-1-3}+\frac{0}{3-0}$ ....

27 Calcola il valore dell'espressione $E=\frac{x-y}{3\cdot x}$ costruita con le variabili x e y che rappresentano numeri razionali. L'espressione letterale assegnata traduce il seguente schema di calcolo:" la divisione tra la differenza di due numeri e il triplo del primo numero". Completa la seguente tabella:

x	$\frac{3}{4}$	$\frac{19}{3}$	$\frac{3}{4}$	-4		
y	$-\frac{1}{2}$	0	0	-2		
$E=\frac{x-y}{3\cdot x}$						

Ti sarai accorto che in alcune caselle compare lo stesso valore per E: perché secondo te succede questo fatto? Vi sono, secondo te, altre coppie che fanno assumere ad E quello stesso valore?

Scrivi con una frase le seguenti espressioni

28 $3a$ R. [*Il triplo di a*]

29 $\frac{2a}{3b^2}$ R. [*Dividi il doppio di a per il triplo del quadrato di b*]

30 $2b-5a$

31 $a\cdot\frac{1}{a}$

32 $(a+b)^2$

33 $\frac{3x+y}{2x^2}$

34 *Completa la tabella sostituendo nella espressione della prima colonna i valori indicati*

Espressione	x=1	x=-1	x=0	x=2	x=1/2	x=-1/2	x=0,1	$x=\frac{1}{10}$
$2x+1$								
$-(3x-2)$								
x^2+2x+2								
x^2-x								
$-x^2+x-1$								
x^3-1								
x^3+3x^2								
$-x^3+x^2-x$								
$-(x+1)^2$								
$\frac{x+1}{1-x}$								

Calcola il valore numerico delle seguenti espressioni algebriche:

35 $3x^2-\frac{1}{4}x^2$ per $x=\frac{1}{2}$ *Svolgimento:* $3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)=\ldots\ldots\ldots=\frac{11}{16}$

36 $5a^2b$ per $a=-\frac{1}{2},\ b=\frac{3}{5}$ *Svolgimento:* $5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)=\ldots\ldots\ldots$

37 $4a+a^3$ per a=2 R. $[16]$ per a=1 R. [5]

38 $2a+5a^2$ per a=-1 R. [3] per a=0 R. [0]

39 $\frac{3}{2}\cdot a^2+\frac{1}{2}a-1$ per a=0 per a= -1 per a=+2

40 $2\cdot x^5-8\cdot x^4+3\cdot x^3+2\cdot x^2-7\cdot x+8$ per x=+1 per x=-1

41 $(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x+3)$ per x=0 per x= -1 per x= 2

42 x^2+2x+1 per x=0 per x =-1 per x = 1

43 $-a^2\cdot b\cdot c^3$ per a=1; b=-1; c=-2 per $a=-1;b=\frac{9}{16};c=\frac{4}{3}$

44 $-\frac{3}{2}a+2b^2+11$ per $\left(a=-20;\ b=-\frac{1}{2}\right)$ per $\left(a=\frac{2}{3};\ b=0\right)$

45 $-a^2+\frac{1}{a}-3\cdot a^3$ per $a=\frac{1}{3}$ per a= -1 per a=+1

46 $3x+2y^2(xy)$ per $x=1,\ y=-\frac{1}{2}$ R. $\left[\frac{11}{4}\right]$ per $x=\frac{1}{3},\ y=-1$

47 $a^2-b^{-1}+ab$ per $a=1,\ b=\frac{1}{2}$ R. $\left[-\frac{1}{2}\right]$ per a=0, b=-1

48 $3a^2b-7ab+a$ per $a=1,\ b=3$ R. $[-11]$ per a=-1, b=-3

49 $3xy-2x^2+3y^2$ per $x=\frac{1}{2},\ y=2$ R. $\left[\frac{29}{2}\right]$ per $x=2,\ y=\frac{1}{2}$

50 $6xy^2+\frac{1}{6}xy^2-\frac{1}{4}xy^2-6xy^2$ per x=-1; y=-1 per $x=2,\ y=\frac{1}{2}$

51 $-\frac{7}{5}xy^3\left(-\frac{10}{3}xy^2z\right)$ per x=-1; y= -1 per $x=5;y=3$

52 $\frac{2}{3}\cdot a\left(a^2-b^2\right)$ per $a=-3,\ b=-1$ R. $[-16]$ per $a=\frac{1}{3},b=0$

53 $\frac{xy}{x}+3xy^3$ per $x=2,\ y=-1$ R. $[-7]$ per x=-2, y=+1

54 $\frac{1}{2}\frac{(a+b)^2}{a^2b^2}+2a+3b$ per $a=\frac{1}{4},\ b=-2$ R. $\left[\frac{5}{8}\right]$ per $a=\frac{1}{2},\ b=-\frac{1}{2}$

55 $3x^3+2xy\left(\frac{x^2}{y}\right)+2y^2$ per $x=-2,\ y=\frac{3}{4}$ R. $\left[-\frac{311}{8}\right]$ per x=-1, y=-1

56 $\frac{4a-7b}{(2a+3b)^3}\cdot ab^3$ per $a=-\frac{1}{2},\ b=1$ R. $\left[\frac{9}{16}\right]$ per $a=-\frac{1}{4},\ b=\frac{2}{3}$

57 $\frac{4x^2-5xy+3y}{6x+y^2}$ per $x=-1,\ y=2$ R.[-10] per x=0. y=-2

58 $\frac{x}{x+3}+y^2-\frac{xy-3x+y}{(xy)^2}$ per $x=3,\ y=\frac{1}{3}$ R. $\left[\frac{149}{18}\right]$ per x=1, y=-1

59 $\frac{(4a-2b)\cdot 2a^2}{3b^3}\cdot\frac{3}{4}ab+a^3$ per $a=1,\ b=-1$ R. [4] per a=0, b=-3

►2. Condizione di esistenza di un'espressione letterale

Ti proponiamo adesso alcuni casi particolari per l'espressione $E=\frac{x-y}{3\cdot x}$

1° caso:

x	y	E
1	1	0

Il numeratore della frazione è 0, mentre il denominatore vale 3; il calcolo finale è dunque $\frac{0}{3}=0$

60 Vi sono secondo te altre coppie che fanno assumere ad E quello stesso valore?

2° caso:

x	y	E
0	25	?

Invece di mettere un valore ad E, abbiamo messo punto di domanda perché in questo caso il numeratore della frazione è -25 mentre il denominatore vale 0; il calcolo finale è dunque $-\frac{25}{0}$ Impossibile.

61 Vi sono secondo te altre coppie che rendono impossibile il calcolo del valore per E?

Non possiamo allora concludere che per ogni coppia di numeri razionali $(x\,,y)$ l'espressione E assume un numero razionale. Per poter calcolare il valore di E non dobbiamo scegliere coppie aventi *x* uguale a zero. Scriveremo quindi come premessa alla ricerca dei valori di E la **Condizione di Esistenza** $x\neq 0$.
L'esempio appena svolto ci fa capire che di fronte a un'espressione letterale dobbiamo riflettere sullo schema di calcolo che essa rappresenta prima di assegnare valori alle variabili che vi compaiono.
Se l'espressione letterale presenta una divisione in cui il divisore contiene variabili, dobbiamo stabilire la **C**ondizione di **E**sistenza, eliminando quei valori che rendono nullo il divisore.
Per comprendere la necessità di porre le condizioni d'esistenza ricordiamo la definizione di divisione.
Quanto fa 15 diviso 5? Perché?
In forma matematica: $15:5=3$ perché $3\cdot 5=15$. Quindi, generalizzando; $a:b=c$ se $c\cdot b=a$.
Vediamo ora cosa succede quando uno dei numeri è 0.
Quanto fa 0:5? Devo cercare un numero che moltiplicato per 5 mi dia 0: trovo solo 0; infatti $0\cdot 5=0$.
Quanto fa 15:0? Devo cercare un numero che moltiplicato per 0 mi dia 15: non lo trovo; infatti nessun numero moltiplicato per 0 fa 15. Quindi, $15:0$ è impossibile perché non esiste x per il quale $x\cdot 0=15$
Quanto fa 0:0? Devo cercare un numero che moltiplicato per 0 mi dia 0: non né trovo solo uno. Infatti, qualunque numero moltiplicato per 0 fa 0. Per esempio, $0:0=33$ infatti $33\cdot 0=0$, anche $0:0=-189{,}67$ infatti $-189{,}67\cdot 0=0$, $0:0=0$ infatti $0\cdot 0=0$, ancora $0:0=10^{99}$ infatti $10^{99}\cdot 0=0$. Quindi $0:0$ è indeterminato, perché non è possibile determinare un x tale che $x\cdot 0=0$, per qualunque valore di x si ha $x\cdot 0=0$.
Consideriamo l'espressione letterale $E=\frac{a-b}{a+b}$ dove a e b rappresentano numeri razionali. Premettiamo:
- la descrizione a parole dello schema di calcolo: "divisione tra la differenza di due numeri e la loro somma";
- la domanda che riguarda il denominatore: "quando sommando due numeri razionali otteniamo 0 al denominatore?";
- la **C**ondizione di **E**sistenza: " a e b non devono essere numeri opposti".

Siamo ora in grado di completare la tabella:

a	3	0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{5}{8}$	$-\frac{19}{2}$
b	-3	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{8}$	$-\frac{19}{2}$
$E=\frac{a-b}{a+b}$					

Dalla Condizione di Esistenza, ci accorgiamo subito che la prima coppia e la quarta sono formate da numeri opposti, pertanto non possiamo con esse calcolare il valore di E. L'ultima coppia è formata da numeri uguali pertanto la loro differenza è 0; il numeratore si annulla e quindi il valore di E è 0. Per la coppia $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$ il valore di E è -1 mentre è 1 per la coppia $\left(\frac{3}{4},0\right)$.

La tabella verrà quindi così completata:

a	3	0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{5}{8}$	$-\frac{19}{2}$
b	-3	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{8}$	$-\frac{19}{2}$
E	impossibile	-1	1	impossibile	0

Cosa succede per la coppia (0,0)?

62 Adesso prova tu con l'espressione $E=-\frac{x-2}{2x^2}$ completando la tabella:

x	2	0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{5}{8}$
E				

63 Calcola il valore numerico dell'espressione: $\frac{3x-1}{x}$ per $x = 0$

Svolgimento: Sostituendo alla x il valore assegnato si ha una divisione per........... e quindi………

Sostituendo alle lettere i numeri, affianco indicati, stabilisci se le seguenti espressioni hanno significato:

64 $\frac{x+3}{x}$ *per* $x=0$ SI NO

65 $\frac{x^2+y}{x}$ *per* $x=3,\ y=0$ SI NO

66 $\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}$ *per* $a=1,\ b=1$ [non ha significato perché $\frac{4}{0}$ non è un numero]

67 $\frac{5x^2+3y-xy}{(x^2+y)^3}$ *per* $x=2,\ y=-2$ SI NO

68 $\frac{a^3+b+6a^2}{a^2+b^2+3ab-3a^2}$ *per* $a=1,\ b=\frac{4}{3}$ SI NO

Lettere per verificare/ confutare uguaglianze o proprietà

69 Sostituendo alle lettere numeri razionali arbitrari, determina se le seguenti uguaglianze tra formule sono **V**ere o **F**alse

$a^2+b^2=(a+b)^2$ V F

$(a-b)\cdot(a^2+a\cdot b+b^2)=a^3-b^3$ V F

$(5a-3b)\cdot(a+b)=5a^2+ab-3b^2$ V F

70 Se n è un qualunque numero naturale, l'espressione $2\cdot n+1$ dà origine

[A] ad un numero primo [B] ad un numero dispari

[C] ad un quadrato perfetto [D] ad un numero divisibile per 3

71 Quale formula rappresenta un multiplo di 5, qualunque sia il numero naturale attribuito ad n?

[A] $5+n$ [B] n^5 [C] $5\cdot n$ [D] $\frac{n}{5}$

72 La tabella mostra i valori assunti da y al variare di x. Quale delle seguenti è la relazione tra x e y?

x	1	2	3	4
y	0	3	8	15

[A] y=x+1 [B] $y=x^2+1$ [C] y=2x-1 [D] $y=2x^2-1$

73 Verifica che sommando tre numeri dispari consecuti si ottiene un multiplo di 3. Utilizza terne di numeri dispari che compinciano per 3; 7; 11; 15; 21. Per esempio 3+5+7= ... multiplo di? Vero. Continua tu.

►3. Monomi

D'ora in poi quando scriveremo un'espressione letterale in cui compare l'operazione di moltiplicazione, tralasceremo il puntino fin qui usato per evidenziare l'operazione. Così l'espressione $5\cdot a^2+\frac{3}{8}\cdot a\cdot b-7\cdot b^2$ verrà scritta in modo più compatto $5a^2+\frac{3}{8}ab-7b^2$.

DEFINIZIONE. Una espressione letterale in cui numeri e lettere sono legati dalla sola moltiplicazione si chiama **monomio.**

Esempi

- L'espressione nelle due variabili a e b $E=5\cdot 2a^2\frac{3}{8}ab7b^2$ è un monomio perché vediamo che numeri e lettere sono legate solo dalla moltiplicazione.
- L'espressione $E=2a^2-ab^2$ non è un monomio poiché tra le lettere compare anche il segno di sottrazione.

74 Individua tra le espressioni letterali di seguito elencate, quelle che sono monomi:

$E_1=35x^2+y^2;\quad E_2=-4^{-1}ab^4c^6;\quad E_3=\frac{4}{x}y^2;\quad E_4=-\frac{87}{2}x^2z$

Per rispondere in modo corretto devo individuare quelle espressioni in cui compare solamente la ……………; pertanto sono monomi ……………….

Osservazioni
Gli elementi di un monomio sono **fattori**, perché sono termini di una moltiplicazione ma possono comparire anche **potenze**, infatti la potenza è una moltiplicazione di fattori uguali. Non possono invece comparire esponenti negativi o frazionari. In un monomio gli esponenti delle variabili devono essere numeri naturali.

DEFINIZIONE. Un **monomio** si dice **ridotto in forma normale** quando è scritto come prodotto di un solo fattore numerico e di potenze letterali con basi diverse.

Esempi

Il monomio $E=5\cdot 2a^2\frac{3}{8}ab7b^2$ non è scritto in forma normale: tra i suoi fattori vi sono numeri diversi e le potenze letterali hanno basi ripetute, la a e la b compaiono due volte ciascuna. Moltiplichiamo tra loro i fattori numerici e otteniamo $\frac{105}{4}$; eseguiamo il prodotto di potenze con la stessa base otteniamo a^3b^3 . Il monomio in forma normale è $E=\frac{105}{4}a^3b^3$

Procedura per ridurre in forma normale un monomio
- moltiplicare tra loro i fattori numerici
- moltiplicare le potenze con la stessa base

75 Scrivi in forma normale i seguenti monomi:

$\frac{4}{9}ab18c^3 2^{-2}a^3b=\frac{\cdots}{\cdots}a^{\cdots}b^{\cdots}c^{\cdots};\qquad -x^5\frac{1}{9}y^4(-1+5)^2y^7=\dots\dots\dots$

DEFINIZIONE. La parte numerica del monomio ridotto a forma normale si chiama **coefficiente.**

Esempi

- Nella tabella seguente sono segnati alcuni monomi e i rispettivi coefficienti:

monomio	$-\frac{1}{2}abc$	$3x^3y^5$	a^5b^7	$-k^2$
coefficiente	$-\frac{1}{2}$	3	1	-1

DEFINIZIONI.
Se il coefficiente del monomio è zero il **monomio** si dice **nullo.**
Il complesso delle lettere che compaiono nel monomio ridotto a forma normale ne costituisce la **parte letterale.**

Esempio: L'espressione letterale $\frac{3}{5}a^3bc^2$ è un monomio; il numero $\frac{3}{5}$ e le lettere a^3 b c^2 sono legate dall'operazione di moltiplicazione; il suo coefficiente è il numero $\frac{3}{5}$ e la parte letterale è a^3bc^2.

Controesempi

- L'espressione letterale $\frac{3}{5}a^3+bc^2$ non è un monomio dal momento che numeri e lettere sono legati oltre che dalla moltiplicazione anche dalla addizione.
- L'espressione letterale $\frac{3}{5}a^{-3}bc^2$ non è un monomio in quanto la potenza con esponente negativo rappresenta una divisione, infatti $a^{-3}=\frac{1}{a^3}$.

DEFINIZIONE. Due o più monomi che hanno parte letterale identica si dicono **simili.**

Esempio: Il monomio $\frac{3}{5}a^3bc^2$ è simile a $68a^3bc^2$ e anche a $-0{,}5\,a^3bc^2$, ma non è simile a $\frac{3}{5}a^2bc^3$.
L'ultimo monomio ha le stesse lettere degli altri ma sono elevate ad esponenti diversi.

Il monomio nullo si considera simile a qualunque altro monomio.

DEFINIZIONE. Due monomi simili che hanno coefficiente opposto si dicono **monomi opposti.**

Esempi

- I monomi $\frac{3}{5}a^3bc^2$ e $-\frac{3}{5}a^3bc^2$ sono opposti, infatti sono simili e hanno coefficienti opposti.
- Non sono opposti $\frac{3}{5}a^3bc^2$ e $-7a^3bc^2$, ma semplicemente simili. I loro coefficienti hanno segno diverso, ma non sono numeri opposti

76 Nell'insieme $M=\left\{-\frac{34}{5}a^3b\ ,\ 3^2a^2b^4\ ,\ \frac{1}{3}\mathrm{ab}^3\ ,\ a^3b\ ,\ -a\ ,\ 7\mathrm{a}^2b^4\ ,\ -\frac{1}{3}\mathrm{ab}^3\ ,\ -89\mathrm{a}^3b\right\}$, determina i sottoinsiemi dei monomi; rappresenta con un diagramma di Venn.

DEFINIZIONI
Il **grado complessivo** di un monomio è la somma degli esponenti della parte letterale.
Quando il monomio è ridotto a forma normale, l'esponente di una sua variabile ci indica il **grado** del monomio **rispetto a quella variabile.**

Esempio: Il monomio $\frac{3}{5}a^3bc^2$ ha grado complessivo 6, ottenuto sommando gli esponenti della sua parte letterale (3+1+2=6). Rispetto alla variabile *a* è di terzo grado, rispetto alla variabile *b* è di primo grado, rispetto alla variabile *c* è di secondo grado.

Abbiamo detto che gli esponenti della parte letterale del monomio sono numeri naturali, dunque possiamo anche avere una o più variabili elevate ad esponente 0. Cosa succede allora nel monomio?
Consideriamo il monomio $56a^3b^0c^2$, sappiamo che qualunque numero diverso da zero elevato a zero è uguale a 1, quindi possiamo sostituire la variabile b che ha esponente 0 con 1 e otteniamo $56a^3\cdot 1\cdot c^2=56a^3c^2$. Se in un monomio ogni variabile ha esponente 0, il monomio rimane solamente con il suo coefficiente numerico: per esempio $-3a^0x^0=-3\cdot 1\cdot 1=-3$.

Osservazione
Esistono **monomi di grado 0**; essi presentano solo il coefficiente e pertanto **sono** equiparabili ai **numeri razionali.**

Valore di un monomio

Poiché il monomio è un'espressione letterale, possiamo calcolarne il valore quando alle sue variabili sostituiamo numeri.

Esempio

■ Calcola il valore del monomio $3x^4y^5z$ per i valori $x=-3\ ;\ y=5\ ;\ z=0$.

Sostituendo i valori assegnati otteniamo $3\cdot(-3)^4\cdot 5^5\cdot 0=0$ essendo uno dei fattori nullo.

Il valore di un monomio è nullo quando almeno una delle sue variabili assume il valore 0.

Molte formule di geometria sono scritte sotto forma di monomi: area del triangolo $\frac{1}{2}bh$; area del quadrato l^2 ; perimetro del quadrato $4l$; area del rettangolo bh ; volume del cubo = l^3 ecc.
Esse acquistano significato quando al posto delle lettere sostituiamo numeri positivi che rappresentano le misure della figura considerata.

77 Calcola l'area di un triangolo che ha altezza $h=2,5$ e base $b=\frac{3}{4}$.

78 Un monomio è:

[A] un'espressione algebrica letterale nella quale figurano soltanto operazioni di moltiplicazione e potenza con esponente intero;
[B] un'espressione algebrica letterale nella quale figurano soltanto addizioni e moltiplicazioni tra termini numerici e termini letterali;
[C] un'espressione algebrica letterale nella quale figurano soltanto prodotti di fattori numerici e letterali;
[D] un'espressione algebrica letterale nella quale numeri e lettere sono legati dalle operazioni razionali.

79 Il grado complessivo di un monomio è:

[A] l'esponente della prima variabile che compare nel monomio;
[B] la somma di tutti gli esponenti che compaiono sia ai fattori numerici sia a quelli letterali;
[C] il prodotto degli esponenti delle variabili che compaiono nel monomio;
[D] la somma degli esponenti di tutte le variabili che vi compaiono.

80 Due monomi sono simili se:

[A] hanno lo stesso grado
[B] hanno le stesse variabili;
[C] hanno lo stesso coefficiente
[D] hanno le stesse variabili con rispettivamente gli stessi esponenti.

81 Individua e sottolinea i monomi tra le seguenti espressioni letterali:

$$3+ab;\ -2a;\ -\frac{7}{3}ab^2;\ -\left(\frac{4}{3}\right)^3;\ a^2bc\cdot\frac{-2}{a^3};\ 4a^{-3}b^2c^5;\ -x;\ 8x^4-4x^2;\ -y\cdot(2x^4+6z);\ \frac{abc^9}{3+7^{-2}}$$

82 Nel monomio $m=-\frac{5}{2}a^3x^2y^4z^8$ distinguiamo: Coefficiente = ………. Parte letterale = ………..

Grado complessivo = …… Il grado della lettera x ………

83 Motiva brevemente la verità o falsità delle seguenti proposizioni:

"Se due monomi hanno ugual grado allora sono simili" V F perché … … … … … … … ...
"Se due monomi sono simili allora hanno lo stesso grado" V F perché … … … … … … … ...

84 Quale diagramma di Venn rappresenta in modo corretto la seguente proposizione: "alcune espressioni letterali non sono monomi". **L** insieme delle espressioni letterali, **M** insieme dei monomi

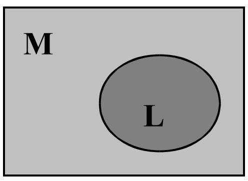


Fig 2

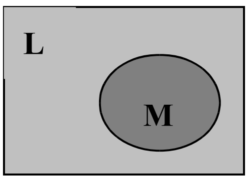


Fig1

85 Attribuisci il valore di verità alle seguenti proposizioni:

a) Il valore del monomio –a è negativo per qualunque a diverso da zero V F
b) Il valore del monomio $-a^2$ è negativo per qualunque a diverso da zero V F
c) Il monomio b^6 è il cubo di b^2 V F
d) L'espressione ab^{-1} è un monomio V F
e) Il valore del monomio ab è nullo per a = 1 e b = -1 V F

Moltiplicazione di due monomi

Ci proponiamo ora di introdurre nell'insieme dei monomi le operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione, potenza, divisione.
Ricordiamo che definire in un insieme un'operazione significa stabilire una legge che associa a due elementi dell'insieme un altro elemento dell'insieme stesso.
La moltiplicazione di due monomi si indica con lo stesso simbolo della moltiplicazione tra numeri; i suoi termini si chiamano fattori e il risultato si chiama prodotto, proprio come negli insiemi numerici.

DEFINIZIONE. Il prodotto di due monomi è il monomio avente per coefficiente il prodotto dei coefficienti, per parte letterale il prodotto delle parti letterali dei monomi fattori.

Esempi

- Assegnati i monomi $m_1=-4x^2yz^3$ $m_2=\frac{5}{6}x^3z^6$ il monomio prodotto è

$$m_3=\left(-4\cdot\frac{5}{6}\right)\left(x^2\cdot x^3\right)\cdot y\cdot\left(z^3\cdot z^6\right)=-\frac{10}{3}x^5yz^9$$

Procedura per moltiplicare due monomi

La moltiplicazione tra monomi si effettua moltiplicando prima i coefficienti numerici e dopo le parti letterali:
- nella moltiplicazione tra i coefficienti usiamo le regole note della moltiplicazione tra numeri razionali;
-nella moltiplicazione tra le parti letterali applichiamo la regola del prodotto di potenze con la stessa base.

Proprietà della moltiplicazione

- commutativa: $m_1\cdot m_2=m_2\cdot m_1$
- associativa: $m_1\cdot m_2\cdot m_3=\left(m_1\cdot m_2\right)\cdot m_3=m_1\cdot\left(m_2\cdot m_3\right)$
- 1 è l'elemento neutro: $1\cdot m=m\cdot 1=m$
- se uno dei fattori è uguale a 0 il prodotto è 0, cioè $0\cdot m=m\cdot 0=0$

Determina il prodotto delle seguenti coppie di monomi:

86 $\left(-x^2y^4\right)\cdot\left(-\frac{8}{5}x^2y\right)$ $\left(-\frac{15}{28}xy^3\right)\cdot\left(-\frac{7}{200}x^2y^2\right)$ $\left(a^5b^5y^2\right)\cdot\left(-\frac{8}{5}a^2y^2b^3\right)$

87 $(-2xy)\cdot(+3ax)$ $6a(-2ab)(-3a^2b^2)$ $-x(14x^2)$

88 $(-1)(-ab)$ $1{,}5a^2b\cdot\left(-\frac{2}{3}a^2b\right)$ $-\frac{7}{5}xy^3\left(-\frac{10}{3}xy^2z\right)$

89 $1{,}\overline{6}\,xa\left(1{,}2xy^2\right)$ $\left(\frac{12}{7}m^2n^3\right)\left(-\frac{7}{4}mn\right)$ $\left(-\frac{5}{4}ax^2\right)\left(\frac{3}{10}x^3y\right)$

90 $12ab\left(-\frac{1}{2}a^3b^3\right)$ $\left(-\frac{15}{8}at^2\right)\left(\frac{6}{5}t^3x\right)$ $\left(\frac{12}{4}a^2n^2\right)\left(-\frac{7}{4}ax\right)$

91 $2{,}5ab^2\cdot\left(-\frac{1}{2}a^2b\right)\cdot 1{,}5a$ $\left(-\frac{2}{9}xz\right)\left(-\frac{1}{4}z^3\right)(27x)$ $-8\left(\frac{1}{4}x\right)\left(\frac{4}{5}x^3a^4\right)$

92 $5x^3y^2\cdot\left(-\frac{1}{3}x^3y^2\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)$ $6ab\cdot\left(-\frac{1}{3}a^2\right)\cdot\frac{1}{2}ab\cdot 4a^2$ $\left(\frac{7}{2}a^3x^4y^2\right)\cdot\left(-\frac{8}{21}ax^2y\right)$

93 Sulla base degli esercizi precedenti puoi concludere che il grado del monomio prodotto è:
[A] Il prodotto dei gradi dei suoi fattori
[B] La somma dei gradi dei suoi fattori
[C] Minore del grado di ciascuno dei suoi fattori
[D] Uguale al grado dei suoi fattori

Potenza di un monomio

Ricordiamo che tra i numeri l'operazione di elevamento a potenza ha un solo termine, la base, sulla quale si agisce a seconda dell'esponente

Potenza = base ^{esponente} = base · base · base · …….. · base

Tante volte quanto indica l'esponente

Analogamente viene indicata la potenza di un monomio: la base è un monomio e l'esponente è un numero naturale.

> DEFINIZIONE. La **potenza di un monomio** è un monomio avente per coefficiente la potenza del coefficiente e per parte letterale la potenza della parte letterale.

Esempi

Calcoliamo il quadrato e il cubo del monomio $m_1=-\frac{1}{2}a^2b$.

$m_1=-\frac{1}{2}a^2b$ elevo al quadrato $\left(-\frac{1}{2}a^2b\right)^2=\left(-\frac{1}{2}\right)^2\cdot(a^2)^2\cdot(b)^2=\frac{1}{4}a^4b^2$

$m_1=-\frac{1}{2}a^2b$ elevo al cubo $\left(-\frac{1}{2}a^2b\right)^3=\left(-\frac{1}{2}\right)^3\cdot(a^2)^3\cdot(b)^3=-\frac{1}{8}a^6b^3$

Calcoliamo il quadrato e il cubo del monomio $m_2=5a^3b^2c^2$

$m_2=5a^3b^2c^2$ elevo al quadrato $(5a^3b^2c^2)^2=(5)^2\cdot(a^3)^2\cdot(b^2)^2\cdot(c^2)^2=25a^6b^4c^4$

$m_2=5a^3b^2c^2$ elevo al quadrato $(5a^3b^2c^2)^3=(5)^3\cdot(a^3)^3\cdot(b^2)^3\cdot(c^2)^3=125a^9b^6c^6$

Procedura per eseguire la potenza di un monomio

- Applichiamo la proprietà relativa alla potenza di un prodotto, eseguiamo cioè la potenza di ogni singolo fattore del monomio.
- Applichiamo la proprietà relativa alla potenza di potenza, moltiplicando l'esponente della variabile per l'esponente delle potenza.

Esegui le potenze indicate

94	$\left(-\frac{3}{5}abx^3y^5\right)^3=\frac{\dots}{\dots}a^3x^{\dots}y^{\dots}$	$(-3x^3y^4z)^2=9x^6y^{\dots}z^{\dots}$	$\left(\frac{1}{2}a^2bc^5\right)^4=\frac{1}{\dots}a^{\dots}b^{\dots}c^{\dots}$
95	$(a^3b^2)^8$	$(-a^4b^2)^7$	$(-5ab^2c)^3$
96	$(+2a\,x^3y^2)^2$	$\left(-\frac{1}{2}axy^2\right)^3$	$\left(\frac{3}{4}x^4y\right)^3$
97	$\left(\frac{2}{3}xy^2\right)^3$	$\left(-\frac{1}{2}ab\right)^4$	$\left(-\frac{3}{2}a^5\right)^2$
98	$\left[(-rs^2t)^2\right]^3$	$\left[\left(-\frac{1}{2}x^2y^3\right)^2\right]^3$	$\left[\left(-\frac{3}{2}a^2b^3\right)^2\right]^2$
99	$(-xy)^2\left(-\frac{1}{2}xy^2\right)^3$	$-\left(\frac{3}{2}xy^2\right)^0\cdot\left(-\frac{1}{6}xy\right)^2$	$-\left(-\frac{1}{3}x^3y^2\right)^2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}$
100	$\left(\frac{2}{3}ab^2c\right)^2\cdot(-3ab^3)^2$	$\left[\left(-\frac{1}{2}a^2b\right)^2\cdot\frac{2}{3}a^2b\right]^2$	$\left(\frac{2}{3}x\cdot\frac{1}{6}x\cdot\frac{1}{2}x\right)^2\cdot\left(-\frac{1}{6}ab^2\right)^2$

Divisione di due monomi

Premessa: ricordiamo che assegnati due numeri razionali d_1 e d_2 con $d_2 \neq 0$, eseguire la divisione $d_1 : d_2$ significa determinare il numero q che moltiplicato per d_2 dà d_1. Nell'insieme Q basta la condizione $d_2 \neq 0$ per affermare che q esiste ed è un numero razionale.

DEFINIZIONE. Assegnati due monomi m_1 e m_2 con m_2 diverso dal monomio nullo, se è possibile determinare il monomio q tale che $m_1 = q \cdot m_2$, si dice che m_1 è divisibile per m_2 e q è il monomio quoziente.

Esempi

- $(36x^5y^2):(-18x^3y)$

Per quanto detto sopra, vogliamo trovare, se esiste, il monomio q tale che $(36x^5y^2)=q\cdot(-18x^3y)$ e ripensando alla moltiplicazione di monomi possiamo dire che $q=-2x^2y$. Infatti $(-2x^2y)\cdot(-18x^3y)=(36x^5y^2)$ Il monomio q è quindi il quoziente della divisione assegnata.

Procedura per calcolare il quoziente di due monomi
Il quoziente di due monomi è così composto:
il coefficiente è il quoziente dei coefficienti dei monomi dati
la parte letterale ha gli esponenti ottenuti sottraendo gli esponenti delle stesse variabili
se la potenza di alcune lettere risulta negativa il risultato della divisione non è un monomio.

Esempi

- $\left(\frac{7}{2}a^3x^4y^2\right):\left(-\frac{21}{8}ax^2y\right)$

Seguiamo i passi descritti sopra $\left(\frac{7}{2}a^3x^4y^2\right):\left(-\frac{21}{8}ax^2y\right)=\frac{7}{2}\cdot\left(-\frac{8}{21}\right)a^{3-1}x^{4-2}y^{2-1}=-\frac{4}{3}a^2x^2y$

Nell'eseguire la divisione non abbiamo tenuto conto della condizione che il divisore deve essere diverso dal monomio nullo; questa condizione ci obbliga a stabilire per la divisione la Condizioni di Esistenza (**C.E.**): $\boldsymbol{C.E.}=a\neq 0$ e $x\neq 0$ e $y\neq 0$.

Esempio

- $\left(\frac{9}{20}a^2b^4\right):\left(-\frac{1}{8}a^5b^2\right)$

La **C.E.** $a \neq 0$ e $b \neq 0$, il quoziente è $\left(\frac{9}{20}a^2b^4\right):\left(-\frac{1}{8}a^5b^2\right)=\left(\frac{9}{20}\right)\cdot(-8)a^{2-5}b^{4-2}=-\frac{18}{5}a^{-3}b^2$.

Osserviamo che il quoziente ottenuto non è un monomio perché l'esponente della variabile a è negativo. Il risultato è un'espressione frazionaria o fratta.
In conclusione, l'operazione di divisione tra due monomi ha come risultato un monomio se ogni variabile del dividendo ha esponente maggiore o uguale all'esponente con cui compare nel divisore.

Esegui le divisioni indicate e poni le C.E.:

101 $15b^8:\left(-\frac{40}{3}b^3\right)$ $\quad\left(-\frac{13}{72}x^2y^5z^3\right):\left(-\frac{26}{27}xyz\right)$ $\quad\left(\frac{1}{2}a^3\right):(-4a^5)$

102 $\left(-\frac{12}{2}a^7b^5c^2\right):(-18ab^4c)$ $\quad(-34x^5y^2):(-2yz^3)$ $\quad(-a^7):(8a^7)$

103 $21a^3x^4b^2:7ax^2b$ $\quad a^6:20a^2$ $\quad 20ax^4y:2xy$

104 $-72a^4b^2y^2:(-3ab^2)$ $\quad -2a^2bc^5:(-8a^2bc)$ $\quad 48a^5bx:a^2b$

105 $\left[-\left(-\frac{1}{3}x^3y^2\right)^2:\left(-\frac{1}{3}\right)\right]^2:(x^3y^2)^2$ $\quad\left(\frac{2}{3}ab^2c\right)^2:(-3ab^3)$ $\quad\left[\frac{3}{5}x^4:\left(\frac{1}{3}x^4\right)\right]\cdot\left[x^4:\left(\frac{4}{5}x^4\right)\right]$

Addizione di due monomi

L'addizione di due monomi si indica con lo stesso simbolo dell'addizione tra numeri; i suoi termini si chiamano addendi e il risultato si chiama somma.

1° caso: addizione di due monomi simili

La somma di due monomi simili è un monomio simile agli addendi e avente come coefficiente la somma dei coefficienti.

Esempi

Calcoliamo $3x^3+(-6x^3)$

I due addendi sono monomi simili dunque la somma è ancora un monomio ed è simile ai singoli addendi. Precisamente $3x^3+(-6x^3)=(3+(-6))x^3=-3x^3$

Osserva che la somma di monomi simili si riduce alla somma algebrica di numeri.

106 Determina la somma dei monomi simili $8a^2b+\left(-\frac{2}{3}\right)a^2b+\frac{1}{6}a^2b$

La somma è un monomio ………… agli addendi; il suo coefficiente è dato da $8-\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\ldots\ldots$ *, la parte letterale è … … … Quindi la somma è ………………*

Proprietà della addizione

- commutativa: $m_1+m_2=m_2+m_1$
- associativa: $m_1+m_2+m_3=(m_1+m_2)+m_3=m_1+(m_2+m_3)$
- 0 è l'elemento neutro: $0+m=m+0=m$
- per ogni monomio m esiste il monomio opposto, cioè un monomio m* tale che m + m* = m*+m=0.

L'ultima proprietà enunciata ci permette di definire nell'insieme dei monomi simili anche la sottrazione di monomi. Essa si indica con lo stesso segno della sottrazione tra numeri e il suo risultato si chiama differenza.

Per sottrarre due monomi simili si aggiunge al primo l'opposto del secondo.

Esempi

- Assegnati $m_1=\frac{1}{2}a^2b$ $\quad m_2=-5a^2b$ determina m_1-m_2

L'operazione richiesta $\frac{1}{2}a^2b-(-5a^2b)$ diventa $\frac{1}{2}a^2b+5a^2b=\frac{11}{2}a^2b$

Sulla base di quanto detto, possiamo unificare le due operazioni di addizione e sottrazione di monomi simili in un'unica operazione che chiamiamo "somma algebrica di monomi"

La somma algebrica di due monomi simili è un monomio simile agli addendi avente per coefficiente la somma algebrica dei coefficienti.

Esempi

- Determiniamo la somma $\frac{3}{5}x^4-\frac{1}{3}x^4+x^4+\frac{4}{5}x^4-2x^4-\frac{1}{2}x^4$.

Osserviamo che tutti gli addendi sono tra loro simili dunque:

$$\frac{3}{5}x^4-\frac{1}{3}x^4+x^4+\frac{4}{5}x^4-2x^4-\frac{1}{2}x^4=\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{3}+1+\frac{4}{5}-2-\frac{1}{2}\right)x^4=-\frac{13}{30}x^4$$

2° caso: addizione di monomi non simili

Analizziamo il caso della seguente addizione: $7a^3b^2-5a^2b^3+a^3b^2$. Si vuole determinare la somma. I monomi addendi non sono tutti tra loro simili; lo sono però il primo e il terzo.

Le proprietà associativa e commutativa ci consentono di riscrivere l'addizione precedente "avvicinando" i monomi simili e sostituendo ad essi la loro somma:

$$7a^3b^2-5a^2b^3+a^3b^2=(7a^3b^2+a^3b^2)-5a^2b^3=8a^3b^2-5a^2b^3$$

L'espressione così ottenuta è la somma richiesta.

107 Determina la somma $S=2a-3ab-a+17ab+41a$.

I monomi addendi non sono tra loro simili, modifico la scrittura dell'operazione applicando la proprietà associativa in modo da affiancare i monomi simili:

$S=2a-3ab-a+17ab+41a=(\ldots\ldots\ldots\ldots)+(\ldots\ldots\ldots\ldots)=\ldots\ldots\ldots\ldots$

La somma ottenuta non è un ……………

Il procedimento che abbiamo seguito per determinare il risultato dell'addizione assegnata viene chiamato **riduzione dei termini simili**.

In conclusione, l'operazione di addizione tra monomi ha come risultato un monomio solo se gli addendi sono monomi simili; in caso contrario la somma viene effettuata riducendo i monomi simili e lasciando indicata l'addizione tra gli altri monomi.

Esempi

- Calcola la seguente somma: $s_1=3a-7a+2a+a$

s_1 è un monomio poiché gli addendi sono monomi simili: $s_1=-a$

- Calcola la seguente somma: $s_2=\frac{1}{2}a^3+b-\frac{3}{4}a^3-\frac{6}{5}b$

s_2 non è un monomio poiché gli addendi non sono monomi simili: $s_2=-\frac{1}{4}a^3-\frac{1}{5}b$

Esegui la somma algebrica dei seguenti monomi

108 $6x+2x-3x$ $\quad$ $-3a+2a-5a$

109 $5a^2b-3a^2b$ $\quad$ $a^2b^2-3a^2b^2$

110 $2xy-3xy+xy$ $\quad$ $2y^2-3y^2+7y^2-4y^2$

111 $-2xy^2+xy^2$ $\quad$ $-3ax-5ax$

112 $5ab-2ab$ $\quad$ $-3xy^2+3xy^2$

113 $7xy^3-2xy^3$ $\quad$ $+2xy^2-4xy^2$

114 $+2xy^2-4xy^2+xy^2$ $\quad$ $-5x^2+3x^2$

115 $5a^2b+2a^2b+a^2b-3a^2b-a^2b$ $\quad$ $0{,}1x-5x-1{,}2x+3x$

116 $\frac{1}{2}a^2-a^2$ $\quad$ $\frac{1}{2}a+2a$

117 $2xy^2-\frac{3}{2}xy^2-xy^2$ $\quad$ $\frac{1}{4}a^3b^2-\frac{1}{2}a^3b^2$

118 $\frac{2}{3}x-\frac{2}{5}x-2x+\frac{3}{10}x$ $\quad$ $\frac{2}{5}ab-\frac{1}{2}ab+\frac{27}{2}ab-\frac{1}{10}ab-\frac{5}{2}ab$

119 $-\left(-\frac{1}{2}ax^2\right)-3ax^2$ $\quad$ $-\frac{9}{2}xy-(-xy)$

120 $\frac{1}{2}a+2a+(2a-a)-\left(3a-\frac{1}{2}a\right)$ $\quad$ $\left(\frac{2}{3}a+a\right)-\left(\frac{2}{3}a-a\right)$

121 $6xy^2+\frac{1}{3}xy^2-\frac{1}{4}xy^2-6xy^2$ $\quad$ $\frac{1}{2}xy^2+\frac{3}{2}xy^2$

122 $5ab-2ab+(-ab)-(+2ab)+ab$ $\quad$ $-1{,}2x^2+0{,}1x^2+(-5x)^2-(-25x)^2$

123 $6ab-\frac{1}{3}a^2+\frac{1}{2}ab+4a^2$ $\quad$ $\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{4}x^2+x^2\right)-\left(-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}x^2\right)$

124 $-\frac{4}{3}a^2b^3-2a^2b^3+\frac{1}{3}a^2b^3-a^2b^3$ $\quad$ $\frac{1}{2}x^2-2x^2-\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{4}x^2-2x^2-\frac{3}{5}x^2\right)$

125 $(-xy)^2\left(-\frac{1}{2}xy^2\right)+\frac{3}{2}xy^2\left(-\frac{1}{6}xy\right)^2$

126 $5x^3y^2+\left(-\frac{1}{3}x^3y^2\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)-(x^3y^2)+\left(-\frac{1}{4}x^3y^2\right)-\left(-\frac{1}{3}\right)$

127 $\left(2xy^2-\frac{3}{2}xy^2\right)-\left(xy^2+2xy^2-4xy^2\right)+\left(xy^2+\frac{1}{2}xy^2\right)$

►4. Espressioni con i monomi

Consideriamo l'espressione letterale $E=\left(-\frac{1}{2}a^2 b\right)^3 : (a^5 b)+(-2ab)\cdot\left(\frac{1}{2}b+b\right)+5ab^2$

Vediamo che è in due variabili, le variabili sono infatti a e b. Inoltre, i termini delle operazioni che compaiono sono monomi.

Se volessimo calcolare il valore di E per a = 10 ; b = -2 dovremmo sostituire nell'espressione tali valori e risolvere l'espressione numerica che ne risulta. Inoltre se dovessimo calcolare il valore di E per altre coppie dovremmo ogni volta applicare questo procedimento.

Dal momento che abbiamo studiato come eseguire le operazioni razionali con i monomi, prima di sostituire i numeri alle lettere, applichiamo le regole del calcolo letterale in modo da ridurre E, se possibile, in una espressione più semplice.

Prima di procedere, essendovi una divisione poniamo innanzi tutto la C.E. a ≠ 0 e b ≠ 0 ed eseguiamo rispettando la precedenza delle operazioni come facciamo nelle espressioni numeriche.

■ $\left(-\frac{1}{2}a^2 b\right)^3 :(a^5 b)+(-2ab)\cdot\left(\frac{1}{2}b+b\right)+5ab^2$ sviluppiamo per prima il cubo

$=\left(-\frac{1}{8}a^6 b^3\right):(a^2 b)+(-2ab)\cdot\frac{3}{2}b+5ab^2$ eseguiamo divisione e moltiplicazione

$=-\frac{1}{8}ab^2-3ab^2+5ab^2$ sommiamo i monomi simili

$=\frac{15}{8}ab^2$

Ora è più semplice calcolarne il valore: per *a=10* e *b=-2* si ha $=\frac{15}{8}\cdot 10\cdot(-2)^2=\frac{15}{8}\cdot 10\cdot 4=75$.

■ $\left(\frac{2}{3}ab^2 c\right)^2 : (-3ab^3)-\frac{2}{9}abc^2$ Sviluppiamo le potenze

$=\frac{4}{9}a^2 b^4 c^2:(-3ab^3)-\frac{2}{9}abc^2$ eseguiamo la divisione

moltiplichiamo le frazioni

$=-\frac{4}{27}abc^2-\frac{2}{9}abc^2$ somiamo i monomi simili

$=\frac{-4-6}{27}abc^2$ il risultato è

$=-\frac{10}{27}abc^2$

■ $\left[\left(-\frac{14}{16}x^2 y^2\right):\left(-\frac{14}{4}xy\right)\right]^3+\frac{1}{2}xy\cdot\frac{1}{4}x^2 y^2$

Eseguiamo per prima la divisione tra le parentesi quadre

$=\left[+\frac{14}{16}\cdot\frac{4}{14}xy\right]^3+\frac{1}{2}xy\cdot\frac{1}{4}x^2 y^2$ eseguiamo la moltiplicazione tra le frazioni

$=\left[\frac{1}{4}xy\right]^3+\frac{1}{2}xy\cdot\frac{1}{4}x^2 y^2$ sviluppiamo il cubo

$=\frac{1}{64}x^3 y^3+\frac{1}{2}xy\cdot\frac{1}{4}x^2 y^2$ moltiplichiamo i due monomi

$=\frac{1}{64}x^3 y^3+\frac{1}{8}x^3 y^3$ sommiamo i monomi simili

$=\frac{1+8}{64}x^3 y^3$ il risultato è

$=\frac{9}{64}x^3 y^3$

Esegui le operazioni tra monomi

128 $(3a-2a)(2x+2x):2a$

129 $\left(\frac{1}{2}a-\frac{1}{4}a\right)^2:\left(\frac{3}{2}a-2a\right)$

130 $\left(\frac{1}{2}a^2-a^2\right)\left(\frac{1}{2}a+2a\right)+(2a-a)\left(3a-\frac{1}{2}a\right)a$

131 $\left(\frac{2}{3}a-\frac{5}{2}a\right)a+\left(7a-\frac{1}{3}a\right)^2:2$

132 $\frac{1}{2}x^2\left(x^2+\frac{1}{2}x^2\right)-\frac{1}{6}x^3\left(12x-\frac{18}{5}x\right)$

133 $\left(-\frac{3}{4}x^4a^2b\right):\left(\frac{1}{2}x^2ab\right)+\frac{2}{3}x^2a$ — *R.* $-\frac{5}{6}ax^2$

134 $\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{2}{3}x^2+x^2\right)\left(-\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}x\right)$ — *R.* $\frac{7}{12}x^3$

135 $\left(\frac{1}{5}x-\frac{5}{2}x+x\right)-\left(2x-\frac{8}{3}x+\frac{1}{4}x+x\right)-\frac{7}{60}x$ — *R.* $-2x$

136 $5a+\left\{-\frac{3}{4}a-\left[2a-\frac{1}{2}a+(3a-a)+0{,}5a\right]-a\right\}$ — *R.* $-\frac{3}{4}a$

137 $-1{,}2x^2\left(\frac{1}{3}x\right)^2+\left[0{,}1x(-5x)^2-(-5x^2)^2\right]$ — *R.* $3x^8$

138 $-\frac{3}{5}x^2y^2\left(-\frac{10}{9}xz^2\right)(-15xy)-0{,}\overline{6}x^4yz(-0{,}\overline{7}xy^2z)$

139 $\frac{1}{2}ab^2c+\left[\frac{3}{4}a^3b^6c^3-\left(-\frac{1}{4}ab^2c\right)^3-\left(-\frac{1}{2}ab^2\right)^2\left(-\frac{1}{16}ab^2c^3\right)\right]:\left(-\frac{5}{4}ab^2c\right)$ — R. ab^2c

140 $\left(2xy^2-\frac{3}{2}xy^2\right)-\left[\left(xy^2+2xy^2-4xy^2\right)\right]+\left(xy^2+\frac{1}{2}xy^2\right)$ — R. $3xy^2$

141 $\frac{1}{4}x^4y^2-\left[\frac{3}{2}x^5y^4:\left(\frac{1}{2}xy\right)^2-3x^3y^2\right]\left(-\frac{1}{3}x\right)+\left(-\frac{1}{2}x^2y\right)^2$ — R. $\frac{3}{2}x^4y^2$

142 $a^2-\left\{a-\left[2\left(\frac{a}{2}-\frac{a}{3}\right)\right]\right\}^2+\left(\frac{2}{3}a+a\right)\left(\frac{2}{3}a-a\right)$ — R. 0

143 $\left[\left(-\frac{1}{2}a^2b\right)^2\cdot\left(-\frac{2}{3}b^2\right)^2-\left(+\frac{1}{3}b^3a^2\right)^2\right]:\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{6}x+\frac{1}{2}x\right)+\left(-\frac{1}{6}ab^2\right)\left(-\frac{2}{5}ab\right)$ — *R.* $\frac{1}{15}a^2b^3$

144 $\left[\left(\frac{4}{5}x+\frac{7}{10}x\right)^2:\left(\frac{1}{3}x+x+\frac{3}{4}x\right)\right]^2:\left(18x-\frac{9}{2}x+\frac{27}{2}x\right)+\left[\left(-\frac{2}{3}abx\right)^2-\left(\frac{1}{3}abx\right)^2\right]:(a^2b^2x)-x$ — *R.* $27x$

145 $\left(\frac{1}{4}xy^2\right)\left(-\frac{16}{5}x^2y\right)-8x^2y^2(-2xy)-\frac{2}{5}x\left(-\frac{5}{3}x^2\right)(+3y^3)+\left(\frac{12}{7}xy^2\right)\left(-\frac{7}{4}x^2y\right)+\frac{9}{5}x^3y^3$ — *R.* $16x^3y^3$

146 $\frac{2}{3}a^2b-\left[3a-\frac{1}{3}a^2b-\left(\frac{2}{5}a+\frac{1}{2}a-3a\right)+\left(\frac{2}{5}a^2b+\frac{1}{2}a^2b-2a^2b\right)\right]-\frac{1}{10}a^2b-\frac{49}{10}a$ — *R.* $2a^2b$

147 $\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}x-2x\right)\left(-\frac{1}{2}x^2\right)+\left(\frac{3}{4}x^2-2x^2\right)\left(-\frac{3}{5}x\right)-\frac{4}{3}\left(x^3+\frac{1}{2}x^3\right)$ — *R.* $-\frac{2}{3}x^3$

148 $\left[\frac{3}{5}ab^2+\frac{1}{2}b-ab^2\cdot\left(-\frac{3}{10}+\frac{4}{5}-\frac{1}{2}\right)-2b+\frac{3}{2}b+\frac{1}{15}ab^2\right]^2:\left[\left(b+\frac{3}{2}b\right)^2-\frac{5}{10}b^2+\frac{1}{2}b^2\right]\cdot\left(-\frac{5}{2}ab\right)^2$ — *R.* $\frac{4}{9}a^4b^4$

149 $\left[\left(\frac{3}{2}xy\right)^2\cdot\left(\frac{4}{15}y\right)^2-\left(\frac{3}{2}xy^2\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3+\frac{8}{75}x^2y^4\right]:\left(\frac{10}{3}x^2y\right)$ — *R.* $-\frac{3}{25}y^3$

150 $\left(\frac{1}{2}x+2x\right)\left(\frac{1}{2}x-2x\right)\left(\frac{1}{4}x^2-4x^2\right)-\frac{1}{4}x\left(\frac{27}{4}x^3-\frac{61}{3}x^3\right)-16\left(x^4+x^4\right)-\frac{1}{12}x^2\cdot x^2+\frac{1}{8}x^4$

151 Assegnati i monomi: $m_1=\frac{3}{8}a^2b^2 \quad m_2=-\frac{8}{3}ab^3 \quad m_3=-3a \quad m_4=-\frac{1}{2}b \quad m_5=2b^3$

Calcola il risultato delle seguenti operazioni, ponendo le opportune C.E.

a) $m_1\cdot m_2\cdot(m_4)^2$

b) $-m_2\cdot m_1\cdot(m_3)^2\cdot m_5$

c) $(m_3\cdot m_4)^2-m_1$

d) $m3\cdot m_5-m_2$

e) $m_2:m_3+m_5$

f) $m_1:m_2$

152 Quando sottraiamo due monomi opposti otteniamo

[A] Il doppio del primo termine
[B] Il doppio del secondo termine
[C] il monomio nullo
[D] 0

153 Quando dividiamo due monomi opposti otteniamo:

[A] -1
[B] 0
[C]1
[D]il quadrato del primo monomio

154 Attribuisci il valore di verità alle seguenti proposizioni:

a.	La somma di due monomi opposti è il monomio nullo	V	F
b.	Il quoziente di due monomi simili è il quoziente dei loro coefficienti	V	F
c.	La somma di due monomi è un monomio	V	F
d.	Il prodotto di due monomi è un monomio	V	F
e.	L’opposto di un monomio ha sempre il coefficiente negativo	V	F

►5. M.C.D. e m.c.m. tra monomi

Massimo Comune Divisore

Il calcolo del minimo comune multiplo e del massimo comune divisore, studiato per i numeri, si estende anche ai monomi. Premettiamo intanto le seguenti definizioni.
Un monomio A si dice **multiplo** di un monomio B se esiste un monomio C per il quale $A=B\cdot C$; in questo caso diremo anche che B è **divisore** del monomio A.

DEFINIZIONE. Il massimo comune divisore tra due o più monomi è il monomio che, tra tutti i divisori comuni dei monomi dati, ha grado massimo.

Il coefficiente numerico può essere un qualunque numero reale: se i coefficienti sono tutti interi è opportuno scegliere il loro M.C.D., se non lo sono è opportuno scegliere 1.

Esempi

Dati i monomi $12a^3b^2$ e $16a^2b$ sono divisori comuni

1	2	4	a	a^2	b	ab	a^2b	$2a$
$2a^2$	$2b$	$2ab$	$2a^2b$	$4a$	$4a^2$	$4b$	$4ab$	$4a^2b$

Il monomio di grado massimo è a^2b , il M.C.D. tra i coefficienti è 4. Pertanto il M.C.D. dei monomi è $4a^2b$.

Procedura per calcolare il M.C.D. tra monomi
Il M.C.D. di un gruppo di monomi è il monomio che ha:
per coefficiente numerico il M.C.D. dei valori assoluti dei coefficienti dei monomi qualora questi siano numeri interi, se non sono interi si prende 1;
la parte letterale formata da tutte le lettere comuni ai monomi dati, ciascuna presa una sola volta e con l'esponente minore con cui compare.

Esempi

■ *Calcolare* $M.C.D.(14a^3b^4c^2;\ 4ab^2;\ 8a^2b^3c)$

Per prima cosa calcoliamo il M.C.D. tra i coefficienti numerici 14, 4 e 8 che è 2. Per ottenere la parte letterale si mettono insieme tutte le lettere comuni, ciascuna con l'esponente minore con cui compare: ab^2 .
In definitiva, $M.C.D.(14a^3b^4c^2;\ 4ab^2;\ 8a^2b^3c)=2ab^2$.

■ *Calcolare il massimo comune divisore tra* $5x^3y^2z^3;\ -\frac{1}{8}xy^2z^2;\ 7x^3yz^2$

Si osservi che i coefficienti numerici dei monomi non sono numeri interi quindi si prende 1 come coefficiente del M.C.D.
Le lettere in comune sono $x\,y\,z$, prese ciascuna con l'esponente minore con cui compaiono si ha $x\,y\,z^2$.
Quindi, $M.C.D.(5x^3y^2z^3;\ -\frac{1}{8}xy^2z^2;\ 7x^3yz^2)=x\,y\,z^2$

Osservazione

La scelta di porre uguale a 1 il coefficiente numerico del M.C.D., nel caso in cui i monomi abbiano coefficienti razionali, è dovuta al fatto che una qualsiasi frazione divide tutte le altre e quindi una qualsiasi frazione potrebbe essere il coefficiente del M.C.D. Ad essere più precisi, occorrerebbe, quando si parla di monomi e polinomi, chiarire a quale degli insiemi numerici $\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ appartengono i loro coefficienti. Qui stiamo considerando coefficienti numerici in $\mathbb{R}$.

DEFINIZIONE**.** Due monomi si dicono **monomi primi tra loro** se il loro M.C.D. è 1.

Minimo comune multiplo

Estendiamo ora ai monomi la nozione di minimo comune multiplo

DEFINIZIONE. Il **minimo comune multiplo di due o più monomi** è il monomio che, tra tutti i monomi multipli comuni dei monomi dati, ha il grado minore.

Il coefficiente numerico può essere un qualunque numero reale: se i coefficienti sono tutti interi è opportuno scegliere il loro m.c.m., se non lo sono è opportuno scegliere 1.

Esempio

Per calcolare il minimo comune multiplo tra $5a^3b$ e $10a^2b^2$ dovremmo costruire i loro multipli finché non incontriamo quello comune che ha coefficiente numerico positivo più piccolo e grado minore:

$5a^3b$	alcuni multipli	$10a^3b$	$10a^3b^2$	$10a^4b$	$15a^3b$	…
$10a^2b^2$	alcuni multipli	$10a^2b^3$	$10a^3b^2$	$10a^4b^2$	$20a^2b^2$	…

Il minimo comune multiplo è $10a^3b^2$.

In realtà applicando la definizione è poco pratico calcolare il m.c.m., è utile invece la seguente

Procedura per il calcolo del m.c.m. tra due o più monomi

Il m.c.m. di un gruppo di monomi è il monomio che ha:

per coefficiente numerico il m.c.m. dei valori assoluti dei coefficienti dei monomi qualora questi siano numeri interi, se non sono interi si prende 1;

la parte letterale formata da tutte le lettere comuni e non comuni ai monomi dati, ciascuna presa una sola volta e con l'esponente maggiore con cui compare.

Esempi

■ *Calcola il minimo comune multiplo tra* $5a^3bc\,;\ 12ab^2c\,;\ 10a^3bc^2$.

Il m.c.m. tra i coefficienti 5, 12, 10 è 60. Per ottenere la parte letterale osservo il grado più alto delle lettere componenti i monomi, riporto tutte le lettere, comuni e non comuni, una sola volta con il grado maggiore con cui ciascuna compare: $a^3b^2c^2$.

In definitiva, $m.c.m(5a^3bc\,;\ 12ab^2c\,;\ 10a^3bc^2) = 60a^3b^2c^2$.

Esempi

■ *Calcola il minimo comune multiplo tra* $6x^2y\,;\ -\frac{1}{2}xy^2z\,;\ \frac{2}{3}x^3yz$.

I coefficienti numerici dei monomi non sono interi quindi il m.c.m. avrà come coefficiente 1.

La parte letterale si costruisce mettendo insieme tutte le lettere che compaiono, prese una sola volta, x, y, z ciascuna presa con l'esponente massimo, quindi x^3y^2z .

In definitiva $m.c.m.\left(6x^2y\,;\ -\frac{1}{2}xy^2z\,;\ \frac{2}{3}x^3yz\right) = x^3y^2z$.

Osservazione

Assegnati due monomi, per esempio x^2y e xy^2z , calcoliamo M.C.D. e il m.c.m.

$$M.C.D.(x^2y\,;\ xy^2z) = xy \qquad m.c.m.(x^2y\,;\ xy^2z) = x^2y^2z$$

Moltiplichiamo ora M.C.D. e m.c.m., abbiamo:

Moltiplichiamo ora i monomi assegnati, abbiamo:

$$(x^2y)\cdot(xy^2z) = x^3y^3z$$

Il prodotto dei due monomi è uguale al prodotto tra il M.C.D. e il m.c.m.

Si può dimostrare che questa proprietà vale in generale:

PROPRIETÀ. Dati due monomi, il prodotto tra il loro massimo comun divisore e il loro minimo comune multiplo è uguale al prodotto tra i monomi stessi.

155 *Vero o falso?*

a) $12a^3b^2c$ è un multiplo di abc V F
b) $2xy$ è un divisore di x^2 V F
c) $2a$ è divisore di $4ab$ V F
d) $-5b^2$ è divisore di $15ab$ V F
e) $8ab$ è multiplo di a^2b^2 V F
f) $12a^5b^4$ è multiplo di $60a^5b^7$ V F
g) 5 è divisore di $15a$ V F

156 *Vero o falso?*

a) il mcm fra monomi è divisibile per tutti i monomi dati V F
b) il MCD fra monomi è multiplo di almeno un monomio dato V F
c) il mcm è il prodotto dei monomi tra di loro V F

Calcola il m.c.m e il M.C.D dei seguenti gruppi di monomi

157	$14x^3y^2$	xy	$4x^3y^4$	$[28x^3y^4;\ xy]$
158	xyz^5	$x^3y^2z^2$		$[x^3y^2z^5;\ xyz^2]$
159	$4ab^2$	a^3b^2	$5ab^5$	$[20a^3b^5;ab^2]$
160	$2a^2bc^3$	ab^4c^2	$24a^3bc$	
161	$6a^2x$	$2ax^3$	$4x^2c^3$	
162	$30ab^2c^4$	$5a^2c^3$	$12abc$	
163	$x^2y^4z^2$	xz^3	$24y^2z$	
164	$4a^2y$	y^3c	$15ac^5$	
165	$13xyc^2$	$x^2y^3c^2$	$6c^4$	
166	$a^nb^mz^{2m+1}$	$a^{3n}b^{m+3}$	$a^{4n}b^{m+4}$	$[a^{4n}b^{m+4}z^{2m+1};\ a^nb^m]$
167	$-2xy^3z$	$-6x^3yz$	$8x^3z$	$[24x^3y^3z;\ 2xz]$
168	$\frac{1}{4}ab^2c$	$-3a^2b^2c$	$-\frac{1}{2}ab^2c^2$	$[a^2b^2c^2;ab^2c]$
169	$\frac{2}{3}x^2y^2$	$\frac{1}{6}xy^2$	$\frac{2}{5}xyz^2$	$[x^2y^2z^2;xy]$

170 Dati i monomi $3xy^2$ e xz^3

a) Calcola il loro M.C.D.
b) Calcola il loro m.c.m.
c) Verifica che il loro prodotto è uguale al prodotto tra il loro m.c.m. e il loro M.C.D.
d) Verifica che il loro M.C.D. è uguale al quoziente tra il loro prodotto e il loro m.c.m.

►6. Polinomi

Un **polinomio è un'espressione algebrica letterale che consiste in una somma algebrica di monomi**.

Esempi

- Sono polinomi: $6a+2b$; $5a^2b+3b^2$; $6x^2-5y^2x-1$; $7ab-2a^2b^3+4$.

Se tra i termini di un polinomio non sono presenti monomi simili, il polinomio si dice in **forma normale** o **ridotto;** se al contrario si presentano dei termini simili, possiamo eseguire la riduzione del polinomio sommando i termini simili. Tutti i polinomi sono quindi riducibili in forma normale.
Un polinomio in forma normale può presentare tra i suoi termini un monomio di grado 0 che viene comunemente chiamato **termine noto.**

Esempi

- Il polinomio: $3ab+b^2-2ba+4-6ab^2+5b^2$; ridotto in forma normale diventa $ab+6b^2-6ab^2+4$. Il termine noto è 4

171 Riduci in forma normale il seguente polinomio: $5a^3-4ab-1+2a^3+2ab-a-3a^3$.
Svolgimento: Evidenziamo i termini simili e sommiamoli tra di loro $\overline{5a^3}\,\underline{-4ab}-1+\overline{2a^3}+\underline{2ab}-a-\overline{3a^3}$, *in modo da ottenere……………….. Il termine noto è …….*

Un polinomio può anche essere costituito da un unico termine, pertanto un monomio è anche un polinomio. Un polinomio che, ridotto in forma normale, è somma algebrica di due, tre, quattro monomi non nulli si dice rispettivamente binomio, trinomio, quadrinomio.

Esempi

- $xy-5x^3y^2$ è un binomio;
- $3ab^2+a-4a^3$ è un trinomio;
- $a-6ab^2+3ab-5b$ è un quadrinomio.

Due polinomi, ridotti in forma normale, formati da termini uguali si dicono **uguali,** più precisamente vale il **principio di identità dei polinomi:** *due polinomi* $p(x)$ *e* $q(x)$ *sono uguali se, e solo se, sono rispettivamente uguali i coefficienti dei termini simili.*
Se due polinomi sono invece formati da termini rispettivamente opposti, allora si dicono polinomi **opposti.**
Definiamo, inoltre, un polinomio **nullo** quando i suoi termini sono a coefficiente nullo. Il polinomio nullo coincide con il monomio nullo e quindi con il numero 0.

Esempi

- I polinomi: $\frac{1}{3}xy+2y^3-x$; $2y^3-x+\frac{1}{3}xy$ sono uguali.
- I polinomi: $6ab-3a^2+2b^2$; $3a^2-2b^3-6ab$ sono opposti.
- Il polinomio: $7ab+4a^2-ab+b^3-4a^2-2b^3-6ab-b^3$ è un polinomio nullo, infatti riducendolo in forma normale otteniamo il monomio nullo.

Il **grado complessivo** (o semplicemente **grado**) di un polinomio è il massimo dei gradi complessivi dei suoi termini. Si chiama, invece, **grado di un polinomio rispetto ad una data lettera** l'esponente maggiore con cui quella lettera compare nel polinomio, dopo che è stato ridotto a forma normale.

Esempi

- Il polinomio $2ab+3-4a^2b^2$ ha grado complessivo 4 perché il monomio con grado massimo è $-4a^2b^2$, che è un monomio di quarto grado.
- Il grado del polinomio $a^3+3b^2a-4ba^2$ rispetto alla lettera a è 3 perché l'esponente più alto con cui tale lettera compare è 3.

172 Individua il grado di

a) $x^2y^2-3y^3+5yx-6y^2x^3$ rispetto alla lettera y è … …, il grado complessivo è … ...

b) $5a^2-b+4ab$ rispetto alla lettera b è … …, il grado complessivo è … ...

Un polinomio si dice **omogeneo** se tutti i termini che lo compongono sono dello stesso grado.

Esempi

- Il polinomio: $a^3-b^3+ab^2$ è un polinomio omogeneo di grado 3.

173 Stabilire quali dei seguenti polinomi sono omogenei:

$$a)\ x^3y+2y^2x^2-4x^4;\quad b)\ 2x+3-xy;\quad c)\ 2x^3y^3-y^4x^2+5x^6$$

Un polinomio si dice **ordinato secondo le potenze decrescenti (crescenti) di una lettera,** quando i suoi termini sono ordinati in maniera tale che gli esponenti di tale lettera decrescono (crescono), leggendo il polinomio da sinistra verso destra.

Esempi

- Il polinomio: $\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{4}x^2y-2xy^2+\frac{3}{8}y^3$ è ordinato secondo le potenze decrescenti della lettera x, e secondo le potenze crescenti della lettera y.

Un polinomio di grado n rispetto ad una data lettera si dice **completo** se contiene tutte le potenze di tale lettera di grado inferiore a n, compreso il termine noto.

Esempi

- Il polinomio: $x^4-3x^3+5x^2+\frac{1}{2}x-\frac{3}{5}$ è completo di grado 4 e inoltre risulta ordinato rispetto alla lettera x. Il termine noto è $-\frac{3}{5}$.

Osservazione

Ogni polinomio può essere scritto sotto forma ordinata e completa: l'ordinamento si può effettuare in virtù della proprietà commutativa della somma, mentre la completezza si può ottenere mediante l'introduzione dei termini dei gradi mancanti con coefficiente uguale a 0.
Per esempio, il polinomio $x^4-x+1+4x^2$ può essere scritto sotto forma ordinata e completa come: $x^4+0x^3+4x^2-x+1$.

174 Individuare quali dei seguenti polinomi sono ordinati rispetto alla lettera x con potenze crescenti

$$a)\ 2-\frac{1}{2}x^2+x;\quad b)\ \frac{2}{3}-x+3x^2+5x^3;\quad c)\ 3x^4-\frac{1}{2}x^3+2x^2-x+\frac{7}{8}$$

175 Relativamente al polinomio $b^2+a^4+a^3+a^2$

Il grado massimo è …… Il grado rispetto alla lettera a è …… Rispetto alla lettera b è ……

Il polinomio è ordinato rispetto alla a? SI NO Completo? SI NO Omogeneo? SI NO

176 Scrivere un polinomio di terzo grado nelle variabili a e b che sia omogeneo.

177 Scrivere un polinomio di quarto grado nelle variabili x e y che sia omogeneo e ordinato secondo le potenze decrescenti della seconda indeterminata.

178 Scrivere un polinomio di quinto grado nelle variabili r e s che sia omogeneo e ordinato secondo le potenze crescenti della prima indeterminata.

179 Scrivere un polinomio di quarto grado nelle variabili z e w che sia omogeneo e ordinato secondo le potenze crescenti della prima indeterminata e decrescenti della seconda.

180 Scrivere un polinomio di sesto grado nelle variabili x, y e z che sia completo e ordinato secondo le potenze decrescenti della seconda variabile.

Somma algebrica di polinomi

I polinomi sono somme algebriche di monomi e quindi le espressioni letterali che si ottengono dalla somma o differenza di polinomi sono ancora somme algebriche di monomi.
In definitiva diciamo che la **somma di due o più polinomi è un polinomio avente per termini tutti i termini dei polinomi addendi.**

■ Calcolare la somma dei due polinomi: $2x^2+5-3y^2x$; $x^2-xy+2-y^2x+y^3$
Indichiamo la somma $(2x^2+5-3y^2x)+(x^2-xy+2-y^2x+y^3)$,
eliminando le parentesi otteniamo il polinomio $2x^2+5-3y^2x+x^2-xy+2-y^2x+y^3$,
sommando i monomi simili $3x^2-4xy^2-xy+y^3+7$

La differenza di due polinomi si può trasformare in somma del primo polinomio con l'opposto del secondo.

■ $3a^2+2b-\frac{1}{2}ab-\left(2a^2+ab-\frac{1}{2}b\right)$

$$=3a^2+2b-\frac{1}{2}ab-2a^2-ab+\frac{1}{2}b=a^2+\frac{-1-2}{2}ab+\frac{4+1}{2}b=a^2-\frac{3}{2}ab+\frac{5}{2}b$$

Prodotto di un polinomio per un monomio

Per eseguire il prodotto tra il monomio $3x^2y$ e il polinomio $2xy+5x^3y^2$; indichiamo il prodotto con $(3x^2y)\cdot(2xy+5x^3y^2)$. Applichiamo la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione: $(3x^2y)\cdot(2xy+5x^3y^2)=6x^3y^2+15x^5y^3$.
Pertanto **il prodotto di un monomio per un polinomio è un polinomio avente come termini i prodotti del monomio per ciascun termine del polinomio.**

■ $(3x^3y)\cdot\left(\frac{1}{2}x^2y^2+\frac{4}{3}xy^3\right)=(3x^3y)\cdot\left(\frac{1}{2}x^2y^2\right)+(3x^3y)\cdot\left(\frac{4}{3}xy^3\right)=\frac{3}{2}x^5y^3+4x^4y^4$

Quoziente tra un polinomio e un monomio

Il quoziente tra un polinomio e un monomio si calcola applicando la proprietà distributiva della divisione rispetto all'addizione.
Si dice che un **polinomio è divisibile per un monomio**, non nullo, se esiste un polinomio che, moltiplicato per il monomio, dà come risultato il polinomio dividendo; il monomio si dice **divisore** del polinomio.

■ $(6x^5y+9x^3y^2):(3x^2y)=2x^{(5-2)}y^{(1-1)}+3x^{(3-2)}y^{(2-1)}=2x^3+3xy$

Osservazioni

- Poiché ogni monomio è divisibile per qualsiasi numero diverso da zero, allora anche ogni polinomio è divisibile per un qualsiasi numero diverso da zero.
- Un polinomio è divisibile per un monomio, non nullo, se ogni fattore letterale del monomio divisore compare, con grado uguale o maggiore, in ogni monomio del polinomio dividendo.
- La divisione tra un polinomio e un qualsiasi monomio non nullo è sempre possibile, tuttavia il risultato è un polinomio solo nel caso in cui il monomio sia divisore di tutti i termini del polinomio.
- Il quoziente tra un polinomio e un monomio suo divisore è un polinomio ottenuto dividendo ogni termine del polinomio per il monomio divisore

Prodotto di polinomi

Il prodotto di due polinomi è il polinomio che si ottiene moltiplicando ogni termine del primo polinomio per ciascun termine del secondo polinomio.

■ $(a^2b+3a-4ab)\left(\frac{1}{2}a^2b^2-a+3ab^2\right)$

$=\frac{1}{2}a^4b^3-a^3b+\underline{3a^3b^3}+\frac{3}{2}a^3b^2-3a^2+9a^2b^2-\underline{2a^3b^3}+4a^2b-12a^2b^3$ *riducendo i termini simili*

$\frac{1}{2}a^4b^3-a^3b+a^3b^3+\frac{3}{2}a^3b^2-3a^2+9a^2b^2+4a^2b-12a^2b^3$.

■ $(x-y^2-3xy)\cdot(-2x^2y-3y)$

Moltiplicando ogni termine del primo polinomio per ogni termine del secondo otteniamo
$(x-y^2-3xy)(-2x^2y-3y)=-2x^3y+3xy+2x^2y^3-3y^3+6x^3y^2-9xy^2$.

■ $\left(\frac{1}{2}x^3-2x^2\right)\left(\frac{3}{4}x+1\right) = \frac{3}{8}x^4+\underline{\frac{1}{2}x^3}-\underline{\frac{3}{2}x^3}-2x^2 = \frac{3}{8}x^4-x^3-2x^2$

Esegui le seguenti somme di polinomi

181 $a+b-b$ $\quad a+b-2b$ $\quad a+b-(-2b)$

182 $a-(b-2b)$ $\quad 2a+b+(3a+b)$ $\quad 2a+2b+(2a+b)+2a$

183 $2a+b-(-3a-b)$ $\quad 2a-3b-(-3b-2a)$ $\quad (a+1)-(a-3)$

184 $(2a^2-3b)+(4b+3a^2)+(a^2-2b)$ $\quad (3a^3-3b^2)+(6a^3+b^2)+(a^3-b^2)$

185 $\left(\frac{1}{5}x^3-5x^2+\frac{1}{5}x-1\right)-\left(3x^3-\frac{7}{3}x^2+\frac{1}{4}x-1\right)$

186 $\left(\frac{1}{2}+2a^2+x\right)-\left(\frac{2}{5}a^2+\frac{1}{2}ax\right)+\left[-\left(-\frac{3}{2}-2ax+x^2\right)+\frac{1}{3}a^2\right]-\left(\frac{3}{2}ax+2\right)$ $\quad R.\left[-x^2+x+\frac{29}{15}a^2\right]$

187 $\left(\frac{3}{4}a+\frac{1}{2}b-\frac{1}{6}ab\right)-\left(\frac{9}{8}ab+\frac{1}{2}a^2-2b\right)+ab-\frac{3}{4}a$ $\quad R.\left[-\frac{a^2}{2}-\frac{7}{24}ab+\frac{5}{2}b\right]$

Esegui i seguenti prodotti di un monomio per un polinomio

188 $(a+b)b$ $\quad (a-b)b$ $\quad (a+b)(-b)$

189 $(a-b+51)b$ $\quad (-a-b-51)(-b)$ $\quad (a^2-a)a$

190 $(a^2-a)(-a)$ $\quad (a^2-a-1)a^2$ $\quad (a^2b-ab-1)(ab)$

191 $(ab-ab-1)(ab)$ $\quad (a^2b-ab-1)(a^2b^2)$ $\quad (a^2b-ab-1)(ab)^2$

192 $ab(a^2b-ab-1)ab$ $\quad -2a(a^2-a-1)(-a^2)$ $\quad (x^2a-ax+2)(2x^2a^3)$

193 $\frac{3}{4}x^2y\cdot\left(2xy+\frac{1}{3}x^3y^2\right)$ $\quad \left(\frac{a^4}{4}+\frac{a^3}{8}+\frac{a^2}{2}\right)(2a^2)$

194 $\left(\frac{1}{2}a-3+a^2\right)\left(-\frac{1}{2}a\right)$ $\quad \left(5x+3xy+\frac{1}{2}y^2\right)(3x^2y)$

195 $\left(\frac{2}{3}xy^2+\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}xy\right)(6xy)$ $\quad -y^2\left(2x-\frac{1}{3}y\right)(6x^2y-3xy)$

196 $(x+2)(1-3xy^2)\left(\frac{1}{3}x+1\right)$ $\quad \left(\frac{7}{3}-b\right)\left(a-\frac{1}{2}b+1\right)(3a-2b-1)$

Svolgi le seguenti divisioni tra polinomi e monomi:

197 $(2x^2y+8xy^2):(2xy)$ $\quad (6x^5y^4+3x^3y^6):(3x^2y^4)$

198 $(a^2+a):a$ $\quad (a^2-a):(-a)$

199 $\left(\frac{1}{2}a-\frac{1}{4}\right):\frac{1}{2}$ $\quad \left(\frac{1}{2}a-\frac{1}{4}\right):2$

200 $(2a-2):\frac{1}{2}$ $\quad \left(\frac{1}{2}a-\frac{a^2}{4}\right):\frac{a}{2}$

201 $(a^2-a):a$ $\quad (a^3+a^2-a):a$

202 $(8a^3+4a^2-2a):2a$ $\quad (a^3b^2+a^2b-ab):b$

203 $(a^3b^2-a^2b^3-ab^4):(-ab^2)$ $\quad (a^3b^2+a^2b-ab):ab$

204 $(16x^4-12x^3+24x^2):(4x^2)$ $\quad (-x^3+3x^2-10x+5):(-5)$

205 $\left[(-3a^2b^3-2a^2b^2+6a^3b^2):(-3ab)\right]\cdot\left(\frac{1}{2}b^2\right)$ $\quad \left(\frac{4}{3}a^2b^3-\frac{3}{4}a^3b^2\right):\left(-\frac{3}{2}a^2b^2\right)$

206 $\left(2a+\frac{a^2}{2}-\frac{a^3}{4}\right):\left(\frac{a}{2}\right)$ $\quad \left(\frac{1}{2}a-\frac{a^2}{4}-\frac{a^3}{8}\right):\left(\frac{1}{2}a\right)$

207 $(a^3b^2-a^4b+a^2b^3):(a^2b)$ $\quad (a^2-a^4+a^3):(a^2)$

Esegui i seguenti prodotti di polinomi

208 $\left(-4x+\frac{1}{2}x^3\right)\left(2x^2-3x+\frac{1}{2}\right)$ $\quad \left(\frac{1}{2}a^2b-2ab^2+\frac{3}{4}a^3b\right)\cdot\left(\frac{1}{2}ab\right)$

209 $(x^3-x^2+x-1)(x.-1)$ $\quad (3x^3+2x^2+x+1)(1-x)$

210 $(a^2+2ab+b^2)(a+b)$ $\quad (a-1)(a-2)(a-3)$

211 $(a+1)(2a-1)(3a-1)$ $\quad (a+1)(a^2+a)(a^3-a^2)$

Espressioni con i polinomi

212 $(-a-1-2)-(-3-a+a)$ R. $[-a]$

213 $(2a^2-3b)-[(4b+3a^2)-(a^2-2b)]$ R. $[-9b]$

214 $(2a^2-5b)-[(2b+4a^2)-(2a^2-2b)]-9b$ R. $[-18b]$

215 $\left(\frac{1}{3}x-1\right)(3x+1)-2x\left(\frac{5}{4}x-\frac{1}{2}\right)(x+1)-\frac{1}{2}x\left(x-\frac{2}{3}\right)$

216 $(b^3-b)(x-b)+(x+b)(ab^2-a)+(b+a)(ab-ab^3)+2ab(b-b^3)$

217 $ab(a^2-b^2)+2b(x^2-a^2)(a-b)-2bx^2(a-b)$

218 $\left(\frac{3}{2}x^2y-\frac{1}{2}xy\right)\left(2x-\frac{1}{3}y\right)4x$

219 $\left(\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}a^2\right)(1-a)[a^2+2a-(a^2+a+1)]$

220 $(1-3x)(1-3x)-(-3x)^2+5(x+1)-3(x+1)-7$

221 $3\left(x-\frac{1}{3}y\right)\left[2x+\frac{1}{3}y-(x-2y)\right]-2\left(x-\frac{1}{3}y+2\right)(2x+3y)$

222 $\frac{1}{24}(29x+7)-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}(x-3)(x-3)-2-\left[\frac{1}{3}-\frac{3}{2}\left(\frac{3}{4}x+\frac{2}{3}\right)\right]$

223 $-\frac{1}{4}(2abx+2a^2b^2+3ax)+a^2(b^2+x^2)-\left[\left(\frac{1}{3}ax\right)^2-\left(\frac{2}{3}bx\right)^2\right]$

224 $3a\left[2(a-2ab)+3a\left(\frac{1}{2}-3b\right)-\frac{1}{2}a(3-5b)\right]$ R. $\left[6a^2-\frac{63}{2}a^2b\right]$

225 $2(x-1)(3x+1)-(6x^2+3x+1)+2x(x-1)$ R. $[2x^2-9x-3]$

226 $\left(a-\frac{1}{2}b\right)a^3-\left(\frac{1}{3}ab-1\right)[2a^2(a-b)-a(a^2-2ab)]$ R. $\left[a^4-\frac{1}{2}a^3b-\frac{1}{3}a^4b+a^3\right]$

227 $(3x^2+6xy-4y^2)\left(\frac{1}{2}xy-\frac{2}{3}y^2\right)$ R. $\left[\frac{3}{2}x^3y+x^2y^2-6xy^3+\frac{8}{3}y^4\right]$

228 $\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y-\frac{3}{5}\right)\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}y+\frac{3}{5}\right)-\left[\left(\frac{1}{3}x\right)^2-\left(\frac{1}{2}y\right)^2\right]$

229 $\left(\frac{1}{2}x-1\right)\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+1\right)+\left(-\frac{1}{2}x\right)^3+2\left(\frac{1}{2}x+1\right)$

230 $(3a-2)(3a+2)-(a-1)(2a-2)+a(a-1)(a^2+a+1)$

231 $-4x(5-2x)+(1-4x+x^2)(1-4x-x^2)$

232 $-(2x-1)(2x-1)+[x^2-(1+x^2)]^2-(x^2-1)(x^2+1)$

233 $4(x+1)-3x(1-x)-(x+1)(x-1)-(4+2x^2)$

234 $\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1}{4}(x+1)(x-1)-(x^2-1)$

235 $(3x+1)\left(\frac{5}{2}+x\right)-(2x-1)(2x+1)(x-2)+2x^3$

236 $\frac{1}{2}x\left[(x-y^2)\left(x^2+\frac{1}{2}y\right)-5x\left(-\frac{1}{10}xy\right)(4y)\right]-\frac{1}{2}x\left(x^3y+\frac{1}{2}xy^2\right)-\frac{1}{2}x^2\left(x^2+\frac{1}{2}y+xy^2\right)+\frac{1}{4}xy(y^2+2x^3+xy)$ R.0

237 $(2a-3b)\left(\frac{5}{4}a^2+\frac{1}{2}ab-\frac{1}{6}b^2\right)-\frac{1}{6}a\left(12a^2-\frac{18}{5}b^2\right)+\frac{1}{3}(-b)^3-\frac{1}{2}a\left(a^2-\frac{11}{2}ab\right)$ *R.* $\frac{1}{6}b^3$

238 $\left(\frac{2}{3}a-2b\right)\left(\frac{3}{2}a+2b\right)\left(\frac{9}{4}a^2+4b^2\right)-\frac{3}{4}\left(\frac{9}{4}a^2\right)-a^2\left(\frac{9}{4}a^2-5b^2\right)+5ab\left(\frac{3}{4}a^2+\frac{4}{3}b^2\right)$ *R.* $-16b^4-\frac{27}{16}a^2$

239

240 $\left(\frac{1}{2}x+2y\right)\left(\frac{1}{2}x-2y\right)\left(\frac{1}{4}x^2-4y^2\right)-\frac{1}{4}x\left(\frac{27}{4}x^3-\frac{61}{3}xy^2\right)-16(y^4+x^4)-\frac{37}{12}x^2y^2+\frac{141}{8}x^4$ R.0

241 $x\left(\frac{2}{3}y^2-\frac{27}{8}x^2\right)-\left[-\left(\frac{3}{2}x-\frac{2}{3}y\right)\left(\frac{9}{4}x^2+xy+\frac{4}{3}y^2\right)+\frac{2}{3}x^2\left(\frac{9}{4}y^2+\frac{1}{3}y\right)\right]+$
$+\frac{2}{9}y\left(x^2+4y^2-9xy\right)$ R. $\left[-\frac{3}{2}x^2y^2\right]$

242 $\frac{1}{3}xy\left[\left(x-y^2\right)\left(x^2-\frac{1}{2}y\right)-3x\left(-\frac{1}{9}xy\right)(3y)\right]-\frac{1}{3}x\left(x^3y+\frac{1}{4}xy^2\right)$ R. $\left[\frac{1}{6}xy^4-\frac{1}{4}x^2y^2\right]$

243 $\left(\frac{1}{2}ab+\frac{2}{3}xy\right)\left(\frac{1}{2}ab-\frac{2}{3}xy\right)-\left[\left(\frac{1}{2}ab\right)^2-\left(\frac{2}{3}xy\right)^2\right]\left(\frac{1}{2}ax\right)+\frac{3}{2}ax\left(\frac{2}{3}a-\frac{2}{3}y\right)+$
$-x\left(\frac{1}{2}ax+\frac{3}{4}xy\right)-\frac{2}{9}x^2y^2(ax-2)+\frac{1}{4}a^2b^2\left(\frac{1}{2}ax-1\right)+\frac{3}{4}x^2\left(y+\frac{2}{3}a\right)$ R. a^2x-axy

244 $\frac{1}{6}ab-\frac{1}{3}a^2-\left\{\frac{3}{4}ab+\frac{1}{2}a\left[\frac{3}{2}b-\left(\frac{1}{6}a-\frac{4}{5}a\cdot\frac{25}{3}a\right)\left(-\frac{2}{3}ab\right)-\left(-\frac{8}{3}ab\right)\left(-\frac{9}{8}b\right)\right]\right\}+$
$+\frac{1}{3}a\left(a-5b-9a^3b+\frac{1}{6}a^2b\right)$ R. $\left[\frac{17}{36}a^4b\right]$

245 $\frac{1}{5}x^2+\left\{\left[2x-\left(\frac{3}{2}x^2y-\frac{7}{4}xy+\frac{1}{8}y^3\right):\left(-\frac{1}{2}y\right)\right]\cdot 2x-\frac{7}{10}xy\right\}\left(-\frac{1}{6}x^2\right)+$
$+x^2y-\frac{1}{3}x\left(\frac{3}{5}x\right)-x^2\left(y-x^3-\frac{1}{12}xy^2\right)$ R. $\left[\frac{1}{2}x^4+\frac{7}{60}x^3y\right]$

Operazioni tra polinomi con esponenti letterali

246 $\left(a^{n+1}-a^{n+2}+a^{n+3}\right):\left(a^{1+n}\right)$ R. $\left[1-a+a^2\right]$

247 $\left(1+a^{n+1}\right)\left(1-a^{n-1}\right)$ R. $1+a^{n-1}+a^{n+1}-a^{2n}$

248 $\left(16a^{n+1}b^{n+2}-2a^{2n}b^{n+3}+5a^{n+2}b^{n+1}\right):\left(2a^nb^n\right)$ R. $\left(6a^{3n+1}-6a^{2n}\right):\left(-6a^n\right)$

249 $\left(a^{n+1}-a^{n+2}+a^{n+3}\right)\left(a^{n+1}-a^n\right)$ R. $\left[a^{4n+4}-2a^{2n+3}+2a^{2n+2}-a^{2n+1}\right]$

250 $\left(a^n-a^{n+1}+a^{n+2}\right)\left(a^{n+1}-a^{n-1}\right)$ R. $\left[a^{2n+3}-a^{2n+2}-a^{2n-1}+a^{2n}\right]$

251 $\left(a^n+a^{n+1}+a^{n+2}\right)\left(a^{n+1}-a^n\right)$ R. $\left[-a^{2n}+a^{2n+3}\right]$

252 $\left(a^{n+2}+a^{n+1}\right)\left(a^{n+1}+a^{n+2}\right)$ R. $\left[a^{2n+4}+2a^{2n+3}+a^{2n+2}\right]$

253 $\left(1+a^{n+1}\right)\left(a^{n+1}-2\right)$ R. $\left[a^{2n+2}-a^{n+1}-2\right]$

254 $\left(a^{n+1}-a^n\right)\left(a^{n+1}+a^n\right)\left(a^{2n+2}+a^{2n}\right)$ R. $\left[a^{4n+4}-a^{4n}\right]$

255 $\left(\frac{1}{2}x^n-\frac{3}{2}x^{2n}\right)\left(\frac{1}{3}x^n-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{3}x^n-1\right)\left(x^n+x\right)$ R. $\left[\frac{7}{12}x^{2n}+\frac{3}{4}x^n-\frac{1}{2}x^{3n}-\frac{1}{3}x^{n+1}+x\right]$

Rispondi alle seguenti domande

256 Se si raddoppiano i lati di un rettangolo, come varia il suo perimetro?

257 Se si raddoppiano i lati di un triangolo rettangolo, come varia la sua area?

258 Se si raddoppiano gli spigoli a, b, e c di un parallelepipedo, come varia il suo volume?

259 Come varia l'area di un cerchio se si triplica il suo raggio?

260 Determinare l'area di un rettangolo avente come dimensioni $\frac{1}{2}a$ e $\frac{3}{4}a^2b$.

261 Determinare la superficie laterale di un cilindro avente raggio di base x^2y e altezza $\frac{1}{5}xy^2$.

►7. Prodotti notevoli

Con l'espressione prodotti notevoli si indicano alcune identità che si ottengono in seguito alla moltiplicazione di polinomi aventi caratteristiche particolari facili da ricordare.

Quadrato di un binomio

Consideriamo il binomio A+B in cui A e B rappresentano due monomi ed analizziamo che cosa succede **moltiplicando il binomio per se stesso**, eseguendo cioè la moltiplicazione $(A+B)(A+B)$ che sotto forma di potenza si scrive $(A+B)^2$.

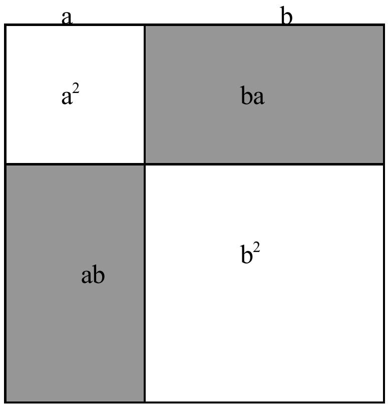
$(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2=A^2+2AB+B^2$

Pertanto, senza effettuare i passaggi intermedi si ha

$$(1) \qquad \boxed{(A+B)^2=A^2+2AB+B^2}$$

Espressa nel linguaggio comune: **il quadrato di un binomio è uguale alla somma tra il quadrato del primo termine, il quadrato del secondo termine e il doppio prodotto del primo termine per il secondo.**
Analizzando il prodotto ottenuto si può notare che è costituito da tre termini ed in particolare due termini sono costituiti dal prodotto di ciascun monomio per se stesso, un termine è costituito dal prodotto dei due monomi moltiplicato a sua volta per 2.
Nella identità precedente, A e B rappresentano due monomi qualsiasi, quindi la scrittura $A+B$ deve intendersi come somma algebrica di due monomi che, rispetto al segno, possono essere concordi o discordi.
Ne consegue che:

- ✓ A^2 e B^2 sono sempre positivi perché prodotto di fattori uguali e quindi concordi.
- ✓ 2AB è positivo se A e B sono concordi, negativo se sono discordi.



È possibile dare anche un'interpretazione geometrica della formula $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ sostituendo A e B rispettivamente con le misure a e b di due segmenti.
Prendiamo due segmenti di lunghezza *a* e *b*, portiamo a coincidere il secondo estremo del segmento lungo *a* con il primo estremo del segmento di lunghezza *b*: in questo modo otteniamo un segmento di lunghezza $a+b$.
Costruiamo il quadrato di lato $a+b$, il quale avrà area $(a+b)^2$, e dividiamolo come nella figura a fianco.
Puoi notare che il quadrato di lato $a+b$ è composto da due quadrati di area rispettivamente a^2 e b^2 e da due rettangoli di area *ab*. Di conseguenza l'area del quadrato è uguale a: $(a+b)^2=a^2+b^2+ab+ab=a^2+b^2+2ab$.

262 $(3x + y)^2 = (3x)^2 + 2(3x)(y) + (y)^2 = \dots\dots ...$

263 $(-2x + 3y)^2 = (-2x)^2 + 2(-2x)(3y) +(3y)^2 = \dots\dots\dots$

264 $(-3x -5y)^2 = (-3x)^2 + 2(-3x)(-5x)+(-5x)^2 = \dots\dots\dots$

265 $(3x - y)^2 = (3x)^2 +2(3x)(-) + (- y)^2 = \dots\dots\dots$

266 $(2x+3y)^2=(2x)^2+2\cdot(2x)(3y)+(3y)^2=\dots\dots\dots$

267 $\left(x^2-\frac{1}{2}y\right)^2=(x^2)^{\dots}+2\cdot(\dots\dots)(-\dots\dots)+\left(-\frac{1}{2}y\right)^{\dots}=\dots\dots\dots$

Riconosci quali dei seguenti polinomi sono quadrati di binomi

268 $a^2+4ab+4b^2$ SI NO $\qquad a^2-2ab-b^2$ SI NO

269 $25a^2-15ab+3b$ SI NO $\qquad a^6+b^4+2a^3b^2$ SI NO

270 $25a^2+4b^2-20ab^2$ SI NO $\qquad \frac{49}{4}a^4-21a^2b^2+9b^2$ SI NO

271 $-25a^4-\frac{1}{16}b^4+\frac{5}{2}a^2b^2$ SI NO $\qquad \frac{1}{4}a^6+\frac{1}{9}b^4+\frac{1}{6}a^3b^2$ SI NO

Completa in modo da formare un quadrato di binomio

272 $\frac{9}{16}x^2+\dots\dots+y^2$ $\qquad x^2 + 2x + \dots..$ $\qquad 4x^2y^2 – 2xyz \dots.......$

273 $\frac{a^4}{4} - .... + 4b^4$ 9+6x+ … 1-x+.......

274 $x^2+4y^2-...$ $4x^2-4xy+...$ $4x^2-20x+...$

Sviluppa i seguenti quadrati di binomi

275 $(x+1)^2$ $(x+2)^2$ $(x-3)^2$ $(2x-1)^2$

276 $(x+y)^2$ $(x-y)^2$ $(2x+y)^2$ $(x+2y)^2$

277 $(-a+b)^2$ $(-a-1)^2$ $(-a+3)^2$ $(-a+2b)^2$

278 $(2a+3b)^2$ $(2a-3b)^2$ $(3a+2b)^2$ $(-2+3b)^2$

279 $\left(\frac{1}{2}a+\frac{3}{4}b\right)^2$ $\left(-2x^2-\frac{7}{4}y\right)^2$ $\left(5x^3-\frac{4}{3}y^2\right)^2$ $\left(-1+\frac{3}{2}a^2x\right)^2$

280 $\left(3a-\frac{1}{3}a^2\right)^2$ $\left(-2-\frac{1}{2}x\right)^2$ $(x+1)^2$ $(a^2+a)^2$

281 $\left(\frac{3}{2}x^2-2x\right)^2$ $\left(x^2-\frac{1}{2}x\right)^2$ $\left(\frac{1}{2}a^2-b^2\right)^2$ $\left(-\frac{2}{3}x-\frac{3}{5}x^2\right)^2$

282 $\left(x^{2n}-\frac{1}{2}x^n\right)^2$ $(x^{n+1}+x^n)^2$ $\left(-2^2-\frac{1}{2}x^n\right)^2$ $\left(-2x^{2n}-\frac{1}{4}y^m\right)^2$

Semplifica la seguenti espressioni con i quadrati di binomi

283 $(x-2y)^2-(2x-y)^2$ R. $[3y^2-3x^2]$

284 $3(x-y)^2-2(x+2y)^2$ R. $[x^2-14xy-5y^2]$

285 $3(2x+5)^2-4(2x+5)(2x-5)+10(2x-5)^2$

286 $(x^2+1)^2-6(x^2+1)+8$

287 $\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-2\left(x-\frac{1}{2}\right)$

288 $\frac{1}{2}x(y-1)^2-\frac{3}{2}y(x+1)^2+\frac{1}{2}xy(3x-y+8)$ R. $\left[\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}y\right]$

289 $\left(3x-\frac{1}{2}y\right)^2-\left(\frac{1}{2}x+y\right)^2+3x(2-y)^2-3y^2\left(x-\frac{1}{4}\right)+4x(4y-3)$ R. $\left[\frac{35}{4}x^2\right]$

290 $(x-1)^2-(2x+3)^2$ R. $[-3x^2-14x-8]$

291 $\frac{1}{2}\left(2x+\frac{1}{2}\right)^2-2\left(2x-\frac{1}{2}\right)^2$ R. $\left[-6x^2+5x-\frac{3}{8}\right]$

292 $(2a+b)^2(a-b)^2-2(3-b)^2(3+b)^2-(6b+2a^2)^2+a^2b[4a+3(b+8)]$ R. $[2ab^3-b^4-162]$

293 $\left(\frac{3}{2}x^2-2x\right)^2+\left(x^2-\frac{1}{2}x\right)^2-\left(\frac{3}{2}x^2-2x\right)\left(x^2-\frac{1}{2}x\right)$

294 $(x+1)^2+(x-2)^2+\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-2x\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$

Quadrato di un polinomio

Si consideri il trinomio $A+B+C$, il suo quadrato sarà dato da:

$$(A+B+C)^2=(A+B+C)\cdot(A+B+C)=A^2+AB+AC+BA+B^2+BC+CA+CB+C^2=$$
$$=A^2+B^2+C^2+2AB+2AC+2BC$$

Pertanto, senza effettuare i passaggi intermedi si può scrivere

(2) $$(A+B+C)^2=A^2+B^2+C^2+2AB+2AC+2BC$$

In generale, **il quadrato di un polinomio è uguale alla somma dei quadrati dei monomi che lo compongono e dei doppi prodotti di ogni termine per ciascuno dei successivi**.

Nel caso di un polinomio composto da quattro monomi si ha:

$$(x+y+z+t)^2=x^2+y^2+z^2+t^2+2xy+2xz+2xt+2yz+2yt+2zt$$

Completa i seguenti quadrati

295 $(x+3y-1)^2=x^2+\ldots\ldots+1+6xy-2x-6y$

296 $\left(x^2-\frac{1}{2}y+1\right)^2=x^4+\frac{1}{4}y^2+\ldots\ldots-x^2y+\ldots\ldots-y$

297 $\left(2x^2-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)^2=\ldots\ldots+\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}-2x^{\cdots}+2x^{\cdots}-\frac{\ldots}{\ldots}\ldots$

Sviluppa i seguenti quadrati di polinomi

298 $(a+b-c)^2$ $\quad(a-b+c)^2$

299 $(x^2+x+1)^2$ $\quad(x-x^2+1)^2$

300 $(3x^2+2z-y^2)^2$ $\quad(-a+b-c)^2$

301 $(6a-3y^3-2z^2)^2$ $\quad(1-x-x^2)^2$

302 $\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{4}{5}x^2-\frac{1}{4}x\right)^2$ $\quad\left(3x^3+\frac{1}{2}y^2-\frac{3}{4}\right)^2$

303 $(-2ba+4-6ab^2+5b^2)^2$ $\quad(2ab+3-4a^2b^2-2b^3)^2$

304 $\left(5a^3-\frac{1}{2}ab-1-a\right)^2$ $\quad\left(\frac{1}{2}x+2y^2-3\right)^2$

305 $\left(\frac{2}{3}y^2-3x^4+\frac{7}{4}z\right)^2$ $\quad\left(2a+\frac{1}{2}ab^2-3\text{b}\right)^2$

306 $\left(2x^3y^2-y^2x+5x^2+\frac{1}{2}\right)^2$ $\quad\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{4}x^2x-2xy+\frac{3}{8}y\right)^2$

307 $\left(\frac{2}{3}y^2-3x^2+\frac{3}{4}xy\right)^2$ $\quad\left(a-b+\frac{1}{2}\right)^2$

308 $(x+y-1)^2-(x-y+1)^2$ R. $[4xy-4x]$

309 $(2a+b-x)^2+(2x-b-a)^2-5(x+a+b)^2+b(4a+3b)$ R. $[-18ax-16bx]$

310 $(x^2+x+1)^2-(x+1)^2$ R. $[x^4+2x^3+2x^2]$

311 $(a+b+1)^2-(a-b-1)^2$ R. $[4ab+4a]$

312 $(a-3b+1)^2-(a-3b)^2-(3b-1)^2+(a-3b)(a+3b-1)$

313 $\left(\frac{1}{2}a^2-b^2\right)^2+\left(a-b+\frac{1}{2}\right)^2-\left(a+b-\frac{1}{2}\right)^2$

314 $(a+b-1)^2-(a+b)^2-(a-1)^2-(b-1)^2$

Prodotto della somma fra due monomi per la loro differenza

Si consideri il seguente prodotto:

$(A+B)(A-B)=A^2-AB+AB-B^2=A^2-B^2$

Pertanto, quando eseguiamo il prodotto tra due binomi che hanno due termini uguali e due termini opposti i prodotti incrociati si annullano e rimangono i due prodotti del termine uguale per se stesso e dei due termini opposti, il primo prodotto risulterà sempre positivo, il secondo prodotto risulterà sempre negativo. Senza eseguire i passaggi intermedi si ha

(3) $\boxed{(A+B)(A-B)=A^2-B^2}$

In generale, **il prodotto tra due binomi che hanno due termini uguali e due termini opposti si ottiene semplicemente moltiplicando tra di loro i due termini uguali e i due termini opposti.**.

Esempi

■ $(3a^2+5ab)\cdot(3a^2-5ab)$

Moltiplichiamo $3a^2$ per se stesso e $(+5ab)(-5ab)$, otteniamo $9a^2-25a^2b^2$

■ $\left(-\frac{1}{4}x^2+b\right)\cdot\left(+\frac{1}{4}x^2+b\right)$

Osserviamo che il monomio che cambia di segno è $\frac{1}{4}x^2$, nella forma generale (3) occorre porre $A=b$; $B=\frac{1}{4}x^2$. Il risultato è quindi $A^2-B^2=b^2-\frac{1}{16}x^4$.

■ Senza utilizzare la calcolatrice, calcola mentalmente il prodotto $28\cdot 32$.

Svolgimento $28\cdot 32=(30-2)(30+2)=900-4=896$

Senza utilizzare la calcolatrice, calcolare mentalmente i seguenti prodotti:

315 $18\cdot 22$ $15\cdot 25$ $43\cdot 37$ $195\cdot 205$

Esegui i seguenti prodotti applicando la regola $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$

316 $(x-1)(x+1)$ $(a+1)(a-1)$

317 $(b-2)(b+2)$ $(2a+b)(2a-b)$

318 $(a+2b)(a-2b)$ $(2a+3b)(2a-3b)$

319 $\left(l+\frac{1}{2}m\right)\left(l-\frac{1}{2}m\right)$ $\left(\frac{1}{2}u+v\right)\left(\frac{1}{2}u-v\right)$

320 $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$ $(3a-5y)(-3a-5y)$

321 $\left(\frac{2}{3}x+\frac{3}{2}y\right)\left(\frac{2}{3}x-\frac{3}{2}y\right)$ $\left(-\frac{2}{5}x-\frac{3}{7}y\right)\left(-\frac{2}{5}x+\frac{3}{7}y\right)$

322 $\left(x^2+\frac{1}{2}z\right)\left(x^2-\frac{1}{2}z\right)$ $\left(\frac{2}{3}x^2+3y^2\right)\left(-\frac{2}{3}x^2+3y^2\right)$

323 $\left(\frac{2}{3}a^3+\frac{1}{2}y^3\right)\left(-\frac{2}{3}a^3+\frac{1}{2}y^3\right)$ $\left(-2a^3-\frac{7}{3}y\right)\left(-2a^3+\frac{7}{3}y\right)$

324 $\left(5x^2-\frac{6}{5}y^3\right)\left(5x^2+\frac{6}{5}y^3\right)$ $\left(a^5+\frac{1}{2}y^4\right)\left(a^5-\frac{1}{2}y^4\right)$

325 $\left(-\frac{8}{3}x^4-\frac{1}{2}x^3\right)\left(\frac{8}{3}x^4-\frac{1}{2}x^3\right)$ $\left(2x^5+\frac{3}{2}y^5\right)\left(2x^5-\frac{3}{2}y^5\right)$

326 $\left(-x-\frac{1}{2}\right)\left(-x+\frac{1}{2}\right)$ $\left(-x-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}+x\right)$

327 $\left(-\frac{2}{3}x-\frac{3}{5}x^2\right)\left(\frac{2}{3}x-\frac{3}{5}x^2\right)$ $\left(-\frac{2}{3}x-\frac{3}{5}x^2\right)\left(\frac{3}{5}x^2-\frac{2}{3}x\right)$

328 $\left(\frac{2}{3}x-\frac{3}{5}x^2\right)\left(-\frac{2}{3}x-\frac{3}{5}x^2\right)$ $\left(\frac{2}{3}x+\frac{3}{5}x^2\right)\left(\frac{2}{3}x-\frac{3}{5}x^2\right)$

Esempi

■ $(2x+1-y)(2x+1+y)$

Possiamo riscrivere il prodotto nella forma $(\underbrace{(2x+1)}_{A}-\underbrace{y}_{B})(\underbrace{(2x+1)}_{A}+\underbrace{y}_{B})=\underbrace{(2x+1)^2}_{A^2}-\underbrace{y^2}_{B^2}=4x^2+4x+1-y^2$

Applica la regola della somma per differenza ai seguenti casi

329 $(2a+b-1)(2a+b-1)$

330 $(3x-b+c)(3x+b-c)$

331 $[(2x+y)+(3y-1)][(2x+y)-(3y-1)]$

332 $(ab-2b-a)(-ab+2b-a)$ R. $[a^2-a^2b^2+4ab^2-4b^2]$

333 $\left(\frac{1}{2}a+1+b+ab\right)\left(\frac{1}{2}a+1-b-ab\right)$ R. $\left[-a^2b^2+\frac{1}{4}a^2-2ab^2+a-b^2+1\right]$

334 $\left(a-\frac{2}{5}b+\frac{1}{5}ab\right)\left(\frac{1}{2}a-\frac{2}{5}-5ab\right)$

335 $(3x-y-1)(3x+y-1)$ R. $[9x^2-6x-y^2+1]$

Semplifica le seguenti espressioni con prodotti notevoli

336 $(a+b)(a-b)-(a+b)^2$ R. $[-2ab-2b^2]$

337 $[(x-1)(1+x)]^2$ R. $[x^4-2x^2+1]$

338 $\left(\frac{2}{3}a-b\right)\left(\frac{2}{3}a+b\right)-\frac{2}{3}(a-b)^2+2\left(\frac{1}{3}a\right)^2$ R. $\left[\frac{4}{9}ab-\frac{5}{3}b^2\right]$

339 $\left(2x-\frac{1}{2}y\right)\left(\frac{1}{2}y+2x\right)+\left(5x-\frac{1}{5}\right)\left(5x+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-5x\right)\left(5x+\frac{1}{5}\right)-\left(2x+\frac{1}{2}y\right)\left(\frac{1}{2}y-2x\right)$ R. $[0]$

340 $\left(\frac{2}{3}a-b\right)\left(\frac{2}{3}a+b\right)\left(b^2+\frac{4}{9}a^2\right)$ R. $\left[\frac{16}{81}a^4-b^4\right]$

341 $\left(-\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}y\right)\left(\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}y\right)+\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(-x-\frac{1}{2}\right)+2x\left(x-\frac{1}{4}\right)^2$ R. $\frac{7}{4}b^2$

342 $(a+b-1)^2+(a-b)^2+\left(a-\frac{1}{2}b\right)\left(a+\frac{1}{2}b\right)+2a\left(a-\frac{1}{2}\right)-a(5a+3)-(2b-1)$

343 $(x^2+2x)\left(\frac{1}{2}x+1\right)+\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2-\left(\frac{1}{2}x+1\right)\left(-\frac{1}{2}x+1\right)-\frac{1}{2}x^2(x+5)$ R. 1

Cubo di un binomio

Si consideri il binomio $A+B$, il suo cubo sarà dato da:

$(A+B)^3=(A+B)^2(A+B)=(A^2+2AB+B^2)(A+B)$

$(A+B)^3=(A+B)^2(A+B)=(A^2+2AB+B^2)(A+B)=A^3+A^2B+2A^2B+2AB^2+AB^2+B^3=$

$=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$

Pertanto, senza eseguire i passaggi intermedi si ha

(4) $(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$

In generale, **il cubo di un binomio è uguale alla somma tra il cubo del primo monomio, il triplo prodotto del quadrato del primo monomio per il secondo, il triplo prodotto del quadrato del secondo monomio per il primo e il cubo del secondo monomio**.

Essendo $(A-B)^3=[A+(-B)]^3$, il cubo della differenza di due monomi si ottiene facilmente dal cubo della somma, quindi $(A-B)^3=A^3-3A^2B+3AB^2-B^3$

Riconosci quali dei seguenti polinomi sono cubi di binomi

344 $-a^3-3a^2b+3ab^2+b^3$ SI NO

345 $a^9-6a^4b-12a^2b^2-8b^3$ SI NO

346 $8a^9-b^3-6b^2a^3+12a^6b$ SI NO

347 $\frac{1}{27}a^6-8b^3+4a^2b^2-\frac{2}{3}a^4b$ SI NO

Sviluppa i seguenti cubi di binomio

348 $(2a+b^2)^3=(2a)^3+3\cdot(2a)^2\cdot b^2+3(2a)\cdot(b^2)^2+(b^2)^3=$……………………………

349 $(x-2y)^3=x^{\cdots}-6x^{\cdots}y+12xy^{\cdots}-\ldots y^{\cdots}$

350 $(x+y)^3$ $(x-y)^3$ $(-x+y)^3$

351 $(a+2)^3$ $(a+1)^3$ $(a-1)^3$

352 $(x+2y)^3$ $(y-2x)^3$ $(2x+y)^3$

353 $(x^2y-3)^3$ $(xy-1)^3$ $(x^2-2y)^3$

354 $\left(\frac{1}{2}a+b\right)^3$ $\left(a-\frac{2}{3}b\right)^3$ $\left(\frac{1}{2}a-\frac{2}{3}b\right)^3$

355 $(a-3)^3$ $(x+3)^3$ $\left(\frac{1}{2}a^2-\frac{3}{2}a\right)^3$

356 $\left(\frac{2}{3}x-1\right)^3$ $\left(x-\frac{1}{3}\right)^3$ $\left(\frac{1}{2}xy-2x\right)^3$

357 $\left(\frac{2}{5}x^2y-5yx^2a\right)^3$ $\left(\frac{1}{2}x^2+1\right)^3$ $\left(\frac{3}{4}a^2b^3c^2-\frac{1}{3}a^2bc^2\right)^3$

358 $\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}xy^2z^3\right)^3$ $(x^2-y^2)^3$ $\left(-3xy^2+\frac{3}{2}zx^2\right)^3$

359 $\left(2x^2z+\frac{2}{3}y^2z^3x\right)^3$ $-\left(\frac{1}{2}x^2-1\right)^3$ $\left(\frac{1}{4}ab^2c-4a^2b\right)^3$

360 $(a+b)^2+(a+b)(a-b)+(a+b)^3-a^3-b^3-a^2-b^2-ab$

Potenza n-esima di un binomio

Finora abbiamo calcolato le potenze del binomio $a+b$ fino all'ordine tre, in questo paragrafo ci si propone di fornire un criterio che permetta di calcolare la potenza $(a+b)^n$, con $n \in \mathbb{N}$. Osserviamo le potenze ottenute:

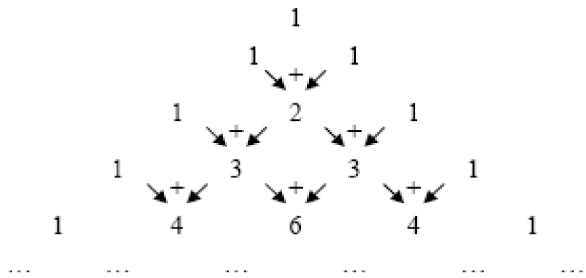
$$(a+b)^0=1$$
$$(a+b)^1=a+b$$
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

Si può notare che:

- lo sviluppo di ciascuna potenza dà origine a un polinomio omogeneo dello stesso grado dell'esponente della potenza, completo e ordinato secondo le potenze decrescenti di a e crescenti di b;
- il primo coefficiente è sempre uguale a 1;
- i coefficienti di ciascuna riga si ottengono utilizzando una disposizione dei numeri a triangolo, detto ***triangolo di Tartaglia***.

1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

In questo triangolo i numeri di ciascuna riga (tranne il primo e l'ultimo che sono uguali a 1) sono la somma dei due soprastanti della riga precedente. Nella figura che segue evidenziamo come costruire il triangolo:



Con questa semplice regola si hanno gli sviluppi:

- $(a+b)^0=1$
- $(a+b)^1=a+b$
- $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
- $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
- $(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$
- $(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

Sviluppa le seguenti potenze di binomio

361 $(2a-b^2)^4=(2a)^4+4\cdot(2a)^3\cdot(-b^2)+6(2a)^2\cdot(-b^2)^2+\ldots(2a)\cdot(-b^2)^{\cdots}+(-b^2)^{\cdots}$

362 $(a+1)^5$ $\qquad$ $(x-1)^6$

363 $(1-y)^7$ $\qquad$ $(a+2)^5$

364 $(a-2)^6$ $\qquad$ $(2a-1)^2$

365 $(3x^2a-a^2)^5$ $\qquad$ $(2x^2-1)^6$

366 $\left(a-\frac{1}{2}\right)^4$ $\qquad$ $\left(\frac{1}{2}a-1\right)^4$

367 $\left(2-\frac{1}{2}a\right)^5$ $\qquad$ $\left(\frac{1}{3}-2x\right)^5$

368 Trova la regola generale per calcolare il cubo del trinomio $(A+B+C)^3$

►8. Espressioni con i prodotti notevoli

369 $[a+2(b-c)][a-2(b-c)]+4b(b-2x)$ R. $[a^2-4c^2]$

370 $[(a-2b)^2-a^3][-a^3-(a-2b)]+a^2(a^2-8ab+24b^2-a^4)$ R. $[+32ab^3-16b^4]$

371 $[(x+2y)^2-(x^2-2y)^2][(x+2y)^2+(x^2-2y)^2]$

372 $x(x-1)^2+(x+1)(x-1)-x(x+1)(x-3)-(x+2)^2$ R. $[-5]$

373 $(x+1)^2-(x-1)^2$ R. $[4x]$

374 $(x+1)^3-(x-1)^3-6x$ R. $[2x^3]$

375 $(x+1)^2+(x-2)^2-(x-1)^2-(x+1)(x-1)$ R. $[5]$

376 $(x+2)(x-2)+(x+2)^2$ R. $[2x^2-4x]$

377 $(x+1)^3-(x-1)(x^2+x+1)+3x(x-1)$ R. $[0]$

378 $(x+1)(x-1)+(x+1)^2+(x-1)^2$ R. $[x^3-x^2+5x-1]$

379 $(x+y+1)(x+y-1)+(x+y)^2-2(x+y)(x-y)-(2y-1)(2y+1)$ R. $[4xy]$

380 $\left(\frac{1}{2}a+\frac{2}{3}-3b+\frac{1}{3}ab\right)\left(\frac{1}{2}a-\frac{2}{3}-3b-\frac{1}{3}ab\right)+\frac{1}{9}ab(31+ab)-\left(\frac{1}{2}a-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2}a+\frac{2}{3}\right)$ R. $9b^2$

381 $(x-y)^2+(x+y)(y-x)$ R. $[2y^2-2xy]$

382 $(a-3b)^2+(2a+3b)(2a-3b)-(a+2b)(b-2a)$ R. $[7a^2-3ab-2b^2]$

383 $(x+y-z)^2+(x-y+z)^2-2(x-y-z)^2$ R. $4xy+4xz-8yz$

384 $(a+2b-3c)(a+2b+3c)(a^2-b)(-a^2-b)+(2a-b)^3$

385 $[3x^2-(x+2y)(x-2y)]^2-2x\left(\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}y\right)^2-3xy\left(x+\frac{3}{2}y\right)-(2x^2+4y^2)^2$ R. $\frac{-1}{2}x^3$

386 $\left(x^2+yx+\frac{2}{3}\right)^2-\left(3b^2+\frac{1}{2}a^4+2a^3+\frac{1}{3}a^2\right)^2$

387 $\left(3x^2-4xy+\frac{2}{5}-y^2x+\frac{1}{2}y^3\right)^2+\left(2x^2y^2+\frac{3}{2}y^2\right)\left(2x^2y^2-\frac{3}{2}y^2\right)$

388 $\left(\frac{2}{5}zx^3-3x^2y\right)\left(\frac{2}{5}zx^3+3x^2y\right)+\left(2x^2y^2z^3+\frac{1}{2}z^2x^2y\right)^3$

389 $-2x(x-1)^2+2x\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{4}{3}x\left(2x-\frac{4}{3}\right)$ R. $[0]$

390 $(a-2b)^4-b(2a-b)^3-a^2(a+6b)^2$ R. $[17b^4-38ab^3-28a^3b]$

391 $[(x-1)^2-2]^2-(x^2+x-1)^2+6x(x-1)(x+1)$ R. $[3x^2]$

392 $(x+1)^4-(x+1)^2(x-1)^2-4x(x+1)^2$ R. $[0]$

393 $\frac{(x-2)(x+2)}{4}+\frac{(x-2)^2}{(-2)^2}+x$ R. $\left[\frac{1}{2}x^2\right]$

394 $\left(2x-\frac{1}{3}\right)^3+4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$ R. $\left[8x^3+\frac{14}{3}x+\frac{26}{27}\right]$

395 $(x+1)^3-3(x-1)(-1-x)+(x-4)(x+1)$ R. $[x^3+x^2-8]$

396 $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-(x+1)^2-\left(x-\frac{4}{3}\right)\left(x+\frac{4}{3}\right)$ R. $[1-2x]$

397 $(x-3)^3-x^2(x-9)-9(x-3)-9$ R. $[18x-9]$

398 $x(x-1)^2(x+1)+(x-1)^2-x(x-1)^3$ R. $[2x^3-3x^2+1]$

399 $-\frac{1}{2}x\left(x+\frac{3}{4}\right)(2x+1)-\left[x+1\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(3x+\frac{1}{2}\right)^2\right]+\frac{3}{8}(7x+3)$ R. $\left[8x^3-\frac{11}{4}x^2\right]$

400 $(x-y)^3-(y-x)^3+2xy(x+y)(x-y)-7(x-y)(x^2+xy+y^2)+5(x^3-y^3)-2xy(x+y)(x-y+3)$ R.0

401 $\left(3ab-\frac{1}{2}a\right)^2+\frac{1}{2}a+2b\left(\frac{1}{2}a-b\right)\left(\frac{1}{2}a+b\right)-\left(1-\frac{3}{2}a\right)^3+$
$-9a^2\left(\frac{3}{8}a+b^2-\frac{13}{18}\right)+5a\left(\frac{1}{2}ab-1\right)$ R. $\left[2b^3-1\right]$

402 $\frac{1}{3}x\left\{x^2-1-\left[3x\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{2}{3}x\left(x-\frac{2}{3}\right)^3\right]\right\}-\frac{2}{9}x\left(x-3x^2\right)\left(x+3x^2\right)+$
$-\frac{1}{9}x^2\left(20x^3-13x^2+\frac{29}{3}x-\frac{43}{27}\right)$ R. $\left[-\frac{1}{3}x\right]$

403 $\left(x-\frac{1}{2}y\right)^2-\left(2x+\frac{1}{2}y^2\right)^2+\left(x+\frac{1}{2}y\right)\left(-x+\frac{1}{2}y\right)+(x-y)^3+x^2(3y+4)+$
$+xy(1-y)+\frac{1}{2}y^2(y-1)(y+1)$ R. $x^3-y^3+\frac{1}{4}y^4$

404 $\frac{1}{9}(x-4)(x+4)+\frac{1}{3}(x-1)^2-\frac{1}{9}x(x-2)+\left(x-\frac{5}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)+\frac{41}{18}$ R. $\frac{4}{3}x^2-\frac{47}{18}x$

405 $-2t(t-x)-3t^2+x(x+t)(t-x)+(x-t)^2-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}t\right)^3$

406 $\frac{1}{9}(x-4)(x+4)+\frac{1}{3}(x-1)^2-\frac{1}{9}x(x-2)^2-x\left(x-\frac{5}{2}\right)\left(\frac{5}{2}-x\right)+\frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\right)^2$

407 $\left(\frac{1}{2}x^2+1\right)^3+\frac{1}{6}x^2-\left(\frac{1}{2}x^2-1\right)^3-\frac{1}{6}(x+1)^3-\frac{3}{2}x^4$ R. $-\frac{1}{2}x$

408 $-x^2\left(x^2-1\right)+\left(x^2-4x+2\right)^2+4(x-1)^2+8(x-1)^3$ R. x^2

409 $x\left(2x^2+3x\right)^2-2x^3\left(2x-\frac{1}{2}\right)^2+x^3(x-2)^3-x^2\left(x^3+2x^2\right)(x-12)$ R. $52x^4+\frac{1}{2}x^3$

410 $\left(\frac{1}{3}ab-\frac{2}{5}xy\right)\left(-\frac{1}{3}ab-\frac{2}{5}xy\right)-4x^2\left(\frac{1}{5}y-\frac{3}{2}\right)^2-\left(x-\frac{1}{3}ab\right)\left(x+\frac{1}{3}ab\right)+10x^2\left(1-\frac{6}{25}y\right)$ R.0

411 $\left[\left(\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y\right)^2-\left(\frac{1}{3}x\right)^2\right]:\left(\frac{1}{3}y\right)+\left(\frac{1}{3}y-1\right)^3+\frac{1}{3}(y-8)(y-7)+\frac{1}{3}$ R. $\left[\frac{4}{3}x+\frac{y^3}{27}+18\right]$

412 $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+2\left(x-\frac{1}{2}\right)^3-2\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)-x\left[(x+1)(x+2)+(x+1)^2+\frac{1}{2}x\right]+\frac{1}{2}\left(x^2+x-1\right)$ R.$-9x^2$

413 $-\left(\frac{1}{4}x+1\right)^2-\frac{1}{16}(2x-1)^2-\frac{1}{2}(3-x)^2-\frac{3}{16}x^2+5+\left(x+\frac{3}{4}\right)^2$ R. $\left[\frac{17}{4}x\right]$

414 $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x^2+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}x\right)-\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)-\left(x+\frac{1}{2}\right)^3-\frac{1}{2}\left(7x^2-\frac{3}{4}\right)+\frac{3}{8}(2x-1)$ R.$-6x^2$

415 $\left(\frac{3}{2}x-2y\right)\left(\frac{3}{2}x+2y\right)\left(\frac{9}{4}x^2+4y^2\right)+x\left(\frac{1}{2}x-2y\right)^2+\left(\frac{3}{2}x+2y\right)^3-\frac{3}{4}x\left(x-\frac{2}{3}y\right)\left(x+\frac{2}{3}y\right)+$
$+\left(4y^2-\frac{9}{4}x^2\right)\left(4y^2+\frac{9}{4}x^2\right)+\frac{1}{2}xy\left(y-\frac{1}{6}x\right)-\left(\frac{5}{2}x+2y\right)^3+\frac{25}{2}x^3$
R. $\left[-25x^2y-8xy^2\right]$

416 $\left(x+\frac{1}{3}y\right)\left(x-\frac{1}{3}y\right):\frac{1}{3}-\left(x+\frac{1}{2}xy\right)^2:\left(-\frac{1}{2}x\right)+\frac{1}{3}(-3x+y)(3x+y)-\frac{1}{2}\left(y^2+4y+4\right)$ R. $[0]$

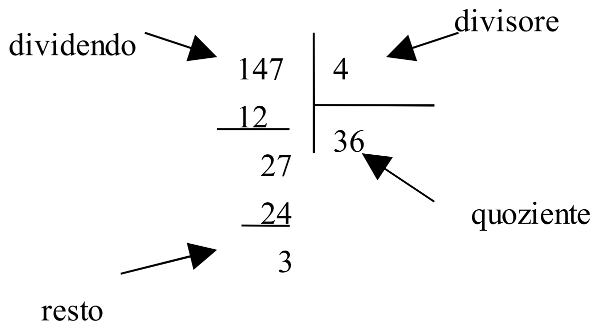
417 $\frac{1}{4}(x+1)^4+\frac{1}{2}(x+1)^2+\frac{1}{8}\left(x^2+1\right)(x+1)(x-1)-\left(2x^2-2x+1\right)^2+9x^3\left(\frac{3}{8}x-1\right)+\frac{1}{4}x^2\left(x^2+16\right)+6x-\frac{3}{8}$ R.0

418 $\left[2\left(a-\frac{1}{2}b\right)\left(a+\frac{1}{2}b\right)\right]^2-\left(2a^2-b\right)\left(2a^2+b\right)-6a^2(a-2b)(2b-a)-b^2\left(22a^2+\frac{1}{4}b^2+1\right)-6a^3(a-4b)$ R.0

419 $\left(1-x^n\right)^2-\left(2x^n-1\right)^2-\left(2x^{n+1}\right)^2+\left(x^{2n}-1\right)\left(x^{2n}+1\right)$ R. $\left[-1+2x^n-3x^{2n}-4x^{2n+2}+x^{4n}\right]$

►9. Divisione tra due polinomi

Ricordiamo la divisione tra due numeri, per esempio 147:4. Si tratta di trovare un quoziente q e un resto $r <$ 4, in modo che $147 = q \times 4 + r$. Un algoritmo per trovare questi due numeri è il seguente:



Verifichiamo che $147 = q \times 4 + 3$, dunque $q = 36$ e $r = 3$ soddisfano la nostra richiesta.
In questo paragrafo ci proponiamo di estendere questo algoritmo dal calcolo numerico al calcolo letterale, in particolare alla divisione tra polinomi.

Polinomi in una sola variabile

Nell'insieme dei polinomi in una sola variabile, ad esempio x, vogliamo definire l'operazione di divisione, cioè, assegnati due polinomi, **A(x) dividendo** e **B(x) divisore**, vogliamo determinare altri due polinomi, **Q(x) quoziente** e **R(x) resto**, con grado di R(x) minore del grado di B(x), per i quali:

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x).$$

Per eseguire l'operazione si usa un algoritmo molto simile a quello usato per la divisione tra numeri interi. Illustriamo l'algoritmo con un esempio.

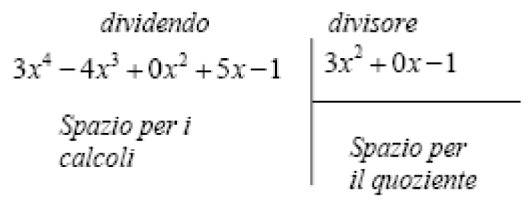
Esempio

- Eseguire la divisione tra i polinomi $A(x) = 3x^4 + 5x - 4x^3 - 1$ e $B(x) = 3x^2 - 1$.

Prima di eseguire l'algoritmo dobbiamo sempre controllare:
- che il dividendo sia di grado maggiore o uguale a quello del divisore: *A(x)* ha grado 4, *B(x)* grado 2.
- che i polinomi siano ordinati secondo le potenze decrescenti della variabile, in questo caso la *x; p*oiché ciò non è vero, riscriviamo *A(x)* ordinato: $A(x) = 3x^4 - 4x^3 + 5x - 1$.
- che dividendo e divisore siano in forma completa, cioè abbiano i termini con tutti i gradi; nel nostro esempio, i due polinomi non sono in forma completa, quindi inseriamo i termini mancanti ponendo 0 come coefficiente delle potenze mancanti: $A(x) = 3x^4 - 4x^3 + 0x^2 + 5x - 1$; $B(x) = 3x^2 + 0x - 1$.

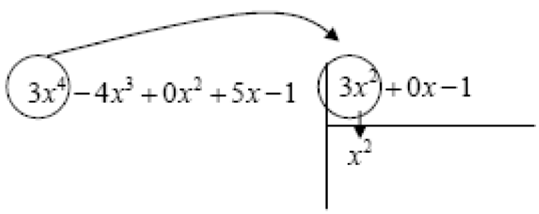
Passo 1

Disponiamo i polinomi secondo il seguente schema, del tutto simile a quello usato per la divisione tra numeri.



Passo 2

Dividiamo il primo termine del dividendo per il primo termine del divisore, otteniamo x^2 che è il primo termine del quoziente; esso va riportato nello spazio dedicato al quoziente.



Passo 3

Moltiplichiamo il primo termine ottenuto per tutti i termini del divisore e trascriviamo il risultato del prodotto sotto il dividendo, avendo cura, per essere facilitati nel calcolo, di:

- incolonnare i termini con lo stesso grado, ossia scrivere i risultati del prodotto in ordine da sinistra verso destra;
- cambiare tutti i segni ottenuti, in questo modo risulta più pratico eseguire la somma algebrica dei polinomi invece della sottrazione.

$$\begin{array}{l|l} 3x^4-4x^3+0x^2+5x-1 & 3x^2+0x-1 \\ \hline -3x^4-0x^3+x^2 & x^2 \end{array}$$

Passo 4

Sommiamo il dividendo con il polinomio sottostante e riportiamo il risultato in un'altra riga. Questo polinomio si chiama primo resto parziale. Notiamo che ha grado 3, maggiore del grado 2 del divisore, pertanto la divisione va continuata.

$$\begin{array}{r|l} 3x^4-4x^3+0x^2+5x-1 & 3x^2+0x-1 \\ -3x^4-0x^3+x^2 \quad\quad\quad & \hline \\ \hline -4x^3+x^2+5x-1 & x^2 \end{array}$$

Passo 5

Ripetiamo il procedimento tra il resto parziale ottenuto $-4x^3+x^2+5x-1$ e il divisore $3x^2+0x-1$. Dividiamo il primo termine del resto che è $-4x^3$ per il primo termine del divisore che è $3x^2$. Otteniamo $-\frac{4}{3}x$ che è il secondo termine del quoziente.

$$\begin{array}{r|l} 3x^4-4x^3+0x^2+5x-1 & 3x^2+0x-1 \\ -3x^4-0x^3+x^2 \quad\quad\quad & \hline \\ \hline -4x^3+x^2+5x-1 & x^2-\frac{4}{3}x \end{array}$$

Passo 6

Proseguiamo moltiplicando $-\frac{4}{3}x$ per $B(x)$, riportiamo il risultato del prodotto, con segno opposto, sotto i termini del primo resto parziale e addizioniamo i due polinomi:

$$\begin{array}{r|l} 3x^4-4x^3+0x^2+5x-1 & 3x^2+0x-1 \\ -3x^4-0x^3+x^2 \quad\quad\quad & \hline \\ \hline -4x^3+x^2+5x-1 & x^2-\frac{4}{3}x \\ -4x^3+0x^2-\frac{4}{3}x \quad\; & \\ \hline x^2+\frac{11}{3}x-1 & \end{array}$$

Passo 7

Possiamo ripetere per l'ultima volta il procedimento precedente tra il resto parziale $R_p(x)=x^2+\frac{11}{3}x-1$ e il divisore $B(x)$ in quanto hanno lo stesso grado. Dividendo il termine di grado maggiore di $R_p(x)$, che è x^2 , per il termine di grado maggiore di $B(x)$ che è $3x^2$ si ottiene $\frac{1}{3}$ che è il terzo termine del polinomio quoziente.

$$\begin{array}{r|l} 3x^4-4x^3+0x^2+5x-1 & 3x^2+0x-1 \\ -3x^4-0x^3+x^2 \quad\quad\quad & \hline \\ \hline -4x^3+x^2+5x-1 & x^2-\frac{4}{3}x+\frac{1}{3} \\ -4x^3+0x^2-\frac{4}{3}x \quad\; & \\ \hline x^2+\frac{11}{3}x-1 & \\ -x^2+0x+\frac{1}{3} & \\ \hline +\frac{11}{3}x-\frac{2}{3} & \end{array}$$

Non possiamo più ripetere l'algoritmo poiché il resto ottenuto ha grado minore del grado del divisore.

In conclusione $A(x):B(x)$ ha quoziente $Q(x)=x^2-\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}$ e resto $R(x)=+\frac{11}{3}x-\frac{2}{3}$.

Verifichiamo se abbiamo svolto correttamente i calcoli; dovrebbe risultare, come detto sopra:

$$A(x)=Q(x)\cdot B(x)+R(x)$$

$$(3x^2-1)\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}\right)+\frac{11}{3}x=3x^4-4x^3-x^2+\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}+\frac{11}{3}x-\frac{2}{3}=$$

$$=3x^4-4x^3+\frac{15}{3}x-\frac{3}{3}=x^4-4x^3+5x-1=A(x)$$

I polinomi $Q(x)$ e $R(x)$ soddisfano quindi le nostre richieste. Ma sono unici? E' sempre possibile trovarli? A queste domande risponde il

TEOREMA DELLA DIVISIONE EUCLIDEA. Siano $A(x)$ e $B(x)$ due polinomi in una sola variabile, esistono e sono unici due polinomi $Q(x)$ e $R(x)$, con grado di $R(x)$ minore o uguale del grado di $B(x)$, tali che $A(x)=Q(x)\cdot B(x)+R(x)$.

Osservazioni

- Nel caso in cui il grado di $A(x)$ sia minore del grado di $B(x)$ il teorema resta valido, in questo caso $Q(x)=0$ e $R(x)=A(x)$.
- Nel caso di polinomi in più variabili il teorema della divisione euclidea non vale.

DEFINIZIONE. Si dice che un polinomio A (dividendo) è **divisibile** per un polinomio B (divisore) se esiste un polinomio Q (quoziente) per il quale $A=Q\cdot B$.

Esempi

- ■ Eseguiamo la divisione tra $A(x)=x^3-2x^2+x-2$ *e* $B(x)=x^2+1$

I due polinomi sono ordinati secondo potenze decrescenti della variabile, il grado di *A* è maggiore del grado di *B* e quest'ultimo deve essere completo. Inseriamoli nella schema per eseguire l'algoritmo. Risulta:

x^3-2x^2+x-2	x^2+0x+1
$-x^3-0x^2-x$	$x-2$
$-2x^2+0x-2$	
$-2x^2+0x-2$	
0	

Quindi $(x^3-2x^2+x-2):(x^2+1)=(x-2)$; il resto R(x) è il polinomio nullo e A(x) è divisibile per B(x).

Infatti $(x^2+1)\cdot(x-2)=(x^3-2x^2+x-2)$.

Conclusione.

Sia $A(x)$ un polinomio di grado n e $B(x)$ un polinomio di grado m con $n\geq m$, quando si esegue la divisione tra A e B si ottiene un polinomio quoziente $Q(x)$ di grado $n-m$ e un polinomio $R(x)$ di grado $g<m$. Si dimostra che i polinomi $Q(x)$ e $R(x)$ sono unici.

Se $R(x)$ è il polinomio nullo, la divisione è esatta e il polinomio A è divisibile per il polinomio B.

Se $n<m$, allora la divisione non si può eseguire e si ottiene la frazione algebrica $\frac{A}{B}$.

420 Completa la divisione

$7x^4+0x^3-5x^2+x-1$	$2x^2+0x-1$
$\ldots$	$\frac{7}{2}x^2\ldots$
$-\frac{3}{2}x^2+x-1$	
$\ldots$	
$x-\frac{7}{4}$	

Esegui le divisioni tra polinomi

421 $(3x^2-5x+4):(2x-2)$ R. $\left[Q(x)=\frac{3}{2}x-1;\ R(x)=2\right]$

422 $(4x^3-2x^2+2x-4):(3x-1)$ $\left[Q(x)=\frac{4}{3}x^2-\frac{2}{9}x+\frac{16}{27};\ R(x)=-\frac{92}{27}\right]$

423 $(5a^3-a^2-4):(a-2)$ $\left[Q(x)=5a^2+9a+18;\ R(x)=32\right]$

424 $(6x^5-5y^4+y^2-1):(2y^2-3)$ $\left[Q(x)=3y^3-\frac{5}{2}y^2+\frac{9}{2}y-\frac{13}{4};\ R(x)=\frac{27}{2}y-\frac{43}{4}\right]$

425 $(-7a^4+3a^2-4+a):(a^3-2)$ $\left[Q(x)=-7a;\ R(x)=a^2-13a-4\right]$

426 $(x^7-4):(x^3-2x^2+3x-7)$ $\left[Q(x)=x^4+2x^3+x^2+3x+17;\ R(x)=32x^2-30x+115\right]$

427 $\left(x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+\frac{3}{2}\right):(x^2+3x)$ $\left[Q(x)=x-\frac{7}{2};\ R(x)=\frac{13}{2}x+\frac{3}{2}\right]$

428 $\left(\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^2-5x+\frac{3}{5}\right):\left(\frac{1}{2}x+3\right)$ $\left[Q(x)=x^3-\frac{20}{3}x^2-\frac{81}{2}x-253;\ R(x)=\frac{3798}{5}\right]$

429 $(6-7a+3a^2-4a^3+a^5):(1-2a^3)$ $\left[Q(x)=2-\frac{1}{2}a^2;\ R(x)=\frac{7}{2}a^2-7a+4\right]$

430 $(a^6-1):(1+a^3+2a^2+2a)$ R. a^3-2a^2+2a-1

431 $\left(a^4-\frac{5}{4}a^3+\frac{11}{8}a^2-\frac{a}{2}\right):\left(a^2-\frac{a}{2}\right)$ R. $a^2-\frac{3}{4}a+1$

432 $(2x^5-11x^3+2x+2):(x^3-2x^2+1)$

433 $(15x^4-2x+5):(2x^2+3)$

434 $\left(-\frac{9}{2}x^2-2x^4+\frac{1}{2}x^3-\frac{69}{8}x-\frac{9}{4}-\frac{4}{3}x^5\right):\left(-2x^2-3x-\frac{3}{4}\right)$

435 $(5x^4-12x^3+10x^2-4x+1):(2x-2)$ R. $\left[Q(x)=x^2-2x+1;\ R(x)=0\right]$

Polinomi in più variabili

Per la divisione tra polinomi in più variabili riportiamo soltanto qualche esempio.

Siano $A(a,b)=3a^2b+4ab^2+3a^3-2b^3$ e $B(a,b)=a-3b$ rispettivamente dividendo e divisore di una divisione tra polinomi; essi sono due polinomi omogenei nelle due variabili a e b rispettivamente di grado 3 e grado 1. Per eseguire la divisione procediamo come nel caso di polinomi in una sola variabile.

283 Dividiamo il polinomio $A(a,b)=3a^2b+4ab^2+3a^3-2b^3$ per il polinomio $B(a,b)=a-3b$ rispetto alla variabile *a*. Controlliamo le condizioni:

- A e B sono ordinati rispetto alla variabile a? No.
  A non lo è. Quindi ordiniamo A: $A(a,b)=3a^3+3a^2b+4ab^2-2b^3$
- Il grado di A è maggiore o uguale al grado di B? Sì
- A e B sono completi rispetto alla variabile a? Sì

Costruiamo lo schema per eseguire l'algoritmo e procediamo:

$3a^3+3a^2b+4ab^2-2b^3$	$a-3b$
	$3a^2-\ldots$

Il quoziente è Q = ……………….. ; il resto R = $118b^3$

Verifica ……………………….……………………..

Se avessimo eseguito la divisione rispetto alla variabile b, avremmo ottenuto stesso quoziente e stesso resto? Proviamo.

Controlliamo le condizioni:

- A e B sono ordinati rispetto alla variabile b? No.

Ordiniamo A, risulta $A(a,b)=-2b^3+4ab^2+3a^2b+3a^3+3a^2b$; ordiniamo B, risulta .

- $B(a,b)=-3b+a$ Il grado di A è maggiore o uguale al grado di B? Sì
- A e B sono completi rispetto alla variabile b? Sì

Costruisci lo schema dell'algoritmo e concludi.

436 Dividi il polinomio $A(x,y)=x^3+3x^2y+2xy^2$ per il polinomio $B(x,y)=x+y$ rispetto alla variabile x.

Il quoziente è Q(x,y) = … … … … …, il resto è R(x,y) = 0.

Ordina il polinomio A(x,y) in modo decrescente rispetto alla variabile y ed esegui nuovamente la divisione. Il quoziente è sempre lo stesso? Il resto è sempre zero?

437 $(3x^4+5ax^3-a^2x^2-6a^3x+2a^4):(3x^2-ax-2a^2)$ variabile x.

438 $(-4x^5+13x^3y^2-12y^3x^2+17x^4y-12y^5):(2x^3-3yx^2+2y^2x-3y^3)$ variabile x.

439 $(x^5-x^4-2ax^3+3ax^2-2a):(x^2-2a)$ varibile x

►10. Regola di Ruffini

Per eseguire la divisione tra due polinomi, **nel caso in cui il divisore sia di grado 1** si può applicare una regola nota come regola di Ruffini e che si basa sui seguenti teoremi.

TEOREMA. Il resto della divisione di un polinomio $A(x)$ per un binomio del tipo $x-k$ è uguale al valore che $A(x)$ assume quando al posto della variabile x si sostituisce il valore k, $R=A(k)$.

Dimostrazione
Dalla divisione di $A(x)$ per $x-k$ otteniamo la seguente uguaglianza:

$$A(x)=(x-k)\cdot Q(x)+R$$

in cui si è scritto *R* anziché *R(x),* poiché è una costante.
Essendo tale relazione valida per qualsiasi valore che si attribuisce alla variabile *x*, sostituiamo al suo posto il valore *k* e otteniamo:

$$A(k)=\underbrace{(k-k)}_{0}\cdot Q(k)+R=R$$

Ciò vuol dire che il valore assunto da $A(x)$ quando $x=k$ è proprio uguale al resto della divisione.

Dimostriamo ora il *Teorema di Ruffini*.

TEOREMA DI RUFFINI. Condizione necessaria e sufficiente affinché un polinomio $A(x)$ sia divisibile per un binomio del tipo $x-k$ è che risulti $A(k)=0$.

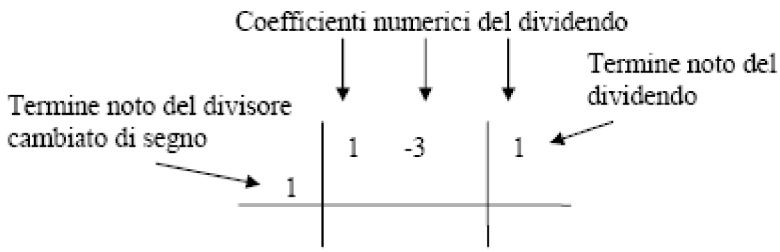
Dimostrazione
Prima implicazione: $A(x)$ divisibile per $x-k \Rightarrow A(k)=0$.
Poiché $A(x)$ è divisibile per $x-k$, per definizione di divisibilità deve essere $R=0$. Ma, per il teorema del resto, $A(k)=R=0$, quindi, per la proprietà transitiva dell'uguaglianza, $A(k)=0$.
Seconda implicazione: $A(k)=0 \Rightarrow A(x)$ divisibile per $x-k$.
Il resto della divisione del polinomio $A(x)$ per il binomio $x-k$, per il teorema del resto risulta $R=A(k)$ e per ipotesi $A(k)=0$, ne segue che $R=0$. Per definizione di divisibilità, essendo il resto della divisione zero, segue che $A(x)$ è divisibile per $x-k$.

Procedura per dividere un polinomio con la regola di Ruffini
- **calcolo del resto**
- **applicazione del procedimento di divisione**
- **verifica**

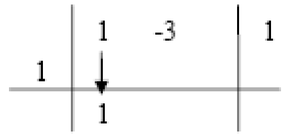
Esempi

■ $(a^2-3a+1):(a-1)$

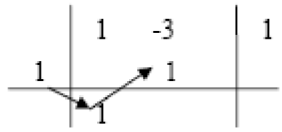
Dividiamo con la regola di Ruffini il polinomio $A(a)=a^2-3a+1$ per il binomio $B(a)=a-1$; cerchiamo quoziente $Q(a)$ e resto $R(a)$.
Passo 1 *Calcolo del polinomio resto*
Si considera il termine numerico del polinomio divisore cambiato di segno (nell'esempio è 1) e si sostituisce alla lettera del polinomio dividendo $A(a)$: $(1)^2-3(1)+1=1-3+1=-1$
Il resto della divisione è -1.
Passo2 *Applicazione del procedimento di divisione*
Disegnare il seguente schema di Ruffini: scrivere i coefficienti numerici del polinomio dividendo, secondo le potenze decrescenti della variabile. Se manca un termine occorre mettere 0. L'ultimo termine numerico è messo esternamente alla griglia. Nell'angolo a sinistra dello schema si pone il termine numerico del polinomio divisore cambiato di segno, nell'esempio è 1.



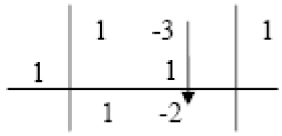
Il primo termine si riporta inalterato nella parte sottostante:



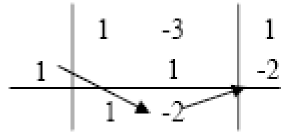
Moltiplicare il termine noto del divisore (cambiato di segno) per il primo coefficiente appena trascritto e si riporta il risultato sotto il secondo coefficiente



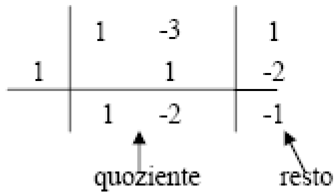
Sommare i due termini appena incolonnati -3+1=-2



Moltiplicare il termine noto del divisore (cambiato di segno) per la somma appena ottenuta $1 \cdot (-2) = -2$



Addizionare gli ultimi due numeri incolonnati 1-2=-1



Infine si ricostruisce il polinomio quoziente, tenendo presente che i coefficienti numerici sono quelli trovati da questa divisione, cioè 1 e -2. Il quoziente è resto sono allora

$$Q(x) = a - 2 \qquad R = -1$$

Passo 3 *Verifica*

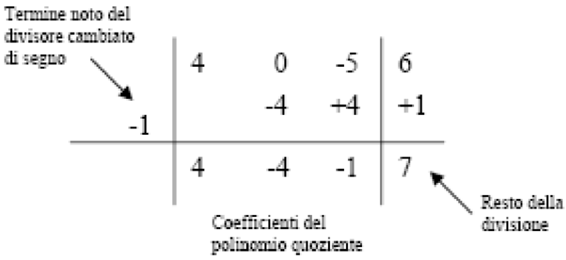
Come nella divisione con i numeri si moltiplica il polinomio risultato per il polinomio divisore e si somma il polinomio resto. Il risultato deve essere il polinomio dividendo.

$$(a - 2)(a - 1) + (-1) = a^2 - a - 2a + 2 - 1 = \mathbf{a^2 - 3a + 1}$$

Esempio

- $(4x^3 - 5x + 6) : (x + 1)$

Applicazione del procedimento di divisione



$$Q(x) = 4x^2 - 4x - 1 \qquad R = 7$$

Verifica

$Q(x) \cdot B(x) + R = A(x)$

$(4x^2 - 4x - 1) \cdot (x + 1) + 7 = 4x^3 + 4x^2 - 4x - x - 1 + 7 = 4x^3 - 5x + 6$

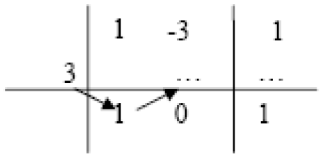
Risolvere le seguenti divisioni utilizzando la regola di Ruffini

440 $(x^2 - 3x + 1) : (x - 3) =$

Calcolo del resto $(+3)^2 - 3(+3) + 1 = \dots$

$Q(x) = 1x + 0 = x \qquad R = \dots$

Verifica $(x-3) \cdot x + \dots = x^2 - 3x + 1$



441 $(3x^3 - 4x^2 + 5x - 1) : (x-2)$ $\quad [Q(x) = 3x^2 + 2x + 9;\ R(x) = 17]$

442 $(x^5 - x^3 + x^2 - 1) : (x-1)$ $\quad [Q(x) = x^4 + x^3 + x + 1;\ R(x) = 0]$

443 $(x^4 - 10x^2 + 9) : (x-3)$ $\quad [Q(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3;\ R(x) = 0]$

444 $(x^4 + 5x^2 + 5x^3 - 5x - 6) : (x+2)$ $\quad [Q(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3;\ R(x) = 0]$

445 $(4x^3 - 2x^2 + 2x - 4) : (x+1)$ $\quad [Q(x) = 4x^2 - 6x + 8;\ R(x) = -12]$

446 $\left(\frac{4}{3}y^4 - 2y^2 + \frac{3}{2}y - 2\right) : \left(y + \frac{1}{2}\right)$ $\quad \left[Q(x) = \frac{4}{3}y^3 - \frac{2}{3}y^2 - \frac{5}{3}y + \frac{7}{3};\ R(x) = -\frac{19}{6}\right]$

447 $\left(\frac{1}{3}x^5 - \frac{3}{2}x - 2\right) : (x+2)$ $\quad \left[Q(x) = \frac{1}{3}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{23}{6};\ R(x) = -\frac{29}{3}\right]$

448 $\left(2a - \frac{4}{3}a^4 - 2a^2 - \frac{1}{3}\right) : \left(a - \frac{1}{2}\right)$ $\quad \left[Q(x) = -\frac{4}{3}a^3 - \frac{2}{3}a^2 - \frac{7}{3}a + \frac{5}{6};\ R(x) = \frac{1}{12}\right]$

449 $\left(\frac{4}{3}y^4 - \frac{3}{2}y^3 + \frac{3}{2}y - 2\right) : (y+3)$ $\quad \left[Q(x) = \frac{4}{3}y^3 - \frac{11}{2}y^2 + \frac{33}{2}y - 48;\ R(x) = 142\right]$

450 $(27x^3 - 3x^2 + 2x + 1) : (x + 3)$

451 $(2x^4 - 5x^3 - 3x + 2) : (x - 1)$

452 $(6a^3 - 9a^2 + 9a - 6) : (3a - 2)$

453 $(2x^4 - 3x^2 - 5x + 1) : (2x - 3)$

454 $\left(x^5 + \frac{1}{3}x^4 - 2x^2 - \frac{2}{3}x\right) : \left(x + \frac{1}{3}\right)$

455 $\left(\frac{3}{4}x^2 - \frac{x^3}{3} + 2x^4\right) : \left(2x - \frac{3}{2}\right)$

Vediamo il caso in cui il binomio che fa da divisore ha coefficiente numerico della variabile diverso da 1.

Esempio

- Dividere con la regola di Ruffini $(2x^4 - x^3 - 4x^2 + 2x + 7) : (2x - 1)$

In questo tipo di esercizi si deve rendere il divisore del tipo $x + n$, quindi nel nostro caso si deve dividere sia il dividendo sia il divisore per 2; sappiamo, infatti, dalla proprietà invariantiva della divisione che dividendo per uno stesso numero dividendo e divisore il quoziente della divisione non cambia, mentre il resto risulterà diviso per 2. Quindi applichiamo l'algoritmo precedente e **ricordiamoci al termine della divisione di moltiplicare il resto per 2**.

La divisione allora diventa $\left(x^4 - \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + x + \frac{7}{2}\right) : \left(x - \frac{1}{2}\right)$

Calcolo del resto

Si considera il termine numerico del polinomio divisore cambiato di segno (nell'esempio è $+\frac{1}{2}$) e si sostituisce alla lettera del polinomio dividendo. Il risultato che si ottiene è il resto della nuova divisione

$\left(\frac{1}{2}\right)^4-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^3-2\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}+\frac{7}{2}=\frac{1}{16}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{7}{2}=\frac{7}{2}$ resto della divisione

Applicazione del procedimento di divisione

	1	$-\frac{1}{2}$	-2	+1	$\frac{7}{2}$
$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	0	-1	0
	1	0	-2	0	$\frac{7}{2}$

Adesso si pone la lettera per ogni termine del polinomio risultato partendo dal grado del polinomio dividendo diminuito di 1. Il risultato è quindi il polinomio x^3-2x , il resto è $\frac{7}{2}\cdot 2=7$.

Verifica

Per la proprietà della divisione si moltiplica il quoziente per il polinomio divisore e si somma il resto ottenuto. Il risultato deve essere il polinomio dividendo.

$$(x^3-2x)(2x-1)+7=2x^4-x^3-4x^2+2x+7$$

In generale, se si vuole dividere il polinomio $A(x)$ per il binomio $(nx-\alpha)$, utilizzando la proprietà invariantiva della divisione, basta dividere dividendo e divisore per *n.* Si ottengono $Q(x)$ e resto. Per ottenere il resto della divisione di partenza occorre moltiplicare per il coefficiente *n*.

Infatti si ha:

$$A(x)=(nx-\alpha)Q(x)+R$$

e, dividendo ambo i membri per *n*, si ha:

$$\frac{A(x)}{n}=\left(x-\frac{\alpha}{n}\right)Q(x)+\frac{R}{n}$$

456 $(x^3-2x^2+2x-4):(2x-2)$ $\left[Q(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{1}x+\frac{1}{2};\ R=-3\right]$

457 $(3x^4-2x^3+x-1):(2x-3)$ $\left[Q(x)=\frac{3}{2}x^3+\frac{5}{4}x^2+\frac{15}{8}x+\frac{53}{16};\ R=\frac{143}{32}\right]$

458 $\left(\frac{3}{2}a^4-2a^2+a-\frac{1}{2}\right):(3a-1)$ $\left[Q(x)=\frac{1}{2}a^3+\frac{1}{6}a^2-\frac{11}{18}a+\frac{7}{54};\ R=-\frac{10}{27}\right]$

459 $(3a^4b^4+a^2b^2+2ab+2):(ab-1)$ $\left[Q(x)=a^3b^3+3a^2b^2+4ab+6;\ R=8\right]$

460 $(3a^4b^2-2a^2b):(a^2b-3)$ $\left[Q(x)=3a^2b+7;\ R=21\right]$

461 $(x^4-ax^3-4a^2x^2+7a^3x-6a^4):(x-2a)$ variabile x R. $x^3+ax^2-2a^2x+3a^3$

462 $(x^4-2ax^3+2a^3x-a^4):(x+a)$ variabile x

463 Per quale valore di k il polinomio x^3-2x^2+kx+2 è divisibile per x^2-1 ? $k=-1$

464 Per quale valore di k il polinomio x^3-2x^2+kx è divisibile per x^2-1 ? [nessuno]

465 Per quale valore di k il polinomio x^3-3x^2+x-k è divisibile per $x+2$? $k=-22$

466 Scrivi, se possibile, un polinomio nella variabile *a* che, diviso per a^2-1 dà come quoziente e a^2+1 come resto -1. R. $\left[a^4-2\right]$

467 Trovare un polinomio di secondo grado nella variabile *x* che risulti divisibile per (x-1) e per (x-2) e tale che il resto della divisione per (x-3) sia uguale a -4.

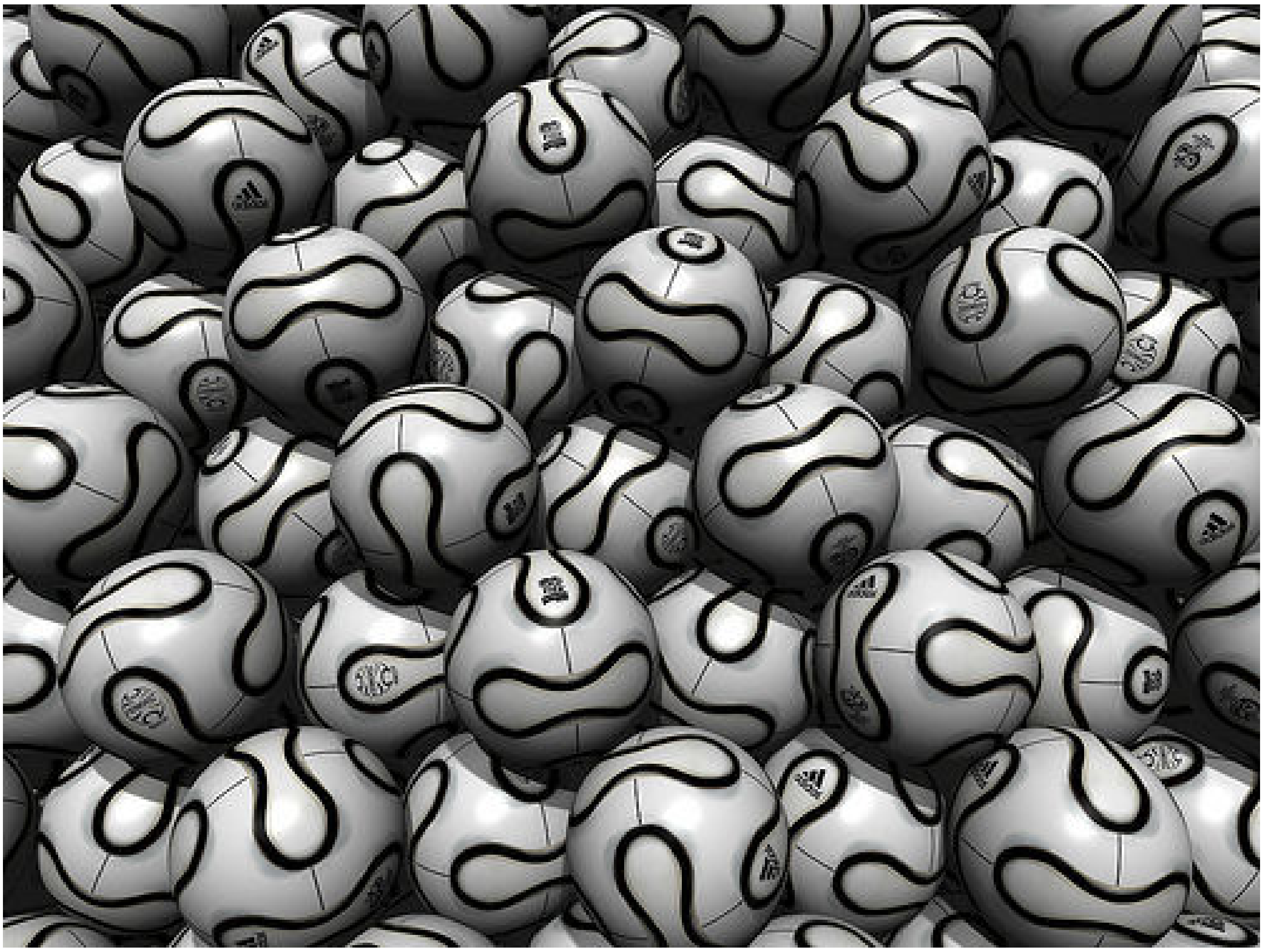
468 Per quale valore di a la divisione $(2x^2-ax+3):(x+1)$ dà resto 5? R. a=0

469 Per quale valore di k il polinomio $2x^3-x^2+kx-3k$ è divisibile per x+2? R. k=-4

470 Per quale valore di k i due polinomi $A(x)=x^3+2x^2-x+3k-2$ e $B(x)=kx^2-(3k-1)x-4k+7$ divisi entrambi per x+1 abbiamo lo stesso resto? R. k=2

MATEMATICA C3 -ALGEBRA 1

4. EQUAZIONI



FIFA FCC Packing foto by: fdecomite
take fron: http://www.flickr.com/photos/fdecomite/2624192405/

Indice

►1. Identità ed equazioni

Identità ed equazioni

Analizziamo le proposizioni:

a) "cinque *è uguale* alla differenza tra sette e due"
b) "la somma di quattro e due *è uguale* a otto"
c) "il doppio di un numero naturale *è uguale* alla differenza tra nove e il numero stesso"
d) "la somma di due numeri interi *è uguale* a dieci"

Notiamo che tutte sono costruite con il predicato "essere uguale a"; riscriviamo in formula ciascuna di esse:

a) 5=7-2; b) 4+2=8; c) 2x=9-x; d) x+y=10

e notiamo che le prime due contengono solamente numeri, le seconde contengono anche variabili.
Le formule del primo tipo si dicono **chiuse** e di esse si può subito stabilire il valore di verità; così in N la formula 5 = 7 - 2 è vera mentre 4 + 2 = 8 è falsa.

DEFINIZIONE. Le **formule chiuse** costruite con il predicato "essere uguale" si chiamano **uguaglianze**; stabilito l'ambiente in cui vengono enunciate si può immediatamente stabilire il loro valore di verità.

Esempi

- La formula chiusa 1 – 6 = -5 è un'uguaglianza vera se la consideriamo nell'insieme Z degli interi relativi, è falsa se la vediamo come sottrazione tra numeri naturali.

Le formule c) e d) che contengono variabili si dicono **aperte;** le variabili che compaiono sono chiamate **incognite**. Di tali formule non si può subito stabilire il valore di verità.
Quando alle incognite sostituiamo un numero, queste si trasformano in formule chiuse e allora possiamo stabilirne il valore di verità relativamente alla sostituzione effettuata.

- Nella formula 2x = 9 – x sostituiamo alla variabile x il valore zero; otteniamo $2\cdot 0=9-0 \Rightarrow 0=9 \text{ FALSA}$; sostituiamo ora alla variabile x il valore tre; otteniamo $2\cdot 3=9-3 \Rightarrow 6=6 \text{ VERA}$
- Nella formula x + y = 10 sostituiamo alle variabili coppie di numeri interi come x = 2 e y = 5; otteniamo $2+5=10 \quad \Rightarrow \quad 7=10 \quad \text{FALSA}$. Se sostituiamo x = 4 e y = 6 ci rendiamo subito conto che l'uguaglianza ottenuta è VERA, ma scopriamo anche che molte altre coppie di numeri interi rendono vera l'uguaglianza.

DEFINIZIONI
Le formule aperte costruite con il predicato essere uguale si chiamano **equazioni**; le due espressioni che compaiono a sinistra e a destra del segno di uguaglianza si chiamano rispettivamente **primo membro e secondo membro**.
L'insieme dei valori che sostituiti alle incognite trasformano l'equazione in un'uguaglianza vera costituisce l'**insieme soluzione** (I.S.) o più semplicemente la **soluzione** dell'equazione.

Affronteremo per ora equazioni in **una sola incognita** che, dopo aver svolto eventuali calcoli nei due membri, comparirà a **grado 1** e i cui **coefficienti** sono **numeri razionali**.
Cercheremo la sua soluzione nell'insieme *Q* dei numeri razionali, salvo esplicita indicazione differente.

Esempi

- $x^2=1$ con $x\in N$

Risulta vera solo se a *x* sostituiamo il valore 1; infatti 1 è l'unico numero naturale il cui quadrato è 1. L'insieme soluzione è {1}.

- b) $x^2=1$ con $x\in Z$

Risulta vera se a *x* sostituiamo il valore 1 oppure il valore -1; infatti sia -1 che 1 elevati al quadrato danno 1. L'insieme soluzione è {-1, 1}.

- $x^2+1=0$ con $x\in Q$

Essendo la formula a sinistra dell'uguale la somma di un quadrato con il numero 1, per ottenere 0 dovrebbe essere x^2 = -1 il che risulta impossibile nell'insieme dei numeri reali. L'insieme soluzione è quindi $\emptyset$.

- $2x+3=(3+x)+x$ con $x\in Q$

Eseguendo il semplice calcolo al secondo membro, ci rendiamo conto che qualunque valore venga sostituito all'incognita l'uguaglianza risulta vera. L'insieme soluzione è Q.

In generale un'equazione in una incognita può essere:

- **determinata**, quando l'insieme soluzione è un sottoinsieme proprio dell'insieme numerico considerato;
- **impossibile**, quando l'insieme soluzione è l'insieme vuoto $\emptyset$;
- **indeterminata o identità**, quando l'insieme soluzione coincide con l'insieme considerato.

Esempi

■ Analizziamo le equazioni: $a)\ 3\cdot x=0;\quad b)\ 0\cdot x=5;\quad c)\ 0\cdot x=0$

Tutte e tre hanno la stessa struttura: il primo membro è il prodotto di un coefficiente numerico per un valore incognito, il secondo membro è un numero.

a) Per trovare l'insieme soluzione della prima cerchiamo in Q il numero che moltiplicato per 3 dà come prodotto 0. Per la proprietà della moltiplicazione l'unico numero che rende vera l'uguaglianza è zero. Quindi l'insieme delle soluzioni è {0}. L'equazione è determinata.

b) Per trovare l'insieme soluzione della seconda cerchiamo in Q il numero che moltiplicato per 0 dà come prodotto 5. Per la proprietà della moltiplicazione quando moltiplichiamo per 0 il prodotto è 0, non otterremo mai 5. Quindi l'insieme soluzione è l'insieme vuoto. L'equazione è impossibile.

c) Per trovare l'insieme soluzione della terza cerchiamo in Q il numero che moltiplicato per zero dà come prodotto zero. Per la proprietà della moltiplicazione quando moltiplichiamo per 0 il prodotto è 0 qualunque sia l'altro fattore. Quindi l'insieme delle soluzioni è Q. L'equazione è indeterminata.

►2. Ricerca dell'insieme soluzione

In alcuni casi la soluzione di un'equazione si può trovare applicando le semplici proprietà delle operazioni.

Esempio

Analizziamo lo schema operativo dell'equazione $3x-1=17$ con $x\in N$.

Si opera sul valore incognito x per ottenere 17

$$\textbf{entra}\ x\ ,\textit{si moltiplica per tre}\rightarrow 3\cdot x\ \textit{si sottrae}\ 1\rightarrow 3\cdot x-1\ \textit{si ottiene}\ 17\ .$$

Qual è il valore in ingresso?

Per determinare il valore in ingresso basterà ripercorrere lo schema effettuando le operazioni inverse:

$$\textit{da}\ 17\ \textit{aggiungi}\ 1\rightarrow 18\ \textit{dividi per tre}\rightarrow\ 18:3\rightarrow x$$

La soluzione dell'equazione è x = 6 e I.S. (insieme soluzione) è {6}.

1 Risolvi in Z la seguente equazione: $-x+3=-1$.

Suggerimento. Lo schema operativo è: *entra x, cambia il segno in -x, aggiunge 3, si ottiene -1.*

Ora ricostruisci il cammino inverso: da -1 togli 3 ottieni … cambia segno ottieni come soluzione x = … …

Per risolvere un'equazione più complessa come $\left(\frac{1}{2}x+3\right)\cdot(-5+x)=12x+\frac{1}{2}x^2$ con $x\in Q$, non possiamo applicare il procedimento precedente; potremmo procedere per tentativi, sostituendo all'incognita alcuni valori scelti a caso e verificando se il valore assunto dal primo membro risulta uguale a quello assunto dal secondo membro. È evidente però che questo procedimento raramente porterà a trovare tutte le soluzioni di un'equazione.

Per risolvere un'equazione cioè per determinare tutte le eventuali soluzioni si procede applicando i principi d'equivalenza.

DEFINIZIONE. Due equazioni sono **equivalenti** se hanno lo stesso insieme soluzione.

PRIMO PRINCIPIO**.** Aggiungendo o sottraendo ad ambo i membri di un'equazione data uno stesso numero o una stessa espressione (definita per ogni valore dell'incognita) si ottiene un'equazione equivalente a quella data.

SECONDO PRINCIPIO. Moltiplicando o dividendo ambo i membri di un'equazione per uno stesso numero non nullo o per un'espressione non nulla (definita per ogni valore attribuito all'incognita) si ottiene un'equazione equivalente alla data.

La forma più semplice di un'equazione di primo grado in un'incognita è:

x = *numero*

L'insieme soluzione di una equazione di questo tipo è I.S.={numero}.

Per esempio, l'insieme delle soluzioni dell'equazione *x = -3* è I.S.={-3}.

I principi sopra enunciati permettono di trasformare qualunque equazione nella forma canonica che ha lo stesso insieme soluzione di quella assegnata.

►3. Risoluzione di equazioni numeriche intere di primo grado

In questo paragrafo vedremo come usare i principi d'equivalenza prima enunciati per condurre un'equazione alla forma canonica e dunque determinarne la soluzione.

DEFINIZIONE. Risolvere un'equazione significa determinare il suo **I**nsieme **S**oluzione

Cominciamo con alcuni esempi.

Applicazione del 1° principio di equivalenza

Esempio

- $x-5=3$

sommiamo 5 a entrambi i membri: $x-5+5=3+5$ $x=8$ I.S. = {8}

- $3x=2+2x$

sottraiamo 2x a entrambi i membri: $3x-2x=2+2x-2x$ $x=2$ I.S. {2}

Risolvi le seguenti equazioni applicando il 1° principio di equivalenza

2 $x+2=7$ $2+x=3$ $16+x=26$ $x-1=1$

3 $3+x=-5$ $12+x=-22$ $3x=2x-1$ $8x=7x+4$

4 $2x=x-1$ $5x=4x+2$ $3x=2x-3$ $3x=2x-2$

5 $7+x=0$ $7=-x$ $-7=x$ $1+x=0$

6 $1-x=0$ $0=2-x$ $3x-1=2x-3$ $7x-2x-2=4x-1$

7 $-5x+2=-6x+6$ $-2+5x=8+4x$ $7x+1=6x+2$ $-1-5x=3-6x$

Applicazione del 2° principio di equivalenza

Esempio

- $3x=12$ dividiamo entrambi i membri per 3, si ha $\frac{3}{3}x=\frac{12}{3} \rightarrow x=4 \rightarrow I.S.=\{4\}$
- $\frac{1}{2}x=2$ moltiplichiamo entrambi i membri per 2, si ha $2\cdot\frac{1}{2}x=2\cdot 2 \rightarrow x=4 \rightarrow I.S.=\{4\}$

Risolvi le seguenti equazioni applicando il 2° principio di equivalenza

8 $2x=8$ $2x=3$ $6x=24$ $0x=1$

9 $\frac{1}{3}x=-1$ $\frac{1}{2}x=\frac{1}{4}$ $\frac{3}{2}x=12$ $2x=-2$

10 $3x=\frac{1}{6}$ $\frac{1}{2}x=4$ $\frac{3}{4}x=\frac{12}{15}$ $2x=\frac{1}{2}$

11 $3x=6$ $\frac{1}{3}x=\frac{1}{3}$ $\frac{2}{5}x=\frac{10}{25}$ $-\frac{1}{2}x=-\frac{1}{2}$

12 $0{,}1\,x=1$ $0{,}1\,x=10$ $0{,}1\,x=0{,}5$ $-0{,}2\,x=5$

Esempio

- $-2x+1=3x-5$

sottraiamo 1 a entrambi i membri $-2x+1-1=3x-5-1$ quindi $-2x=3x-6$

sottraiamo 3x a entrambi i membri $-2x-3x=3x-3x-6$ quindi $-5x=-6$

dividiamo entrambi i membri per -5 $\frac{-5}{-5}x=\frac{-6}{-5} \rightarrow x=\frac{6}{5} \rightarrow I.S.=\left\{\frac{6}{5}\right\}$

Risolvi le seguenti equazioni applicando entrambi i principi

13 $2x+1=7$ $3-2x=3$ $6x-12=24$

14 $3x+3=4$ $5-x=1$ $7x-2=5$

15 $2x+8=8-x$ $2x-3=3-2x$ $6x+24=3x+12$

16 $2+8x=6-2x$ $6x-6=5-x$ $-3x+12=3x+18$

17 $3-2x=8+2x$ $\frac{2}{3}x-3=\frac{1}{3}x+1$ $\frac{6}{5}x=\frac{24}{5}-x$

18 $3x-2x+1=2+3x-1$ $\frac{2}{5}x-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}x+\frac{1}{10}$ $\frac{5}{6}x+\frac{3}{2}=\frac{25}{3}-\frac{10}{2}x$

Esempio

Prendiamo l'equazione $(x+1)+3\cdot(2+x)=12x-1$ nella sola incognita x di primo grado a coefficienti numerici interi. Cerchiamo di trasformarla nella forma canonica "x = numero" applicando i principi di equivalenza.

I° passo: svolgiamo i calcoli al primo e al secondo membro: $x+1+6+3x=12x-1$

II° passo: sommiamo in ciascun membro i termini simili (se ce ne sono): $4x+7=12x-1$

III° passo: sottraiamo ad ambo i membri il monomio 12x, applicando il primo principio: $4x-12x+7=12x-1-12x$, sommiamo i monomi simili al primo e al secondo membro e otteniamo $-8x+7=-1$.

IV° passo: sottraiamo ad ambo i membri il numero 7, applicando il primo principio e sommiamo i termini simili: $-8x+7-7=-1-7$ → $-8x=-8$

V° passo: dividiamo ambo i membri per -8, applicando il secondo principio: $\frac{-8}{-8}x=\frac{-8}{-8}$ → $x=1$

L'equazione assegnata $(x+1)+3\cdot(2+x)=12x-1$ risulta equivalente all'ultima trovata x=1, pertanto il suo insieme soluzione è I.S. = {1}.

19 Risolvi l'equazione $10x+4=-2\cdot(x+5)-x$ seguendo la traccia:

1° passo: svolgi i calcoli al primo e al secondo membro … … … … … … … … … … …

2° passo: somma i monomi simili in ciascun membro dell'equazione: … … … … … … …

3° passo: applica il primo principio d'equivalenza per lasciare in un membro solo monomi con l'incognita e nell'altro membro solo numeri … … … … … … … … … … … … … …

4° passo: somma i termini del primo membro e somma i termini del secondo membro:

… … … … … … … … … … … … … … …

5° passo: applica il secondo principio d'equivalenza dividendo ambo i membri per il coefficiente dell'incognita: … … … … … … … … … … … in forma canonica: … … … … … … … …

6° passo: scrivi l'Insieme Soluzione : I.S. = … … …

20 Risolvi, seguendo la traccia, l'equazione $x-(3x+5)=(4x+8)-4\cdot(x+1)$

1° passo: svolgi i calcoli: … … … … … … … … … … … … … … … …

2° passo: somma i monomi simili: … … … … … … … … … … … … …

3° passo: porta al primo membro i monomi con la x e al secondo quelli senza … … … … … = … … … …

4° passo: somma i monomi simili al primo membro e al secondo membro … … … = … … …

5° passo: dividi ambo i membri per il coefficiente dell'incognita … … = … ….

6° passo: l'insieme soluzione è {… …}

Osservazioni

La trasformazione di un'equazione nella forma canonica prevede che il termine con l'incognita sia collocato da una parte del segno uguale mentre dall'altra parte sia posto il termine numerico.

Enunciamo alcune **regole pratiche** che ci possono aiutare nella procedura risolutiva e che discendono direttamente dal primo principio d'equivalenza:

Spostando da un membro all'altro un addendo occorre cambiargli il segno; l'equazione ottenuta è equivalente a quella data.

- $2x-3=2$

per lasciare da sola la x al primo menbro devo aggiungere +3 al primo e al secondo membro, ottengo

$2x-3+3=2+3$ da cui $2x=2+3$

L'effetto che si ha è che si è spostato il -3 al secondo membro cambiandolo di segno.

Se in entrambi i membri dell'equazione compare uno stesso addendo con lo stesso segno, esso può essere cancellato da entrambi i membri: l'equazione che si ottiene è equivalente a quella data.
Infatti:

- $2x-3+x=2+x$

La x che sta al secondo membro va portata al primo, cambiandola di segno
$2x-3+x-x=2$ da cui $2x-3=2$
L'effetto che si ha è che si possono eliminare le due x che stanno una al primo membro e una al secondo membro.
Se il coefficiente dell'incognita è -1, ossia l'equazione si presenta nella forma *-x=n*, si può cambiare di segno ai termini del primo e del secondo membro, per ottenere la forma x=-n.Cambiare di segno equivale a moltiplicare per -1 i due membri dell'equazione.
Infatti:

- $x-3=2x+1$

Dobbiamo portare 2x al primo membro e -3 al secondo membro, otteniamo
$x-2x=3+1$ da cui $-x=4$
Poiché il coefficiente della x è negativo moltiplichiamo per -1 primo e seecondo membro
$-1\cdot(-x)=-1\cdot(4)$ da cui $x=-4$.
Risolvi la seguente equazioni applicando queste regole pratiche.

- $5x+2\cdot(3-x)+1=-(4x-1)+2\cdot(6-x)$.

1° passo: svolgiamo i calcoli $5x+6-2x+1=-4x+1+12-2x$
2° passo: eliminiamo i termini uguali che compaiono nei due membri: $5x+6\cancel{-2x}\cancel{+1}=-4x\cancel{+1}+12\cancel{-2x}$
otteniamo: $5x+6=-4x+12$
3° passo: spostiamo il monomio -4x del secondo membro a sinistra del segno uguale e il numero +6 da sinistra a destra; otteniamo $5x+4x=-6+12$
4° passo: sommando i termini simili nei due membri otteniamo $9x=+6$ da cui dividendo per 9 ambo i membri si ottiene $x=\frac{2}{3} \rightarrow I.S.=\left\{\frac{2}{3}\right\}$

Risolvi le seguenti equazioni con le regole pratiche indicate

21 $3(x-1)+2(x-2)+1=2x$ R.x=2
22 $x-(2x+2)=3x-(x+2)-1$ R. x=1/3
23 $-2(x+1)-3(x-2)=6x+2$ R. x=2/11
24 $x+2-3(x+2)=x-2$ R. x=-2/3
25 $2(1-x)-(x+2)=4x-3(2-x)$ R. x=3/5
26 $(x+2)^2=x^2-4x+4$ R. x=0
27 $5(3x-1)-7(2x-4)=28$ R. x=5
28 $(x+1)(x-1)+2x=5+x(2+x)$ R. impossibile
29 $(x+1)^2+2x+2(x-1)=(x+2)^2$ R. x=5/2
30 $4(x-2)+3(x+2)=2(x-1)-(x+1)$ R. x=-1/6
31 $(x+2)(x+3)-(x+3)^2=(x+1)(x-1)-x(x+1)$ $I.S.=\emptyset$
32 $x^3+6x^2+(x+2)^3+11x+(x+2)^2=(x+3)(2x^2+7x)$ R. x=2
33 $(2x-3)^2-4x(2-5x)-4=-8x(x+4)$
34 $(x+2)^3-(x-1)^3=9(x+1)^2-9x$ R. indeterminata
35 $2x+(x+2)(x-2)+5=(x+1)^2$ R. indeterminata
36 $(x-1)(x^2+x+1)-3x^2=(x-1)^3+1$
37 $2(x-2)(x+3)-3(x+1)(x-4)=-9(x-2)^2+(8x^2-25x+36)$ R. indeterminata
38 $(2x-1)(4x^2+2x+1)=(2x-1)^3-12x^2$

►4. Equazioni a coefficienti frazionari

Vediamo, illustrando qualche esempio, come si procede:

Esempio

- $\frac{2}{3}x+4-\frac{1}{2}+2x=\frac{x+2}{3}-\frac{5}{2}x+1$.

Sappiamo che il secondo principio d'equivalenza ci permette di moltiplicare ambo i membri per uno stesso numero diverso da zero per ottenere un'equazione equivalente alla data.

1° passo: calcoliamo il m.c.m. tra i denominatori: in questo caso m.c.m.(2,3) = 6

2° passo: moltiplichiamo per 6 ambo i membri dell'equazione: $6\left(\frac{2}{3}x+4-\frac{1}{2}+2x\right)=6\left(\frac{x+2}{3}-\frac{5}{2}x+1\right)$

3° passo: eseguiamo i calcoli: $4x+24-3+12x=2x+4-15x+6$.
I coefficienti dell'equazione sono ora numeri interi, puoi procedere da solo come abbiamo visto negli esempi precedenti.

39 Risolvi l'equazione $\frac{3\cdot(x-11)}{4}=\frac{3\cdot(x+1)}{5}-\frac{1}{10}$.

1° passo: calcola m.c.m.(4,5,10) = ………

2° passo: moltiplica ambo i membri per …... e ottieni: … … … … … … … … … … … ...

3° passo: …

Equazioni in cui l'incognita compare con grado maggiore di 1

Esempio

- $(2x+1)\cdot(x-2)=2\cdot(x+1)^2-5x$

Prima di iniziare la procedura risolutiva analizziamo i membri dell'equazione: al primo membro compare il prodotto di due polinomi di primo grado, nel secondo il quadrato di un binomio di primo grado, pertanto l'incognita, eseguiti i calcoli comparirà a grado due. Apparentemente l'equazione è di secondo grado. Iniziamo la procedura risolutiva:

1° passo: svolgiamo i calcoli e otteniamo:
$2x^2-4x+x-2=2x^2+4x+2-5x \quad \rightarrow \quad 2x^2-3x-2=2x^2-x+2$

2° passo: applichiamo le regole pratiche eliminando i monomi uguali con l'incognita al secondo grado e otteniamo $-3x+x=+2+2$.
Abbiamo ottenuto un'equazione di primo grado; puoi procedere da solo e determinare la forma canonica e I.S.

3° passo … … … … … … … … … … … … … … … I.S. = { }.

Equazioni in cui l'incognita scompare

Esempio

- $\frac{4}{5}-\frac{x}{2}=\frac{2-5x}{10}$

1° passo: Calcoliamo il m.c.m. tra i denominatori: in questo caso m.c.m.(5, 2, 10) = 10.

2° passo: Moltiplichiamo per 10 ambo i membri dell'equazione: $10\left(\frac{4}{5}-\frac{x}{2}\right)=10\left(\frac{2-5x}{10}\right)$.

3° passo: Eseguiamo i calcoli: $8-5x=2-5x$.

4° passo: Applichiamo la regola pratica: $-5x+5x=2-8$ i monomi in x si annullano!

5° passo: Sommando i monomi simili si ottiene: $0\cdot x=-6$.

Il coefficiente dell'incognita è zero; non possiamo applicare il secondo principio e dividere ambo i membri per zero. D'altra parte non esiste nessun numero che moltiplicato per zero dia come prodotto -6. Quindi $I.S.=\emptyset$, l'equazione risulta impossibile.

Esempio

- $\frac{x}{6}-\frac{2x}{3}=-\frac{x}{2}$

1° passo: Calcoliamo il m.c.m. tra i denominatori: in questo caso m.c.m.(6, 3, 2) = 6

2° passo: Moltiplichiamo per 6 ambo i membri dell'equazione: $6\left(\frac{x}{6}-\frac{2x}{3}\right)=6\left(-\frac{x}{2}\right)$

3° passo: Eseguiamo i calcoli : $x-4x=-3x$

4° passo: Applicando il primo principio si ottiene $0 \cdot x=0$.

Il coefficiente dell'incognita è zero; non possiamo applicare il secondo principio e dividere ambo i membri per zero. D'altra parte per la proprietà della moltiplicazione qualunque numero moltiplicato per zero dà come prodotto zero. Quindi I.S. = Q, l'equazione è indeterminata (identità).

Riassumendo

La forma canonica di un'equazione di primo grado in una incognita a coefficienti numerici è $A \cdot x=B$ con A e B numeri razionali.

Possono presentarsi i casi:

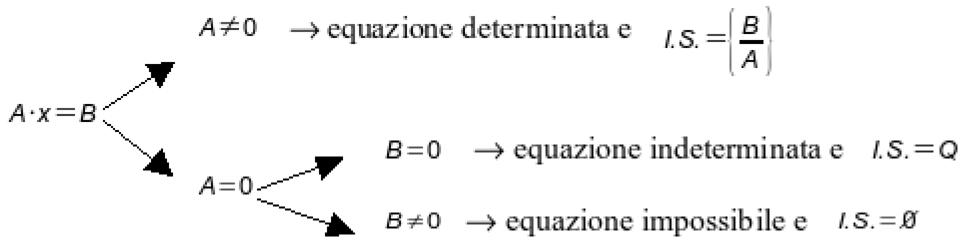
se $A \neq 0$ possiamo applicare il secondo principio d'equivalenza dividendo ambo i membri per A quindi $I.S.=\left\{\frac{B}{A}\right\}$. L'equazione è determinata.

se $A=0$ non possiamo applicare il secondo principio d'equivalenza e dividere ambo i membri per A e si presentano due casi:

$B=0$ allora $I.S.=Q$. L'equazione è indeterminata.

$B \neq 0$ allora $I.S.=\emptyset$. L'equazione è impossibile.

Lo schema precedente si può rappresentare anche con un grafo ad albero:



Risolvi le seguenti equazioni nell'insieme a fianco indicato

40	$x+7=8$, N	$4+x=2$, Z	$x-3=4$, N	$x=0$, N
41	$x+1=0$, Z	$5x=0$, Z	$\frac{x}{4}=0$, Q	$-x=0$, Z
42	$7+x=0$, Z	$-2x=0$, Z	$-x-1=0$, Z	$\frac{-x}{4}=0$, Q
43	$x-\frac{2}{3}=0$, Q	$\frac{x}{-3}=0$, Z	$2(x-1)=0$, Z	$-3x=1$, Q
44	$3x=-1$, Q	$\frac{x}{3}=1$, Q	$\frac{x}{3}=2$, Q	$\frac{x}{3}=-2$, Q
45	$0x=0$, Q	$0x=5$, Q	$0x=-5$, Q	$\frac{x}{1}=0$, Q
46	$\frac{x}{1}=1$, Q	$-x=10$, Z	$\frac{x}{-1}=-1$, Z	$3x=3$, N

Risolvi le seguenti equazioni nell'insieme $\mathbb{Q}$

47 $3x=\frac{1}{3}$ $\quad -3x=-\frac{1}{3}$

48 $x+2=0$ $\quad 4x-4=0$

49 $4x-0=1$ $\quad 2x+3=x+3$

50 $4x-4=1$ $\quad 4x-1=1$

51 $4x-1=0$ $\quad 3x=12-x$

52 $4x-8=3x$ $\quad -x-2=-2x-3$

53 $-3(x-2)=3$ $\quad x+2=2x+3$

54 $-x+2=2x+3$ $\quad 3(x-2)=0$

55 $3(x-2)=1$ $\quad 3(x-2)=3$

56 $0(x-2)=1$ $\quad 0(x-2)=0$

57 $12+x=-9x$ $\quad 40x+3=30x-100$

58 $4x+8x=12x-8$ $\quad -2-3x=-2x-4$

59 $2x+2=2x+3$ $\quad \frac{x+2}{2}=\frac{x+1}{2}$

60 $\frac{2x+1}{2}=x+1$ $\quad \frac{x}{2}+\frac{1}{4}=3x-\frac{1}{2}$

61 $\pi x=0$ $\quad 2\pi x=\pi$

62 $0{,}12x=0{,}1$ $\quad -\frac{1}{2}x-0{,}3=-\frac{2}{5}x-0{,}15$

63 $892x-892=892x-892$ $\quad 892x-892=893x-892$

64 $348x-347=340x-347$ $\quad 340x+740=8942+340x$

65 $2x+3=2x+4$ $\quad 2x+3=2x+3$

66 $2(x+3)=2x+5$ $\quad 2(x+4)=2x+8$

67 $3x+6=6x+6$ $\quad -2x+3=-2x+4$

68 $\frac{x}{2}+\frac{1}{4}=\frac{x}{4}-\frac{1}{2}$ $\quad \frac{x}{2}+\frac{1}{4}=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$

69 $\frac{x}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3x}{2}-\frac{1}{2}$ $\quad \frac{x}{200}+\frac{1}{100}=\frac{1}{200}$

70 $1000x-100=2000x-200$ $\quad 100x-1000=-1000x+100$

71 $x-5(1-x)=5+5x$ R. $[10]$

72 $2(x-5)-(1-x)=3x$ R. impossibile

73 $3(2+x)=5(1+x)-3(2-x)$ R. 7/5

74 $4(x-2)-3(x+2)=2(x-1)$ R. -12

75 $\frac{x+1000}{3}+\frac{x+1000}{4}=1$ R. $\left[\frac{-6988}{7}\right]$

76 $\frac{x-4}{5}=\frac{2x+1}{3}$ R. $\left[-\frac{17}{7}\right]$

77 $\frac{x+1}{2}+\frac{x-1}{5}=\frac{1}{10}$ R. $\left[-\frac{2}{7}\right]$

78 $\frac{x}{3}-\frac{1}{2}=\frac{x}{4}-\frac{x}{6}$ R. 2

79 $8x-\frac{x}{6}=2x+11$ R. $\left[\frac{66}{35}\right]$

80 $3(x-1)-\frac{1}{7}=4(x-2)+1$ R. $\left[\frac{27}{7}\right]$

81 $537x+537\frac{x}{4}-\frac{537x}{7}=0$ R. $[0]$

82 $\frac{2x+3}{5}=x-1$ R. $\left[\frac{8}{3}\right]$

83 $\frac{x}{2}-\frac{x}{6}-1=\frac{x}{3}$ impossibile

84 $\frac{4-x}{5}+\frac{3-4x}{2}=3$ R. $\left[-\frac{7}{22}\right]$

85 $\frac{x+3}{2}=3x-2$ R. $\left[\frac{7}{5}\right]$

86 $\frac{x+0{,}25}{5}=1{,}75-0{,}\overline{3}x$ R. $\left[\frac{51}{16}\right]$

87 $3(x-2)-4(5-x)=3x\left(1-\frac{1}{3}\right)$ R. $\left[\frac{26}{5}\right]$

88 $4(2x-1)+5=1-2(-3x-6)$ R. [6]

89 $\frac{3}{2}(x+1)-\frac{1}{3}(1-x)=x+2$ R.[1]

90 $\frac{1}{2}(x+5)-x=\frac{1}{2}(3-x)$ impossibile

91 $(x+3)^2=(x-2)(x+2)+\frac{1}{3}x$ R. $\left[-\frac{39}{17}\right]$

92 $\frac{(x+1)^2}{4}-\frac{2+3x}{2}=\frac{(x-1)^2}{4}$ R. [-2]

93 $2\left(x-\frac{1}{3}\right)+x=3x-2$ impossibile

94 $\frac{3}{2}x+\frac{x}{4}=5\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}\right)-x$ R. $\left[\frac{30}{7}\right]$

95 $(2x-3)(5+x)+\frac{1}{4}=2(x-1)^2-\frac{1}{2}$ R. $\left[\frac{65}{44}\right]$

96 $(x-2)(x+5)+\frac{1}{4}=x^2-\frac{1}{2}$ R. $\left[\frac{37}{12}\right]$

97 $4(x+1)-3x(1-x)=(x+1)(x-1)+4+2x^2$ R. [-1]

98 $(x+1)^2=(x-1)^2$ R. [0]

99 $\frac{(1-x)^2}{2}-\frac{x^2-1}{2}=1$ R. [0]

100 $\frac{(x+1)^2}{3}=\frac{1}{3}(x^2-1)$ R. [-1]

101 $\frac{1-x}{3}\cdot(x+1)=1-x^2+\frac{2}{3}(x^2-1)$ indeterminata

102 $(x+1)^2=x^2-1$ R. [-1]

103 $(x+1)^3=(x+2)^3-3x(x+3)$ impossibile

104 $\frac{1}{3}x\left(\frac{1}{3}x-1\right)+\frac{5}{3}x\left(1+\frac{1}{3}x\right)=\frac{2}{3}x(x+3)$ R. [0]

105 $\frac{1}{2}\left(3x+\frac{1}{3}\right)-(1-x)+2\left(\frac{1}{3}x-1\right)=-\frac{3}{2}x+1$ R. $\left[\frac{23}{28}\right]$

106 $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)=x^2+\frac{1}{2}$ R. $\left[-\frac{1}{4}\right]$

107 $3+2x-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}+1\right)-\frac{3}{4}x=\frac{3}{4}x+\frac{x+3}{2}$ R. [4]

108 $\frac{1}{2}\left[\frac{x+2}{2}-\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{x+1}{2}\right]+\frac{1}{4}x=\frac{x-2}{4}-\left(x+\frac{2-x}{3}\right)$ R. $\left[-\frac{5}{2}\right]$

109 $2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=(x+1)(3x-1)-5x-\frac{1}{2}$ R. $\left[-\frac{9}{8}\right]$

110 $\frac{2(x-1)}{3}+\frac{x+1}{5}-\frac{3}{5}=\frac{x-1}{5}+\frac{7}{15}x$ R. $\left[\frac{13}{3}\right]$

111 $\frac{1}{2}(x-2)-\left(\frac{x+1}{2}-\frac{1+x}{2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{2-x}{6}+\frac{1+x}{3}$ impossibile

112 $-\left(\frac{1}{2}x+3\right)-\frac{1}{2}\left(x+\frac{5}{2}\right)+\frac{3}{4}(4x+1)=\frac{1}{2}(x-1)$ R. [2]

113 $\frac{(x+1)(x-1)}{9}-\frac{3x-3}{6}=\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{2-2x}{6}$ R. [1]

114 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^3-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-x(x+1)(x-1)=\frac{-5}{2}x(x+1)$ R. $\left[\frac{3}{20}\right]$

115 $\frac{1}{2}\left(3x-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3}(1+x)(1-x)+3\left(\frac{1}{3}x-1\right)^2=\frac{2}{3}x$ R. [5]

116 $(x-2)(x-3)-6=(x+2)^2+5$ R. x=-1

117 $(x-3)(x-4)-\frac{1}{3}(1-3x)(2-x)=\frac{1}{3}x-5\left(\frac{2x-9}{6}\right)$ R. $\left[\frac{23}{20}\right]$

118 $\frac{2w-1}{3}+\frac{w-5}{4}=\frac{w+1}{3}-4$ R. $\left[-\frac{25}{7}\right]$

119 $(2x-5)^2+2(x-3)=(4x-2)(x+3)-28x+25$ R. indeterminata

120 $\dfrac{(x-3)(x+3)+(x-2)(2-x)-3(x-2)}{\frac{1}{3}-3}=\dfrac{\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}x}{2}$ R. $\left[x=\frac{63}{23}\right]$

121 $2\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2-\frac{(x+2)(x-2)}{2}+2x=x+\frac{1}{2}$ R. $\left[x=\frac{7}{2}\right]$

122 $\left(1+\frac{1}{2}x\right)^3-2\left(\frac{1}{2}x-2\right)^2+\left(\frac{3x-1}{3}\right)^2-\left(1-\frac{1}{3}x\right)x+\frac{1}{3}x=\frac{1}{2}x\left(\frac{1}{2}x+1\right)\left(\frac{1}{2}x-1\right)+$ $+\frac{1}{3}(2x+1)^2+\frac{1}{4}x^2-\frac{5}{9}$ R. x=2

123 $(0,\bar{1}x-10)^2+0,1(x-0,2)+\left(\frac{1}{3}x+0,3\right)^2=\frac{10}{81}x^2+0,07$ R. $\left[x=\frac{9000}{173}\right]$

124 $5x+\frac{1}{6}-\left(\frac{2x+1}{2}\right)^2+\left(\frac{3x-1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}x+(2x-1)(2x+1)=(2x+1)^2+\frac{1}{36}$ R. $[x=-6]$

125 $\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x=\left(\frac{1}{2}x+1\right)^2$ R. $\left[x=-\frac{20}{3}\right]$

126 $\left(1-\dfrac{x+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right)\left(1+\dfrac{\frac{1}{2}x+1}{\frac{1}{2}-1}\right)+\left(\dfrac{\frac{1}{2}x+1}{\frac{1}{2}+1}-1\right)\cdot\dfrac{\frac{1}{2}+x}{\frac{1}{2}-1}-\dfrac{x\left(\frac{1}{2}x+1\right)}{\frac{1}{2}+1}=-\frac{5}{4}x^2-\frac{1}{3}x^2$ R. $\left[x=-\frac{5}{19}\right]$

127 $\frac{3}{20}+\frac{6x+8}{10}-\frac{2x-1}{12}+\frac{2x-3}{6}=\frac{x-2}{4}$ $x=-2$

128 $\frac{x^3-1}{18}+\frac{(x+2)^3}{9}=\frac{(x+1)^3}{4}-\frac{x^3+x^2-4}{12}$ $x=-\frac{3}{7}$

129 $\frac{2}{3}x+\frac{5x-1}{3}+\frac{(x-3)^2}{6}+\frac{1}{3}(x+2)(x-2)=\frac{1}{2}(x-1)^2$ $\quad x=\frac{2}{3}$

130 $\frac{5}{12}x-12+\frac{x-6}{5}-\frac{x-24}{6}=\frac{x+4}{8}-\left(\frac{5}{6}x-24\right)$ $\quad x=36$

131 $x+\frac{1}{2}=\frac{x+3}{3}-1$

132 $\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}x+\frac{1}{2}x$

133 $\frac{3}{2}=2x-\left[\frac{x-1}{3}-\left(\frac{2x+1}{2}-5x\right)-\frac{2-x}{3}\right]$

134 $\frac{x+5}{3}+3+\frac{2\cdot(x-1)}{3}=x+4$

135 $\frac{1}{5}x-1+\frac{2}{3}x-2=\frac{10}{15}+\frac{3}{5}x$

136 $\frac{1}{2}(x-2)^2+\frac{8x^2-25x+36}{18}+\frac{1}{9}(x-2)(x+3)=\frac{1}{6}(x+1)(x-4)$

137 Per una sola delle seguenti equazioni, definite in Z, l'insieme soluzione è vuoto. Per quale?

[A] $x=x+1$ [B] $x+1=0$ [C] $x-1=+1$ [D] $x+1=1$

138 Una sola delle seguenti equazioni è di primo grado in una sola incognita (x). Quale?

[A] $x+y=5$ [B] $x^2+1=45$ [C] $x-\frac{7}{89}=+1$ [D] $x+x^2=1$

139 Tra le seguenti una sola equazione non è equivalente alle altre. Quale?

[A] $\frac{1}{2}x-1=3x$ [B] $6x=x-2$ [C] $x-2x=3x$ [D] $3x=\frac{1}{2}(x-2)$

140 Da $8x=2$ si ottiene: [A] $x=-6$ [B] $x=4$ [C] $x=\frac{1}{4}$ [D] $x=-\frac{1}{4}$

141 Da $-9x=0$ si ottiene: [A] $x=9$ [B] $x=-\frac{1}{9}$ [C] $x=0$ [D] $x=\frac{1}{9}$

142 L'insieme soluzione dell'equazione $2\cdot(x+1)=5\cdot(x-1)-11$ è:

[A] $I.S.=\{-6\}$ [B] $I.S.=\{6\}$ [C] $I.S.=\left\{\frac{11}{3}\right\}$ [D] $I.S.=\left\{\frac{1}{6}\right\}$

Per ogni equazione, individua quali tra gli elementi dell'insieme indicato a fianco sono soluzioni:

143 $\frac{x+5}{2}+\frac{1}{5}=0 \quad Q=\left\{1,-5,7,-\frac{27}{5}\right\}$

144 $x-\frac{3}{4}x=4 \quad Q=\{1,-1,0,16\}$

145 $x(x+1)+4=5-2x+x^2 \quad Q=\left\{-9,3,\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right\}$

►5. Problemi di pimo grado in una incognita

Un po' di storia e qualche aneddoto

Sin dall'antichità l'uomo si è trovato di fronte a difficoltà pratiche, legate alla vita quotidiana e ha perciò messo a punto strategie per superarle.
Sembra che nell'antico Egitto le periodiche piene del Nilo abbiano spinto l'uomo a sviluppare la capacità di tracciare rette parallele, rette perpendicolari, di misurare il perimetro e l'area di particolari figure geometriche o viceversa di calcolare le misure dei lati di poligoni di dato perimetro o data area per poter ridefinire i confini degli appezzamenti di terreno.
Il *papiro di Rhind*, (dal nome dell'inglese A. H. Rhind che lo comprò a Luxor nel 1858), testo egizio scritto in ieratico, risalente al 1700 a.C., si autodefinisce "istruzioni per conoscere tutte le cose oscure" contiene più di 85 problemi con relativi metodi di soluzione riguardanti il calcolo della capacità di recipienti e di magazzini, la ricerca dell'area di appezzamenti di terreno e altre questioni aritmetiche.
Nel problema 24 del papiro, ad esempio, viene calcolato il mucchio quando esso ed il suo settimo sono uguali a 19. Mucchio è l'incognita del problema, indicata con il termine *aha* il cui segno è  .
Noi traduciamo la richiesta nell'equazione $x+\frac{1}{7}x=19$
Nel 1202 Leonardo Pisano, conosciuto col nome paterno di "filius Bonacci" o Fibonacci, pubblicò il *Liber Abaci* in cui, a partire dall'ottavo capitolo, presenta vari metodi algebrici per la risoluzione di problemi di matematica applicata, legati alla realtà dell'epoca, in particolare all'ambiente commerciale. I nuovi `algoritmi` presentati da Fibonacci, intendevano facilitare la risoluzione dei problemi di calcolo evitando l'utilizzo dell'abaco. Nel 1223 a Pisa, l'imperatore Federico II di Svevia, assistette a un singolare torneo tra matematici dell'epoca; il problema proposto era il seguente:

> "Quante coppie di conigli si ottengono in un anno (salvo i casi di morte) supponendo che ogni coppia dia alla luce un'altra coppia ogni mese e che le coppie più giovani siano in grado di riprodursi già al secondo mese di vita?".

Fibonacci vinse la gara dando al quesito una risposta così rapida da far persino sospettare che il torneo fosse truccato. La soluzione fu trovata tramite l'individuazione di una particolare successione di numeri, nota come successione di Fibonacci.
Secondo la leggenda, il grande matematico Carl Fiedrich Gauss già all'età di tre anni avrebbe corretto un errore di suo padre nel calcolo delle sue finanze. All'età di 10 anni fu autorizzato a seguire le lezioni di aritmetica di un certo Buttner. Un giorno, agli studenti particolarmente turbolenti, Buttner diede come compito di punizione il calcolo della somma dei primi 100 numeri, da 1 a 100. Poco dopo, sorprendendo tutti, il giovanissimo Carl diede la risposta esatta, "5050" . Si era accorto che mettendo in riga tutti i numeri da 1 a 100 e nella riga sottostante i numeri da 100 a 1, ogni colonna dava come somma 101; fece dunque il prodotto 100x101 e divise per 2, ottenendo facilmente il risultato: Buttner rimase sgomento.

►6. Risoluzione dei problemi

La risoluzione dei problemi …… serve ad acuire l'ingegno e a dargli la facoltà di penetrare l'intera ragione di tutte le cose. (R. Descartes)

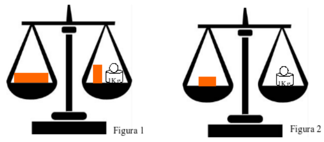
I problemi che possono presentarsi nel corso degli studi o nell'attività lavorativa sono di diversa natura: di tipo economico, scientifico, sociale, possono riguardare insiemi numerici o figure geometriche. La matematica ci può aiutare a risolvere i problemi quando essi possono essere tradotti in "forma matematica", quando cioè è possibile trascrivere in simboli le relazioni che intercorrono tra le grandezze del problema.
Analizzeremo problemi di tipo algebrico o geometrico, che potranno essere formalizzati attraverso equazioni di primo grado in una sola incognita. Prima di buttarci alla risoluzione del problema, procediamo a:

- una lettura "attenta" del testo al fine di individuare l'ambiente del problema, le parole chiave, i dati e le informazioni implicite, l'obiettivo;
- la scelta della grandezza incognita e la descrizione dell'insieme in cui si ricerca il suo valore, ragionando sull'obiettivo del problema (condizioni sull'incognita);
- la traduzione in "forma matematica" delle relazioni che intercorrono tra i dati e l'obiettivo, cioè l'individuazione dell'equazione risolvente;
- la risoluzione dell'equazione trovata;
- il confronto tra la soluzione trovata e le condizioni poste su di essa.

Problema 1

Un mattone pesa un chilo più mezzo mattone. Quanto pesa un mattone?

La situazione può essere materialmente descritta con una figura.
Togliamo da ogni piatto della bilancia mezzo mattone, la bilancia è ancora in equilibrio come mostra la figura 2, da ciò possiamo dedurre che mezzo mattone pesa un chilo. Il mattone intero pesa dunque due chili.
Risolviamo ora il problema seguendo la procedura sopra suggerita:



dati
peso di un mattone = peso di mezzo mattone + 1kg

obiettivo
peso del mattone

Procedura risolutiva:
Come incognita del problema possiamo scegliere il peso del mattone: la indichiamo con p.
Il valore di p dovrà essere un numero positivo.
L'equazione risolvente è la traduzione con formalismo matematico dell'unica relazione contenuta nel testo del problema: $p=\frac{1}{2}p+1$.

Risolviamo l'equazione: $p-\frac{1}{2}p=1 \rightarrow \frac{1}{2}p=1 \rightarrow p=2(Kg)$

La soluzione ottenuta è accettabile; il problema è determinato.

Problema 2

Aggiungendo ad un numero naturale i suoi tre quarti, si ottiene il suo doppio aumentato di 10. Qual è il numero?

L'ambiente del problema è numerico: si cerca un numero naturale. Indichiamo con *n* l'incognita cerchiamo quindi $n \in \mathbb{N}$. La lettura attenta del testo mette in luce le operazioni che dobbiamo eseguire sull'incognita e che traduciamo nei dati:

dati: $n+\frac{3}{4}n=2n+10$ obiettivo: $n \in \mathbb{N}$

Procedura risolutiva
L'equazione risolvente è già indicata nei dati $n+\frac{3}{4}n=2n+10$.

Per risolverla moltiplichiamo ambo i membri per 4, otteniamo:
$4n+3n-8n=40 \rightarrow -n=40 \rightarrow n=-40$

La soluzione non è accettabile per le condizioni poste; il problema non ha soluzione.

Problema 3

Il I° gennaio 1990 Chiara aveva il doppio dell'età di Aldo; il 1° gennaio 2000 Chiara aveva vent'anni più di Aldo. Quale sarà l'età di Chiara il I° gennaio 2010?

Leggendo attentamente il problema notiamo che le incognite sono due: l'età di Chiara e l'età di Aldo.
Indichiamo perciò con ***a*** l'età di Chiara al 1990 e con ***p*** quella di Aldo.
Nel 2000 la loro età sarà aumentata di 10 anni. Naturalmente la soluzione del problema sarà nell'insieme dei numeri naturali. Scriviamo dati e obiettivo usando il formalismo matematico:

dati
nel 1990: $a=2p$
nel 2000: $a+10=(p+10)+20$

obiettivo
? età Chiara nel 2010

Procedura risolutiva
Osserviamo che una volta determinata l'età di Chiara nel 1990, basterà aggiungere a questa 20 per ottenere la soluzione, pertanto l'età di Chiara nel 2010 è a+20.
Trasformiamo la seconda relazione riportata nei dati sostituendo l'informazione relativa al 1990, si ottiene $2p+10=p+10+20 \rightarrow 2p-p=20 \rightarrow p=20$
L'età di Aldo nel 1990 era 20, quindi a=40.
Infine, l'età di Chiara nel 2010 è 40+20=60.
La soluzione è accettabile; il problema è determinato.

Problema 4

Calcolare l'area di un rettangolo in cui l'altezza supera di 8m $\frac{1}{3}$ della base e il perimetro è $\frac{20}{7}$ della base stessa.

Il problema è di tipo geometrico e riguarda un rettangolo. Facendo riferimento alla figura abbiamo:



dati

$AD=\frac{1}{3}AB+8$

$2p=\frac{20}{7}AB$

obiettivo

? Area (ABCD)

Procedura risolutiva:

$\text{Area (ABCD)}=\text{misura base}\cdot\text{misura altezza}=\overline{AB}\cdot\overline{AD}$

Dobbiamo dunque determinare queste due misure. I dati del problema indicano che la misura dell'altezza dipende da quella della base; una volta trovata questa misura basta farne un terzo e aggiungere 8 per avere quella dell'altezza; questo ragionamento ci fa scegliere come incognita $\overline{AB}=x$ con x numero reale positivo.

Traduciamo con formalismo matematico la prima e la seconda relazione contenuta nei dati: $\overline{AD}=\frac{1}{3}x+8$; $2p=\frac{20}{7}x$; sappiamo che il perimetro di un rettangolo è il doppio della somma della base con l'altezza. Riscriviamo con linguaggio matematico anche questa relazione: $2\cdot\left(x+\frac{1}{3}x+8\right)=\frac{20}{7}x$ che risulta l'equazione risolvente.

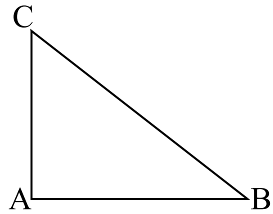
Svolgiamo i calcoli e otteniamo $4x=21\cdot 16 \rightarrow x=84 \rightarrow \overline{AB}=84$ e quindi $\overline{AD}=36$.

Avendo ottenuto le misure della base e dell'altezza calcoliamo Area (ABCD)=36 ·84=3024m^2.

Problema 5

In un triangolo rettangolo il perimetro è 120cm e un cateto è 3/5 dell'ipotenusa. Determinare l'area del triangolo.

Il problema è di tipo geometrico e riguarda un triangolo rettangolo. Rappresentiamo il triangolo:



dati

$C\hat{A}B=\text{angolo retto}$

$2p=120$

$AC=\frac{3}{5}CB$

obiettivo

?Area (ABC)

Procedura risolutiva

Area (ABC) = $\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AC}$

Per calcolare l'area, occorre determinare la misura dei cateti del triangolo rettangolo; i dati del problema ci danno una relazione tra la misura di un cateto e la misura dell'ipotenusa; conosciamo anche il perimetro del triangolo.

Scegliamo come incognita la misura in cm di CB, cioè $\overline{CB}=x$ con $x\in\mathbb{R}^+$

Formalizziamo i dati: $\overline{CB}=x$; $\overline{AC}=\frac{3}{5}x$; $\overline{AB}+x+\frac{3}{5}x=120$ (*)

Per poter scrivere una equazione che ci permetta di determinare il valore dell'incognita ci manca la misura di AB. Sembra che il problema sia privo di una informazione. Tuttavia, il triangolo dato è rettangolo quindi tra i suoi lati sussiste la relazione del teorema di Pitagora: $\overline{CB}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$.

Pertanto possiamo determinare la misura di AB: $\overline{AB}=\sqrt{\overline{CB}^2-\overline{AC}^2}=\sqrt{x^2-\left(\frac{3}{5}x\right)^2}=\sqrt{\frac{16}{25}x^2}=\frac{4}{5}x$

Con questo dato riscriviamo la (*) che risulta essere l'equazione risolvente del problema

$\frac{4}{5}x+x+\frac{3}{5}x=120 \rightarrow 12x=120\cdot 5 \rightarrow x=50 \rightarrow \overline{CB}=50$

Quindi $\overline{AC}=30\text{cm}$ e $\overline{AB}=40\text{cm}$, l'area: $Area(ABC)=\frac{30\cdot 40}{2}=600\text{cm}^2$.

Problemi con i numeri

146 Determina due numeri, sapendo che la loro somma vale 70 e il secondo supera di 16 il doppio del primo. [18, 52]

147 Determina due numeri, sapendo che il secondo *supera* di 17 il *triplo* del primo e che la loro somma è 101. [21, 80]

148 Determinare due numeri dispari consecutivi sapendo che il minore supera di 10 i 3/7 del maggiore. [19, 21]

149 Sommando 15 al doppio di un numero si ottengono i 7/2 del numero stesso. Qual è il numero? [10]

150 Determinare due numeri consecutivi sapendo che i 4/9 del maggiore superano di 8 i 2/13 del minore.

151 Se ad un numero sommiamo il suo doppio, il suo triplo, il suo quintuplo e sottraiamo 21 otteniamo 100. Qual è il numero? [11]

152 Trova il prodotto tra due numeri, sapendo che: se al primo numero sottraiamo 50 otteniamo 50 meno il primo numero; se al doppio del secondo aggiungiamo il suo consecutivo, otteniamo 151. [2500]

153 Se a 1/25 sottraiamo un numero, otteniamo la quinta parte del numero stesso. Qual è questo numero? [1/30]

154 Carlo ha 152 caramelle e vuole dividerle con le sue due sorelline. Quante caramelle resteranno a Carlo se le ha distribuite in modo che ogni sorellina ne abbia la metà delle sue? [76]

155 Se a 5/2 sottraiamo un numero, otteniamo il numero stesso aumentato di 2/3. Di quale numero si tratta? [11/12]

156 Se ad un numero sottraiamo 34 e sommiamo 75, otteniamo 200. Qual è il numero? [159]

157 Se alla terza parte di un numero sommiamo 45 e poi sottraiamo 15 otteniamo 45. Qual è il numero? [45]

158 Se ad un numero sommiamo il doppio del suo consecutivo otteniamo 77. Qual è il numero? [25]

159 Se alla terza parte di un numero sommiamo la sua metà otteniamo il numero aumentato di 2. Qual è il numero? [-12]

160 Il doppio di un numero equivale alla metà del suo consecutivo più 1. Qual è il numero? [1]

161 Un numero è uguale al suo consecutivo meno 1. Trova il numero. [indeterminato]

162 La somma tra un numero e il suo consecutivo è uguale al numero aumentato di 2. Trova il numero. [1]

163 La somma tra un numero ed il suo consecutivo aumentato di 1 è uguale a 18. Qual è il numero? [8]

164 La somma tra un numero e lo stesso numero aumentato di 3 è uguale a 17. Qual è il numero?

165 La terza parte di un numero aumentata di 3 è uguale a 27. Trova il numero. [72]

166 La somma tra due numeri X e Y vale 80. Del numero X sappiamo che questo stesso numero aumentato della sua metà è uguale a 108. [72, 8]

167 Sappiamo che la somma fra tre numeri (X,Y,Z) è uguale a 180. Il numero X è uguale a se stesso diminuito di 50 e poi moltiplicato per 6. Il numero Y aumentato di 60 è uguale a se stesso diminuito di 40 e poi moltiplicato per 6, trova X,Y,Z. [60,60,60]

168 La somma tra la terza parte di un numero e la sua quarta parte è uguale alla metà del numero aumentata di 1. Trova il numero. [12]

169 Determina due numeri interi consecutivi tali che la differenza dei loro quadrati è uguale a 49.

170 Trova tre numeri dispari consecutivi tali che la loro somma sia uguale a 87.

171 Trova cinque numeri pari consecutivi tali che la loro somma sia uguale a 1000.

172 Determinare il numero naturale la cui metà, aumentata di 20, è uguale al triplo del numero stesso diminuito di 95. [46]

173 Trova due numeri dispari consecutivi tali che la differenza dei loro cubi sia uguale a 218. [5; 7]

174 Trova un numero tale che se calcoliamo la differenza tra il quadrato del numero stesso e il quadrato del precedente otteniamo 111. [56]

175 Qual è il numero che sommato alla sua metà è uguale a 27?

176 Moltiplicando un numero per 9 e sommando il risultato per la quarta parte del numero si ottiene 74. Qual è il numero? [8]

177 La somma di due numeri pari consecutivi è 46, trova i due numeri.

178 La somma della metà di un numero con la sua quarta parte è uguale al numero stesso diminuito della sua quarta parte. Qual è il numero? [indeterminato]

179 Di Y sappiamo che il suo triplo è uguale al suo quadruplo diminuito di due, trova Y. [2]

180 Il numero Z aumentato di 60 è uguale a se stesso diminuito di 30 e moltiplicato per 4.

181 Determinare un numero di tre cifre sapendo che la cifra delle centinaia è 2/3 di quella delle unità, la cifra delle decine è 1/3 delle unità e la somma delle tre cifre è 12. [426]

182 Dividere il numero 576 in due parti tali che 5/6 della prima parte meno ¾ della seconda parte sia uguale a 138. [216 ; 360]

183 Determina due numeri naturali consecutivi tali che la differenza dei loro quadrati `e uguale a 49. [R. 24 ; 25]

Problemi dalla realtà

184 Luca e Andrea posseggono rispettivamente 200 euro e 180 euro; Luca spende 10 euro al giorno e Andrea 8 euro al giorno. Dopo quanti giorni avranno la stessa somma? [10]

185 Ad un certo punto del campionato la Fiorentina ha il doppio dei punti della Juventus e l'Inter ha due terzi dei punti della Fiorentina. Sapendo che in totale i punti delle tre squadre sono 78, determinare i punti delle singole squadre.[36, 24, 18]

186 Per organizzare una gita collettiva, vengono affittati due pulmini dello stesso modello, per i quali ciascun partecipante deve pagare 12 euro. Sui pulmini restano, in tutto, quattro posti liberi. Se fossero stati occupati anche questi posti, ogni partecipante avrebbe risparmiato 1,50 euro. Quanti posti vi sono su ogni pulmino? ("La Settimana enigmistica"). [16]

187 Un rubinetto, se aperto, riempie una vasca in 5 ore; un altro rubinetto riempie la stessa vasca in 7 ore. Se vengono aperti contemporaneamente, quanto tempo ci vorrà per riempire un sesto della vasca?

188 L'età di Antonio è i 3/8 di quella della sua professoressa. Sapendo che tra 16 anni l'età della professoressa sarà doppia di quella di Antonio, quanti anni ha la professoressa? [64]

189 Policrate, tiranno di Samos, domanda a Pitagora il numero dei suoi allievi. Pitagora risponde che: ``la metà studia le belle scienze matematiche; l'eterna Natura è l'oggetto dei lavori di un quarto; un settimo si esercita al silenzio e alla meditazione; vi sono inoltre tre donne." Quanti allievi aveva Pitagora? ("Matematica dilettevole e curiosa")

190 Trovare un numero di due cifre sapendo che la cifra delle decine è inferiore di 3 rispetto alla cifra delle unità e sapendo che invertendo l'ordine delle cifre e si sottrae il numero stesso, si ottiene 27. ("Algebra ricreativa")

191 Al cinema ``Matematico" hanno deciso di aumentare il biglietto del 10%; il numero degli spettatori è calato, però, del 10%. E' stato un affare?

192 A mezzogiorno le lancette dei minuti e delle ore sono sovrapposte. Quando saranno di nuovo sovrapposte?

193 Con due qualità di caffè da 3 euro/kg e 5 euro/kg si vuole ottenere un quintale di miscela da 3,25 euro/kg. Quanti kg della prima e quanti della seconda qualità occorre prendere?

194 In un supermercato si vendono le uova in due diverse confezioni, che ne contengono rispettivamente 10 e 12. In un giorno è stato venduto un numero di contenitori da 12 uova doppio di quelli da 10, per un totale di 544 uova. Quanti contenitori da 10 uova sono stati venduti? [16]

195 Ubaldo, per recarsi in palestra, passa sui mezzi di trasporto 20 minuti, tuttavia il tempo totale per completare il tragitto è maggiore a causa dei tempi di attesa. Sappiamo che Ubaldo utilizza 3 mezzi, impiega i 3/10 del tempo totale per l'autobus, i 3/5 del tempo totale per la metropolitana e 10 minuti per il treno. Quanti minuti è costretto ad aspettare i mezzi di trasporto? [*Poni x il tempo di attesa*, R. 80']

196 Anna pesa un terzo di Gina e Gina pesa la metà di Alfredo. Se la somma dei tre pesi è 200 kg, quanto pesa Anna? [20kg]

197 In una partita a dama dopo i primi 10 minuti sulla scacchiera restano ancora 18 pedine. Dopo altri 10 minuti un giocatore perde 4 pedine nere e l'altro 6 pedine bianche ed entrambi rimangono con lo stesso numero di pedine. Calcolate quante pedine aveva ogni giocatore dopo i primi 10 minuti di gioco.

198 Due numeri naturali sono tali che la loro somma è 16 e il primo, aumentato di 1, è il doppio del secondo diminuito di 3. Trovare i due numeri. [*Impossibile*]

199 Un dvd recorder ha due modalità di registrazione: SP e LP. Con la seconda modalità è possibile registrare il doppio rispetto alla modalità SP. Con un dvd dato per 2 ore in SP, come è possibile registrare un film della durata di 3 ore e un quarto? Se voglio registrare il più possibile in SP (di qualità migliore rispetto all'altra) quando devo necessariamente passare all'altra modalità LP?

200 Tizio si reca al casinò e gioca tutti i soldi che ha; dopo la prima giocata, perde la metà dei suoi soldi. Gli vengono prestati 2 euro e gioca ancora una volta tutti i suoi soldi; questa volta vince e i suoi averi vengono quadruplicati. Torna a casa con 100 euro. Con quanti soldi era arrivato al casinò? [46€]

201 I sette nani mangiano in tutto 127 bignè; sapendo che il secondo ne ha mangiati il doppio del primo, il terzo il doppio del secondo e così via. quanti bignè ha mangiato ciascuno di loro? [1, 2, 4, 8, 16...]

202 Babbo Natale vuole mettere in fila le sue renne in modo tale che ogni fila abbia lo stesso numero di renne. Se le mette in fila per quattro le file sono due di meno rispetto al caso in cui le mette in fila per tre. Quante sono le renne? [24]

203 Cinque fratelli si devono spartire un'eredità di 180000 euro in modo tale che ciascuno ottenga 8000 euro in più del fratello immediatamente minore. Quanto otterrà il fratello più piccolo? [20.000]

204 Giovanni ha tre anni in più di Maria. Sette anni fa la somma delle loro età era 19. Quale età hanno attualmente? [15, 18]

205 Lucio ha acquistato un paio di jeans e una maglietta spendendo complessivamente 518 euro. Calcolare il costo dei jeans e quello della maglietta, sapendo che i jeans costano 88 euro più della maglietta. [303 €; 215€]

206 Francesca ha il triplo dell'età di Anna. Fra sette anni Francesca avrà il doppio dell'età di Anna. Quali sono le loro età attualmente. [7, 21]

207 In una fattoria ci sono tra polli e conigli 40 animali con 126 zampe. Quanti sono i conigli? [23]

208 Due anni fa ho comprato un appartamento. Ho pagato alla consegna 1/3 del suo prezzo. Dopo un anno 3/4 della rimanenza, oggi ho saldato il debito sborsando 40.500 €. Quale è stato il prezzo dell'appartamento? [243.000 €]

209 Un ciclista pedala in una direzione a 30 km/h, un marciatore parte a piedi dallo stesso punto e alla stessa ora e va nella direzione contraria a 6 km/h. Dopo quanto tempo saranno lontani 150 km? [250']

210 Una banca mi offre il 2% di interesse su quanto depositato all'inizio dell'anno. Alla fine dell'anno vado a ritirare i soldi depositati più l'interesse: se ritiro € 20.400 quanto avevo depositato all'inizio? Quanto dovrebbe essere la percentuale di interesse per ricevere € 21.000 depositando i soldi calcolati al punto precedente? [€ 20.000; 5%]

211 Si devono distribuire 140.800 euro fra 11 persone che hanno vinto un concorso. Alcune di esse rinunciano alla vincita e quindi la somma viene distribuita tra le persone rimanenti. Sapendo che ad ognuna di esse sono stati dati 4.800 euro in più, quanto percepisce ogni persona? [17600 €]

212 Un treno parte da una stazione e viaggia alla velocità costante di 120km/h. Dopo 80 minuti parte un secondo treno dalla stessa stazione e nella stessa direzione alla velocità di 150km/h. Dopo quanti km il secondo raggiungerà il primo? [800 km]

213 Un padre ha 32 anni, il figlio 5. Dopo quanti anni l'età del padre sarà 10 volte maggiore di quella del figlio? Si interpreti il risultato ottenuto. [2 anni fa]

214 Uno studente compra 4 penne, 12 quaderni e 7 libri per un totale di 180 euro. Sapendo che un libro costa quanto 8 penne e che 16 quaderni costano quanto 5 libri, determinare il costo dei singoli oggetti. [€2 penna; €16 libro; € 5 quaderno]

215 Un mercante va ad una fiera e riesce a raddoppiarsi il proprio capitale e vi spende 500 euro; ad una seconda fiera triplica il suo avere e spende 900 euro; ad una terza poi quadruplica il suo denaro e spende 1200 euro. Dopo ci`o gli `e rimasto 800 euro. Quanto era all'inizio il suo capitale? [483,33]

216 L'epitaffio di Diofanto. "Viandante! Qui furono sepolti i resti di Diofanto. E i numeri possono mostrare, oh, miracolo! Quanto lunga fu la sua vita, la cui sesta parte costituì la sua felice infanzia. Aveva trascorso ormai la dodicesima parte della sua vita, quando di peli si copr`ı la sua guancia. E la settima parte della sua esistenza trascorse in un matrimonio senza figli. Passò ancora un quinquennio e gli fu fonte di gioia la nascita del suo primogenito, che donò il suo corpo, la sua bella esistenza alla terra, la quale durò solo la metà di quella di suo padre. Il quale, con profondo dolore discese nella sepoltura, essendo sopravvenuto solo quattro anni al proprio figlio. Dimmi quanti anni visse Diofanto." [84]

217 Policrate, tiranno di Samos, domanda a Pitagora il numero dei suoi allievi. Pitagora risponde che: "la metà studia le belle scienze matematiche; l'eterna Natura `e l'oggetto dei lavori di un quarto; un settimo si esercita al silenzio e alla meditazione; vi sono inoltre tre donne." Quanti allievi aveva Pitagora? [28]

218 * Un cane cresce ogni mese di 1/3 della sua altezza. Se dopo 3 mesi dalla nascitaè altro 64 cm, quanto era alto appena nato? [27cm]

219 * La massa di una botte colma di vino è di 192kg mentre se la botte è riempita di vino per un terzo la sua massa è di 74 kg. Trovare la massa della botte vuota. [15 kg]

220 * Carlo e Luigi percorrono in auto, a velocità costante un percorso di 400 chilometri ma in senso opposto. Sapendo che partono alla stessa ora dagli estremi del percorso e che Carlo corre a 120 km/h mentre Luigi viaggia a 80 km/h, calcolare dopo quanto tempo si incontrano. [2 ore]

221 * Un fiorista ordina dei vasi di stelle di Natale che pensa di rivendere a 12 euro al vaso con un guadagno complessivo di 320 euro. Le piantine però sono più piccole del previsto, per questo è costretto a rivendere ogni vaso a 7 euro rimettendoci complessivamente 80 euro. Quanti sono i vasi comprati dal fiorista? [80]

222 * Un contadino possiede 25 tra galline e conigli; determinare il loro numero sapendo che in tutto hanno 70 zampe. [15 galline e 10 conigli]

223 * Un commerciante di mele e pere carica nel suo autocarro 130 casse di frutta per un peso totale di 23,5 quintali. Sapendo che ogni cassa di pere e mele pesa rispettivamente 20 kg e 15 kg, determinare il numero di casse per ogni tipo caricate. [80; 50]

224 * Determina due numeri uno triplo dell'altro sapendo che dividendo il maggiore aumentato di 60 per l'altro diminuito di 20 si ottiene 5. [240; 80]

225 * Un quinto di uno sciame di api si posa su una rosa, un terzo su una margherita. Tre volte la differenza dei due numeri vola sui fiori di pesco, e rimane una sola ape che si libra qua e là nell'aria. Quante sono le api dello sciame? [15]

226 * Per organizzare un viaggio di 540 persone un'agenzia si serve di 12 autobus, alcuni con 40 posti a sedere e altri con 52; quanti sono gli autobus di ciascun tipo? [7 da 40 posti e 5 da 52]

227 * Il papà di Paola ha venti volte l'etàa che lei avrà tra due anni e la mamma, cinque anni più giovane del marito, ha la metà dell'età che avrà quest'ultimo fra venticinque anni; dove si trova Paola oggi?

Problemi di geometria

228 In un triangolo rettangolo uno degli angoli acuti è 3/7 dell'altro angolo acuto. Quanto misurano gli angoli del triangolo? [63°, 27°, 90°]

229 In un triangolo un angolo è i 3/4 del secondo angolo, il terzo angolo supera di 10° la somma degli altri due. Quanto misurano gli angoli?
[36°,43; 48°,57; 95°]

230 In un triangolo ABC, l'angolo in A è doppio dell'angolo in B e l'angolo in C è il doppio dell'angolo in B. Determina i tre angoli.

231 Un triangolo isoscele ha il perimetro di 39 detrermina le lunghezze dei lati del triangolo sapendo che la base è 3/5 del lato.

232 Un triangolo isoscele ha il perimetro di 122m, la base di 24m. Quanto misura ciascuno dei due lati obliqui congruenti? [49m]

233 Un triangolo isoscele ha il perimetro di 188cm, la somma dei due lati obliqui supera di 25cm i 2/3 della base. Calcola la lunghezza dei lati.
[97,8cm; 45,1cm; 45,1cm]

234 In un triangolo ABC di perimetro 186cm il lato AB è 5/7 di BC e BC è 3/7 di AC. Quanto misurano i lati del triangolo?
[32,82cm; 45,95cm; 107,22cm]

235 Un trapezio rettangolo ha la base minore che è 2/5 della base maggiore, l'altezza è 5/4 della base minore. Sapendo che il perimetro è 294,91m, calcola l'area del trapezio. [4235cm^2]

236 Determina l'area di un rettangolo che la base che è 2/3 dell'altezza, mentre il perimetro è 144cm.

237 Un trapezio isoscele ha la base minore pari a 7/13 della base maggiore, il lato obliquo è pari ai 5/6 della differenza tra le due basi. Sapendo che il perimetro misura 124cm, calcola l'area del trapezio.
[683,38cm^2]

238 Il rettangolo ABCD ha il perimetro di 78cm, inoltre sussiste la seguente relazione tra i lati: $\bar{AD}=\frac{8}{5}\bar{AB}+12\text{cm}$ .Calcola l'area del rettangolo.
[297,16cm^2]

239 Un rettangolo ha il perimetro che misura 240cm, la base è tripla dell'altezza. Calcola l'area del rettangolo. [2700 cm^2]

240 In un rettangolo l'altezza supera di 3cm i 3/4 della base, inoltre i 3/2 della base hanno la stessa misura dei 2/3 dell'altezza. Calcola le misura della base e dell'altezza. [2; 9/2]

241 In un triangolo isoscele la base è gli 8/5 del lato ed il perimetro misura cm 108. Trovare l'area del triangolo e la misura dell'altezza relativa ad uno dei due lati obliqui. [432cm^2; 28,8cm]

242 In un rombo la differenza tra le diagonali è di cm.3. Sapendo che la diagonale maggiore è 4/3 della minore, calcolare il perimetro del rombo. [30cm]

243 Determinare le misure delle dimensioni di un rettangolo, sapendo che la minore è uguale ad 1/3 della maggiore e che la differenza tra il doppio della minore e la metà della maggiore è di cm.10. Calcolare inoltre il lato del quadrato avente la stessa area del rettangolo dato.
$[60\text{cm}, 20\text{cm}, 20\sqrt{3}\,cm]$

244 Antonello e Gianluigi hanno avuto dal padre l'incarico di arare due campi, l'uno di forma quadrata, e l'altro rettangolare. "Io scelgo il campo quadrato - dice Antonello, - dato che il suo perimetro è di 4 metri inferiore a quello dell'altro". "Come vuoi! - commenta il fratello - Tanto, la superficie è la stessa, dato che la lunghezza di quello rettangolare è di 18 metri superiore alla larghezza". Qual è l'estensione di ciascun campo? [1600]

245 In un trapezio rettangolo il lato obliquo e la base minore hanno la stessa lunghezza. La base maggiore supera di 7 cm i 4/3 della base minore. Calcolare l'area del trapezio sapendo che la somma delle basi è 42 cm. [189cm^2]

246 L'area di un trapezio isoscele è 168cm^2, l'altez-za è 8 cm, la base minore è 5/9 della maggiore. Cal-colare le misure delle basi, del perimetro del trapezio e delle sue diagonali. [27cm; 15cm; 62cm; 22,47cm]

247 Le due dimensioni di un rettangolo differiscono di cm 4. Trovare la loro misura sapendo che aumentandole entrambe di cm 3 l'area del rettangolo aumenta di cm^2 69. [12cm; 8cm]

248 In un quadrato ABCD il lato misura 12 cm. Detto M il punto medio del lato AB, determinare sul lato opposto CD un punto N tale che l'area del trapezio AMND sia metà di quella del trapezio MBCN. [DN=2cm]

249 Nel rombo ABCD la somma delle diagonali è 20 cm. ed il loro rapporto è 2/3. Determinare sulla diagonale maggiore AC un punto P tale che l'area del triangolo APD sia metà di quella del triangolo ABD. [AP=6cm]

250 In un rettangolo ABCD si sa che $\overline{AB}=91m$ *e* $\overline{BC}=27m$; dal punto E del lato AB, traccia la perpendicolare a DC e indica con F il punto d'intersezione con lo stesso lato. Determina la misura di AE, sapendo che $\text{Area}(AEFD)=\frac{3}{4}\text{Area}(EFCB)$.

Gli esercizi indicati con * sono tratti da Matematica 1, Dipartimento di Matematica, ITIS V.Volterra, San Donà di Piave, Versione [11-12] [S-A11], pagg. 90; licenza CC, BY-NC-BD, per gentile concessione dei proff. che hanno reddatto il libro. Il libro è scaricabile da http://www.istitutovolterra.it/dipartimenti/matematica/dipmath/docs/M1_1112.pdf

MATEMATICA C3 -ALGEBRA 1

5. SCOMPOSIZIONI E FRAZIONI



Wicker Composition photo bby: Cobalt123
taken from: http://www.flickr.com/photos/cobalt/394252539/

Indice

►1. Scomposizione in fattori

Scomporre un polinomio in fattori significa scrivere il polinomio come il prodotto di polinomi e monomi che moltiplicati tra loro danno come risultato il polinomio stesso. Si può paragonare la scomposizione in fattori di un polinomio alla scomposizione in fattori dei numeri naturali.

36	2
18	3
6	3
2	2
1	

Per esempio, scomporre il numero 36 significa scriverlo come $2^2 \cdot 3^2$ dove 2 e 3 sono i suoi fattori primi. Anche 36=9·4 è una scomposizione, ma non è in fattori primi. Allo stesso modo un polinomio va scomposto in fattori non ulteriormente scomponibili che si chiamano irriducibili.

Il polinomio $3a^3b^2-3ab^4$ si può scomporre in fattori in questo modo $3ab^2(a-b)(a+b)$, infatti eseguendo i prodotti si ottiene $3ab^2(a-b)(a+b)=3ab^2(a^2+ab-ba-b^2)=3ab^2(a^2-b^2)=3a^3b^2-3ab^4$.
La scomposizione termina quando non è possibile scomporre ulteriormente i fattori individuati.
Come per i numeri la scomposizione in fattori dei polinomi identifica il polinomio in maniera univoca (a meno di multipli).

DEFINIZIONE. Un polinomio si dice **riducibile** (scomponibile) se può essere scritto come prodotto di due o più polinomi (detti fattori) di grado maggiore di zero. In caso contrario esso si dirà **irriducibile**.

La caratteristica di un polinomio di essere irriducibile dipende dall'insieme numerico al quale appartengono i coefficienti del polinomio; uno stesso polinomio può essere irriducibile nell'insieme dei numeri razionali ma riducibile in quello dei numeri reali o ancora in quello dei complessi.
Dalla definizione consegue che un polinomio di primo grado è irriducibile.

DEFINIZIONE. La scomposizione in fattori di un polinomio è la sua scrittura come prodotto di fattori irriducibili.

1 Associa le espressioni a sinistra con i polinomi a destra:

$(a+2b)^2$	$2a^2-4ab+3ab-6b^2$
$3ab^2(a^2-b)$	$a^2+4ab+4b^2$
$(2a+3b)(a-2b)$	$9a^2-b^2$
$(3a-b)(3a+b)$	$3a^3b^2-3ab^3$
$(a+b)^3$	$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$
$(a+b+c)^2$	$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

►2. Raccoglimento totale a fattore comune

Questo è il primo metodo che si deve cercare di utilizzare per scomporre un polinomio. Il metodo si basa sulla proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione.
Prendiamo in considerazione il seguente prodotto: $a(x+y+z)=ax+ay+az$. Il nostro obiettivo è ora quello di procedere da destra verso sinistra, cioè avendo il polinomio $ax+ay+az$ come possiamo fare per individuare il prodotto che lo ha generato? In questo caso semplice possiamo osservare che i tre monomi contengo tutti la lettera *a*, che quindi si può mettere in comune, o come anche si dice "in evidenza". Perciò scriviamo $ax+ay+az=a(x+y+z)$.

Esempio

- $3a^2b(2a^3-5b^2-7c)$
  $=3a^2b(2a^3)+3a^2b(-5b^2)+3a^2b(-7c)=6a^5b-15a^2b^3-21a^2bc$

L'ultima uguaglianza, letta da destra verso sinistra, è il raccoglimento totale a fattore comune.
Partendo da $6a^5b-15a^2b^3-21a^2bc$ possiamo notare che i coefficienti numerici 6, 15 e 21 hanno il 3 come fattore in comune. Notiamo anche che la lettera *a* è in comune, come la lettera *b*. Raccogliendo tutti i fattori comuni si avrà il prodotto $3a^2b(2a^3-5b^2-7c)$ di partenza .

Procedura per mettere in evidenza il fattore comune

1.Trovare il M.C.D. di tutti i termini che formano il polinomio: tutti i fattori in comune con l'esponente minimo con cui compaiono.

2. Scrivere il polinomio come prodotto del M.C.D. per il polinomio ottenuto, dividendo ciascun monomio del polinomio di partenza per il M.C.D.

3. Verificare la scomposizione eseguendo la moltiplicazione per vedere se il prodotto dà come risultato il polinomio da scomporre.

Esempi

- $5a^2x^2-10ax^5$

Tra i coefficienti numerici il fattore comune è 5.
Tra la parte letterale sono in comune le lettere *a* e *x*, la *a* con esponente 1, la *x* con esponente 2.
Pertanto il M.C.D. è $5ax^2$
Passiamo quindi a scrivere $5a^2x^2-10ax^5=5ax^2(\dots\dots\dots)$
Nella parentesi vanno i monomi che si ottengono dalle divisioni $5a^2x^2:5ax^2=a$ e $-10ax^5:5ax^2=-2x^3$
In definitiva: $5a^2x^2-10ax^5=5ax^2(a-2x^3)$

- $10x^5y^3z-15x^3y^5z-20x^2y^3z^2$

Trovo tutti i fattori comuni con l'esponente minore per formare il M.C.D
$M.C.D.=5x^2y^3z$
Divido ciascun termine del polinomio per $5x^2y^3z$:
$10x^5y^3z:5x^2y^3z=2x^3$
$-15x^3y^5z:5x^2y^3z=-3xy^2$
$-20x^2y^3z^2:5x^2y^3z=-4z$
Il polinomio si può allora scrivere come $5x^2y^3z\cdot(2x^3-3xy^2-4z)$
Il fattore da raccogliere a fattore comune può essere scelto con il segno "+" o con il segno "-". Nell'esempio precedente è valida anche la seguente scomposizione:
$10x^5y^3z-15x^3y^5z-20x^2y^3z^2=-5x^2y^3z\cdot(-2x^3+3xy^2+4z)$

- $-8x^2y^3+10x^3y^2$

Poiché il primo termine è negativo possiamo mettere a fattore comune un numero negativo.
Tra 8 e 10 il M.C.D. è 2.
Tra x^2y^3 e x^3y^2 mettiamo a fattore comune le lettere x e y, entrambe con esponente 2, perché è il minimo esponente con cui compaiono.
Il definitiva il monomio da mettere a fattore comune è $-2x^2y^2$.
Pertanto possiamo cominciare a scrivere $-2x^2y^2(\dots\dots\dots)$
Eseguiamo le divisioni $-8x^2y^3:(-2x^2y^2)=+4y$ e $10x^3y^2:(-2x^2y^2)=-5x$
I quozienti trovati +4y e -5x vanno nelle parentesi.
In definitiva: $-8x^2y^3+10x^3y^2=-2x^2y^2(4y-5x)$

- $6a(x-1)+7b(x-1)$

Il fattore comune è $(x-1)$, quindi il polinomio si può scrivere come $(x-1)\cdot[\dots\dots\dots]$
nella parentesi quadra scriviamo i termini che si ottengono dalle divisioni
$6a(x-1):(x-1)=6a$
$7b(x-1):(x-1)=7b$
In definitiva $6a(x-1)+7b(x-1)=(x-1)(6a+7b)$

- $10(x+1)^2-5a(x+1)$

Il fattore comune è $5(x+1)$, quindi possiamo cominciare a scrivere
$5(x+1)\cdot[\dots\dots\dots]$, nella parentesi quadra meiamo i termini che si ottengono dalla divisione
$10(x+1)^2:5(x+1)=2(x+1)$
$-5a(x+1):5(x+1)=a$
In definitiva
$10(x+1)^2-5a(x+1)=5(x+1)[2(x+1)-a]$

Scomponi in fattori raccogliendo a fattore comune

2	$ax+3a^2x-abx$	R. $ax(3a-b+1)$
3	$15b^2+12bc+21abx+6ab^2$	R. $3b(7ax+2ab+5b+4c)$
4	$15x^2y-10xy+25x^2y^2$	R. $5xy(5xy+3x-2)$
5	$-12a^8b^9-6a^3b^3-15a^4b^3$	R. $-3a^3b^3(4a^5b^6+5a+2)$
6	$2ab^2+2b^2c-2a^2b^2-2b^2c^2$	R. $2b^2(a+c-a^2-c^2)$
7	$2m^7+8m^6+8m^5$	R. $[2m^5(m+2)^2]$
8	$9x^2b+6xb+18xb^2$	R. $[3bx(3x+6b+2)]$
9	$20a^5+15a^7+10a^4$	R. $[5a^4(3a^3+4a+2)]$
10	$x^2b-x^5-4x^3b^2$	R. $[-x^2(x^3+4b^2x-b)]$
11	$3xy+6x^2$	$b^3+\frac{1}{3}b$
12	$3xy-12y^2$	x^3-ax^2
13	$9a^3-6a^2$	$5x^2-15x$
14	$18x^2y-12y^2$	$4x^2y-x^2$
15	$5x^3-2x^2$	$-2x^3+2x$
16	$3a+3$	$-8x^2y^3-10x^3y^2$
17	$\frac{2}{3}a^2b-\frac{4}{3}a^4b^3-\frac{5}{9}a^2b^2$	$12a^3x^5-18ax^6-6a^3x^4+3a^2x^4$
18	$\frac{2}{3}a^4bc^2-4ab^3c^2+\frac{10}{3}abc^2$	$-\frac{3}{5}a^4bx+\frac{3}{2}ab^4x-2a^3b^2x$
19	$-\frac{5}{2}a^3b^3-\frac{5}{3}a^4b^2+\frac{5}{6}a^3b^4$	$\frac{2}{3}a^2x+\frac{5}{4}ax^2-\frac{5}{4}ax$
20	$91m^5n^3+117m^3n^4$	$-5a^2+10ab^2-15a$
21	ab^2-a+a^2	$2b^6+4b^4-b^9$
22	$2a^2b^2x-4a^2b$	$-a^4-a^3-a^5$
23	$-3a^2b^2+6ab^2-15b$	ab^2-a+a^2
24	$2b^6+4b^4-b^9$	$-5a^4-10a^2-30a$
25	$-a^2b^2-a^3b^5+b^3$	$-2x^6+4x^5-6x^3y^9$
26	$-2x^2z^3+4z^5-6x^3z^3$	$-\frac{4}{9}x+\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{3}x^3$
27	$\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a$	$\frac{1}{3}ab^3+\frac{1}{6}a^3b^2$
28	$a^n+a^{n+1}+a^{n+2}$	R. $a^n(1+a+a^2)$
29	$a^n+a^{n-1}+a^{n-2}$	$a^n+a^{2n}+a^{3n}$
30	$2x^{2n}-6x^{(n-1)}+4x^{(3n+1)}$	$a^2x^{n-1}-2a^3x^{n+1}+a^4x^{2n}$
31	$a(x+y)-b(x+y)$	$(x+y)^3-(x+y)^2$
32	$x^2(a+b)^3+x^3(a+b)+x^5(a+b)^2$	R. $x^2(a+b)(ax^3+bx^3+x+a^2+2ab+b^2)$
33	$3x^2(a+b)-2x^3(a+b)+5x^5(a+b)$	R. $x^2(a+b)(5x^3-2x+3)$
34	$3(x+y)^2-6(x+y)+2x(x+y)$	R. $[(x+y)(5x+3y-6)]$
35	$2a(x-2)+3x(x-2)^2-(x-2)^2$	R. $[(x+y)(5x+3y-6)]$
36	$(a+2)^3-(a+2)^2-a-2$	R. $[(a+2)(a^2+3a+1)]$
37	$5y^3(x-y)^3-3y^2(x-y)$	$5a(x+3y)-3(x+3y)$
38	$2x(x-1)-3a^2(x-1)$	$2(x-3y)-y(3y-x)$

►3. Raccoglimento parziale a fattore comune

Quando un polinomio non ha alcun fattore comune a tutti i suoi termini, possiamo provare a mettere in evidenza tra gruppi di monomi e successivamente individuare il polinomio in comune.
Osserviamo il prodotto $(a+b)(x+y+z)=ax+ay+az+bx+by+bz$.
Supponiamo ora di avere il polinomio $ax+ay+az+bx+by+bz$ come possiamo fare a tornare indietro per scriverlo come prodotto di polinomi?

Esempio

- $ax+ay+az+bx+by+bz$

Non c'è nessun fattore comune a tutto il polinomio.
Proviamo a mettere in evidenza per gruppi di termini. Evidenziamo tra i primi tre termini e b tra gli ultimi tre, avremo:
$a(x+y+z)+b(x+y+z)$
Ora risulta semplice vedere che il trinomio $(x+y+z)$ è in comune e quindi lo possiamo mettere in evidenza
$ax+ay+az+bx+by+bz = a(x+y+z)+b(x+y+z) = (x+y+z)(a+b)$.

Procedura per eseguire il raccoglimento parziale

1. Dopo aver verificato che non è possibile effettuare un raccoglimento a fattore comune totale raggruppo i monomi in modo che in ogni gruppo sia possibile mettere in comune qualche fattore;
2. Verifico se la nuova scrittura del polinomio ha un polinomio (binomio, trinomio...) comune a tutti i termini.
3. Se è presente il fattore comune a tutti i termini lo metto in evidenza;
4. Se il fattore comune non è presente la scomposizione è fallita, allora posso provare a raggruppare diversamente i monomi o abbandonare questo metodo.

Esempi

- $ax+ay+bx+ab$

I quattro monomi non hanno fattori in comune. Provo a mettere in evidenza la *a* nel primo e secondo termine e la *b* nel terzo e quarto termine
$ax+ay+bx+ab = a(x+y)+b(x+a)$
In questo caso non c'è nessun fattore comune: il metodo è fallito. In effetti il polinomio non si può scomporre in fattori.

- $bx-2ab+2ax-4a^2$

Non vi sono fattori da mettere a fattore comune totale, proviamo con il raccoglimento parziale:
$\underline{bx}\underline{-2ab}\underline{\underline{+2ax}}\underline{\underline{-4a^2}} = b(\underline{x-2a})+2a(\underline{x-2a}) = (x-2a)(b+2a)$.

- $bx^3+2x^2-bx-2+abx+2a$

Raggruppiamo nel seguente modo $\underline{bx^3}\underline{\underline{+2x^2}}\underline{-bx}\underline{\underline{-2}}\underline{+abx}\underline{\underline{+2a}}$
tra quelli con sottolineatura semplice metto a fattore comune *bx*, tra quelli con doppia sottolineatura metto a fattore comune *2*.
$\underline{bx^3}\underline{\underline{+2x^2}}\underline{-bx}\underline{\underline{-2}}\underline{+abx}\underline{\underline{+2a}} = bx(\underline{x^2-1+a})+2(\underline{x^2-1+a}) = (x^2-1+a)(bx+2)$.

- $5ab^2-10abc-25abx+50acx$

Il fattore comune è *5a*, quindi
$5ab^2-10abc-25abx+50acx=5a(b^2-2bc-5bx+10cx)$
Vediamo se è possibile scomporre il polinomio in parentesi con un raccoglimento parziale
$5a(\underline{b^2}\underline{-2bc}\underline{\underline{-5bx}}\underline{\underline{+10cx}})=5a[b(\underline{b-2c})-5x(\underline{b-2c})]=5a(b-2c)(b-5x)$.

Scomponi in fattori mediante raccoglimento parziale a fattore comune, se questo è possibile.

39 $3ax-9a-x+3$ $\quad$ $2x-2y+ax-ay$ $\quad$ R. (x-y)(2+a)

40 ax^3+ax^2+bx+b $\quad$ $3ax-6a+x-2$ $\quad$ R.(x-2)(3a+1)

41 $2ax-4a-x+2$ $\quad$ $ax+bx-ay-by$ $\quad$ R. (a+b)(x-y)

42 $b^2x+b^2y+2ax+2ay$ $\quad$ $3x^3-3x^2+3x-3$ $\quad$ R. (2x-3y)(x+y)

43 $-x^3+x^2+x-1$ $\quad$ x^3-x^2+x-1 $\quad$ R. $(x-1)(x^2-1)$

44 x^3+x^2-x-1 $\quad$ $x^3-1-x+x^2$

45 $x^3-x-1+x^2$ $\quad$ x^3+x^2+x+1

46 $b^2x-b^2y+2x-2y$ $\quad$ $b^2x-b^2y-2ax-2ay$

47 $xy+x+ay+a+by+b$ $\quad$ $ay+2x^3-2ax^3-y$ $\quad$ R.$(a-1)(y-2x^3)$

48 $3x+6+ax+2a+bx+2b$ $\quad$ $2x-2+bx-b+ax-a$

49 $2x-2+bx-b-ax+a$ $\quad$ $2x+2+bx-b-ax+a$

50 $2x-b+ax-a-2+bx$ $\quad$ $bx^2-bx+b+x^2-x+1$ $\quad$ R. $(b+1)(x^2-x+1)$

51 a^3+2a^2+a+2 $\quad$ $a^2x+ax-a-1$

52 $3xy^3-6xy-ay^2+2a$ $\quad$ $a^2x^3+a^2x^2+a^2x-2x^2-2x-2$

53 $3x^4-3x^3+3x^2-3x$ $\quad$ $2ax-2a+abx-ab+a^2x-a^2$

54 $3x^4y^4-6x^4y^2-ax^3y^3+2ax^3y$ $\quad$ $b^2x-2bx+by-2y$

55 $ax+bx+2x-a-b-2$ $\quad$ $a^3-a^2b^2-ab+b^3$ $\quad$ R.$(a^2-b)(a-b^2)$

56 $\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{3}x^2+2x-1$ $\quad$ $\frac{1}{5}a^2b+3ab^2-\frac{1}{3}a-5b$ $\quad$ R. $\left(\frac{3}{5}ab-1\right)\left(\frac{1}{3}a+5b\right)$

57 $3(x+y)^2+5x+5y$ $\quad$ $(a-2)(a-3)+ab-2b$

58 $3x^4+9x^2-6x^3-18x$ $\quad$ $2a-a^2+8b-4ab$

59 $4x^2+3a+4xy-4ax-3y-3x$ $\quad$ $3x^4-3x^3+2x-2$

60 $\frac{1}{8}x^3-2xy^2+\frac{1}{2}yx^2-8y^3$ $\quad$ $ab-bx^2-\frac{2}{3}ax-\frac{2}{3}x^3$

61 $45x^3+15xy+75x^2y+21x^2y^2+7y^3+35xy^3$ $\quad$ R. $(15x+7y^2)(3x^2+y+5xy)$

Scomponi in fattori raccogliendo prima a fattore comune totale e poi parziale.

62 $a^{14}+4a^{20}-2a^{12}-8a^8$ $\quad$ R. $a^8(a^2-2)(a^4+4)$

63 $b^2x+b^2y-2bx-2by$

64 $3x^2(x+y)^2+5x^3+5x^2y$ $\quad$ R. $x^2(x+y)(3x+3y+5)$

65 $b^2x-2bx-2by+b^2y$

66 $ax^3y+ax^2y+axy+ay$ $\quad$ R. $ay(x+1)(x^2+1)$

67 $2ab^2+2b^2c-2a^2b^2-2ab^2c$

68 $2^{11}x^2+2^{12}x+2^{15}x+2^{16}$ $\quad$ R. $2^{11}(x+2)(x+16)$

69 $3ax+6a+a^2x+2a^2+abx+2ab$

70 $6x^2+6xy-3x(x+y)-9x^2(x+y)^2$ $\quad$ R. $2x(x+y)(x-a)$

71 $2bx^2+4bx-2x^2-4ax$

72 $2x^3+2x^2-2ax^2-2ax$ $\quad$ R. $2x(x+1)(x-a)$

73 $x^4+x^3-x^2-x$

74 $\frac{2}{3}ax^3-\frac{1}{3}ax^2+\frac{2}{3}ax-\frac{1}{3}a$ $\quad$ R. $\frac{1}{3}a(x^2+1)(2x-1)$

75 $15x(x+y)^2+5x^2+5xy$

76 $\frac{7}{3}x^2-\frac{7}{3}xy+\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{9}x^2y-\frac{5}{9}(x^2-xy)$ $\quad$ R. $\frac{1}{9}x(x-y)(16+x)$

77 $2a^2mx-2ma^2-2a^2x+2a^2$

78 $2b(x+1)^2-2bax-2ba+4bx+4b$ $\quad$ R. $2b(x+1)(x-a+3)$

►4. Quadrato di un binomio

Uno dei metodi più usati per la scomposizione di polinomi è legato al saper riconoscere i prodotti notevoli.
Se abbiamo un trinomio costituito da due termini che sono quadrati di due monomi ed il terzo termine è uguale al doppio prodotto degli stessi due monomi, allora il trinomio può essere scritto sotto forma di quadrato di un binomio, secondo la regola che segue.

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \quad \rightarrow \quad A^2 + 2AB + B^2 = (A+B)^2$$

Analogamente nel caso in cui il monomio che costituisce il doppio prodotto sia negativo:

$$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2 \quad \rightarrow \quad A^2 - 2AB + B^2 = (A-B)^2$$

Poiché il quadrato di un numero è sempre positivo, valgono anche le seguenti uguaglianze.

$$(A+B)^2 = (-A-B)^2 \quad \rightarrow \quad A^2 + 2AB + B^2 = (A+B)^2 = (-A-B)^2$$
$$(A-B)^2 = (-A+B)^2 \quad \rightarrow \quad A^2 - 2AB + B^2 = (A-B)^2 = (-A+B)^2$$

Esempi

- $4a^2+12ab^2+9b^4$

Notiamo che il primo ed il terzo termine sono quadrati, rispettivamente di $2a$ e di $3b^2$, ed il secondo termine è il doppio prodotto degli stessi monomi, pertanto possiamo scrivere:
$4a^2+12ab^2+9b^4 = (2a)^2 + 2\cdot(2a)\cdot(3b^2) + (3b^2)^2 = (2a+3b^2)^2$.

- x^2-6x+9

Il primo ed il terzo termine sono quadrati, il secondo termine compare con il segno "meno". Dunque:
$x^2-6x+9 = x^2-2\cdot3\cdot x+3^2 = (x-3)^2 \quad ma\ anche \quad = (-x+3)^2$.
Può accadere che tutti e tre i termini siano tutti quadrati:

- x^4+4x^2+4

è formato da tre quadrati, ma il secondo termine, quello di grado intermedio, è anche il doppio prodotto dei due monomi di cui il primo ed il terzo termine sono i rispettivi quadrati. Si ha dunque:
$x^4+4x^2+4 = (x^2)^2+2\cdot(2)\cdot(x^2)+(2)^2 = (x^2+2)^2$.

Procedura per individuare il quadrato di un binomio

1. **individuare le basi dei due quadrati;**
2. **verificare se il terzo termine è il doppio prodotto delle due basi;**
3. **scrivere tra parentesi le basi dei due quadrati e il quadrato fuori dalla parentesi**
4. **mettere il segno "più" o "meno" in accordo al segno del termine che non è un quadrato.**

Può capitare che i quadrati compaiano con il coefficiente negativo, ma si può rimediare mettendo in evidenza il segno "meno".

Esempi

- $-9a^2+12ab-4b^2$

Mettiamo -1 a fattore comune $-9a^2+12ab-4b^2 = -(9a^2-12ab+4b^2) = -(3a-2b)^2$

- $-x^4-x^2-\frac{1}{4} = -\left(x^4+x^2+\frac{1}{4}\right) = -\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2$
- $-x^2+6xy^2-9y^4 = -(x^2-6xy^2+9y^4) = -(x-3y^2)^2$

Possiamo avere un trinomio che "diventa" quadrato di binomio dopo aver messo qualche fattore comune.

Esempi

- $2a^3+20a^2+50a$

Mettiamo a fattore comune 2a, allora $2a^3+20a^2+50a = 2a(a^2+10a+25) = 2a(a+5)^2$

- $2a^2+4a+2 = 2(a^2+2a+1) = 2(a+1)^2$
- $-12a^3+12a^2-3a = -3a(4a^2-4a+1) = -3a(2a-1)^2$
- $\frac{3}{8}a^2+3ab+6b^2 = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{4}a^2+2ab+4b^2\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}a+2b\right)^2$

o anche $\frac{3}{8}a^2+3ab+6b^2 = \frac{3}{8}(a^2+8ab+16b^2) = \frac{3}{8}(a+4b)^2$

Quando è possibile, scomponi in fattori, riconoscendo il quadrato di un binomio:

79 a^2-2a+1 $\qquad$ x^2+4x+4

80 y^2-6y+9 $\qquad$ $16t^2+8t+1$

81 $4x^2+1+4x$ $\qquad$ $9a^2-6a+1$

82 $4x^2-12x+9$ $\qquad$ $9x^2+4+12x$

83 $\frac{1}{4}a^2+ab+b^2$ $\qquad$ $\frac{4}{9}a^4-4a^2+9$

84 $\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{3}x+\frac{1}{9}$ $\qquad$ $16a^2+\frac{1}{4}b^2-4ab$

85 $-9x^2-\frac{1}{4}+3x$ $\qquad$ $144x^2-6xa^2+\frac{1}{16}a^4$

86 $4x^2+4xy+y^2$ $\qquad$ $a^4+36a^2+12a^3$

87 $x^2-6xy+9y^2$ $\qquad$ $-x^2-6xy-9y^2$

88 $25+10x+x^2$ $\qquad$ $25+10x+x^2$

89 $\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{3}xy+\frac{1}{9}y^2$ $\qquad$ $\frac{9}{25}a^4-6a^2+25$

90 $4x^2+2x^4+1$ $\qquad$ $4x^2-4x^4-1$

91 $-a^3-2a^2-a$ $\qquad$ $3a^7b-6a^5b^2+3a^3b^3$

92 $100+a^2b^4+20ab^2$ $\qquad$ $2x^{13}-8x^8y+8x^3y^2$

93 $x^8+8x^4y^2+16y^4$ $\qquad$ $-x^2+6xy+9y^2$

94 $4a^2b^4-12ab^3+9b^6$ $\qquad$ a^2+a+1

95 $36a^6b^3+27a^5b^4+12a^7b^2$ $\qquad$ $25x^{14}+9y^6+30x^7y^3$

96 $-a^7-25a^5+10a^6$ $\qquad$ $25a^2+49b^2+35ab$

97 $4y^6+4-4y^2$ $\qquad$ $\frac{1}{4}a^2+2ab+b^2$

98 $25a^2-10ax-x^2$ $\qquad$ $9x^2+4y^2-6xy$

99 $4x^2+4xy-y^2$ non è possibile perché … … … … … … … … ...

100 $x^2-6xy+9y$ non è possibile perché … … … … … … … … ...

101 $25+100x+x^2$ non è possibile perché … … … … … … … … ...

102 $\frac{1}{4}x^2+\frac{2}{3}xy+\frac{1}{9}$ non è possibile perché … … … … … … … … …

103 $25t^2+4-10t$ non è possibile perché … … … … … … … … …

104 $24a^3+6a+24a^2$ R. $\left[6a(2a+1)^2\right]$

105 $3ax^2-12axb+12b^2x$ R. $\left[3x(a-2b)^2\right]$

106 $5a^2+2ax+\frac{1}{5}x^2$ R. $\left[\frac{1}{5}(x+5a)^2\right]$

107 $x^6y+x^2y+2x^4y$ R. $\left[x^2y(x^2+1)^2\right]$

108 $x^5+4x^4+4x^3$ R. $\left[x^3(x+2)^2\right]$

109 $2y^3x-12y^2x+18x^2y$ R. $\left[2y(3x-y)^2\right]$

110 $-50t^3-8t+40t^2$ R. $\left[-2t(5t-2)^2\right]$

111 $2^{10}x^2+2^6\cdot 3^{20}+3^{40}$ R. $\left[(2^5x+3^{20})^2\right]$

112 $2^{10}x^2+2^6\cdot 3^{20}+3^{40}$ R. $\left[(2^5x+3^{20})^2\right]$

113 $2^{20}x^{40}-2^{26}\cdot x^{50}+2^{30}\cdot x^{60}$

114 $10^{100}x^{50}-2\cdot 10^{75}x^{25}+10^{50}$

115 $10^{11}x^{10}-2\cdot 10^9x^5+10^6$

116 $x^{2n}+2x^n+1$

►5. Quadrato di un polinomio

Se siamo in presenza di sei termini, tre dei quali sono quadrati, verifichiamo se il polinomio è il quadrato di un trinomio:

$$(A+B+C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC \quad \rightarrow$$
$$A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC = (A+B+C)^2 = (-A-B-C)^2$$

Notiamo che i doppi prodotti possono essere tutt'e tre positivi, oppure uno positivo e due negativi: indicano se i rispettivi monomi sono concordi o discordi.

Esempi

- $16a^4+b^2+1+8a^2b+8a^2+2b$

I primi tre termini sono quadrati, rispettivamente di $4a^2 \quad b \quad 1$, si può verificare poi che gli altri tre termini sono i doppi prodotti:

$16a^4+b^2+1+8a^2b+8a^2+2b=(4a^2+b+1)^2$

- $x^4+y^2+z^2-2x^2y-2x^2z+2yz=(x^2-y-z)^2=(-x^2+y+z)^2$

In alcuni casi anche un polinomio di cinque termini può essere il quadrato di un trinomio. Vediamo un esempio particolare:

- $x^4-2x^3+3x^2-2x+1$

Per far venire fuori il quadrato del trinomio si può scindere il termine $3x^2$ come somma $3x^2=x^2+2x^2$, in questo modo si ha:

$x^4-2x^3+3x^2-2x+1=x^4-2x^3+x^2+2x^2-2x+1=(x^2-x+1)^2$

Nel caso di un quadrato di un polinomio la regola è sostanzialmente la stessa:

$$(A+B+C+D)^2=A^2+B^2+C^2+D^2+2AB+2AC+2AD+2BC+2BD+2CD$$

Quando è possibile, scomponi in fattori, riconoscendo il quadrato di un polinomio

117 $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$ $\qquad$ $x^2+y^2+z^2+2xy-2xz-2yz$

118 $x^2+y^2+4+4x+2xy+4y$ $\qquad$ $4a^4-6ab-4a^2b+12a^3+b^2+9a^2$

119 $9x^6+2y^2z+y^4-6x^3z-6x^3y^2+z^2$ $\qquad$ $a^2+2ab+b^2-2a+1-2b$

120 $\frac{1}{4}a^2+b^4+c^6+ab^2+ac^3+2b^2c^3$ $\qquad$ $x^2+\frac{1}{4}y^2+4-xy+4x-2y$

121 $a^2+b^2+c^2-2ac-2bc+2ab$ $\qquad$ $-x^2-2xy-9-y^2+6x+6y$

122 $a^2+b^2+c^2$ non è un quadrato perché … … … … …

123 $x^2+y^2+4+4x+4xy+4y$ non è un quadrato perché … … … … …

124 $a^2+b^2+c^2-2ac-2bc-2ab$ non è un quadrato perché … … … … …

125 $a^2+b^2-1-2a-2b+2ab$ non è un quadrato perché … … … … …

126 $a^2+4ab-2a+4b^2-4b+1$ R. $[(a+2b-1)^2]$

127 $4a^2+4ab-8a+b^2-4b+4$

128 $a^2b^2+2a^2b+a^2+4ab^2+4ab+4b^2$ R. $[(ab+a+2b)^2]$

129 $a^2b^2+2a^2b+a^2-2ab^2-2ab+b^2$

130 $25x^2-20ax-30bx+4a^2+12ab+9b^2$

131 $x^2-6xy+6x+9y^2-18y+9$ R. $[(x-3y+3)^2]$

132 $x^4+2x^3+3x^2+2x+1$

133 $4a^4+8a^2+1+8a^3+4a$ scomponi prima $8a^2=4a^2+4a^2$

134 $9x^4+6x^3-11x^2-4x+4$ scomponi in maniera opportuna $-11x^2$

135 $2a^{10}x+4a^8x+2a^6x+4a^5x+4a^3x+2x$

136 $a^2+b^2+c^2+d^2-2ab+2ac-2ad-2bc+2bd-2cd$

137 $x^6+x^4+x^2+1+2x^5+2x^4+2x^3+2x^3+2x^2+2x$

►6. Cubo di un binomio

I cubi di binomi sono di solito facilmente riconoscibili. Un quadrinomio è lo sviluppo del cubo di un binomio se due suoi termini sono i cubi di due monomi e gli altri due termini sono i tripli prodotti tra uno dei due monomi ed il quadrato dell'altro, secondo le seguenti formule.

$$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 \quad \rightarrow \quad A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = (A+B)^3$$
$$(A-B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 \quad \rightarrow \quad A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 = (A-B)^3$$

Per il cubo non si pone il problema, come per il quadrato, del segno della base, perché un numero, elevato ad esponente dispari, se è positivo rimane positivo, se è negativo rimane negativo.

Esempi

- $8a^3+12a^2b+6ab^2+b^3$
  Notiamo che il primo ed il quarto termine sono cubi, rispettivamente di *2a* e di *b* , il secondo termine è il triplo prodotto tra il quadrato di *2a* e *b*, mentre il terzo termine è il triplo prodotto tra *2a* e il quadrato di *b* . Abbiamo dunque:
  $8a^3+12a^2b+6ab^2+b^3 = (2a)^3+3\cdot(2a)^2\cdot(b)+3\cdot(2a)\cdot(b)^2 = (2a+b)^3$.

- $-27x^3+27x^2-9x+1$
  Le basi del cubo sono il primo e il quarto termine, rispettivamente cubi di *-3x* e di *1*. Dunque:
  $-27x^3+27x^2-9x+1 = (-3x)^3+3\cdot(-3x)^2\cdot 1+3\cdot(-3x)\cdot 1^2+1 = (-3x+1)^3$

- $x^6-x^4+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{27}$
  Le basi del cubo sono x^2 e $-\frac{1}{3}$ i termini centrali sono i tripli prodotti, quindi $\left(x^2-\frac{1}{3}\right)^3$.

Quando è possibile, scomponi in fattori, riconoscendo il cubo di un binomio

138 $8a^3+b^3+12a^2b+6ab^2$ $\qquad$ $b^3+12a^2b-6ab^2-8a^3$

139 $-12a^2+8a^3-b^3+6ab$ $\qquad$ $-12a^2b+6ab+8a^3-b^3$

140 $-x^3+6x^2-12x+8$ $\qquad$ $-x^9-3x^6+3x^3+8$

141 $x^3y^6+1+3x^2y^2+3xy^2$ $\qquad$ $x^3+3x-3x^2-1$

142 $-5x^5y^3-5x^2-15x^4y^2-15x^3y$ $\qquad$ $-a^6+27a^3+9a^5-27a^4$

143 $64a^3-48a^2+12a-1$ $\qquad$ $a^6+9a^4+27a^2+27$

144 $x^3-x^2+\frac{1}{3}x-\frac{1}{27}$ $\qquad$ $0{,}001x^6+0{,}015x^4+0{,}075x^2+0{,}125$

145 $a^{10}-8a-6a^7+12a^4$ $\qquad$ non è cubo perché … … … … … … … …

146 $27a^3-b^3+9a^2b-9ab^2$ $\qquad$ non è cubo perché … … … … … … … …

147 $8x^3+b^3+6x^2b+6xb^2$ $\qquad$ non è cubo perché … … … … … … … …

148 $x^3+6ax^2-6a^2x+8a^3$ $\qquad$ non è cubo perché … … … … … … … …

149 $\frac{27}{8}a^3-\frac{27}{2}a^2x+18ax^2-8x^3$ $\qquad$ $x^3-x^2+\frac{1}{3}x-\frac{1}{27}$

150 $x^3-6x^2+12x-8$ $\qquad$ $a^6+3a^4b^2+3a^2b^4+b^6$ $\qquad$ R. $\left[(a^2+b^2)^3\right]$

151 $a^3b^3+12ab+48ab+64$ $\qquad$ $8a^3-36a^2b+54ab^2-27b^3$ $\qquad$ R. $\left[(2a-3b)^3\right]$

152 $216x^3-540ax^2+450a^2x-125a^3$ $\qquad$ $8x^3+12x^2+6x+2$

153 $8x^3-36x^2+54x-27$ $\qquad$ $a^6+3a^5+3a^4+a^3$ $\qquad$ R. $\left[a^3(a+1)^3\right]$

154 $x^6+12ax^4+12a^2x^2+8a^3$ $\qquad$ $a^{10}-8a-6a^7+12a^4$

155 $x^{300}-10^{15}-3\cdot10^5x^{200}+3\cdot10^{10}x^{100}$

156 $10^{15}a^{60}+3\cdot10^{30}a^{45}+3\cdot10^{45}a^{30}+10^{60}a^{15}$

157 $10^{-33}x^3-3\cdot10^{-22}x^2+3\cdot10^{-11}x-1$

158 $a^{6n}+3a^{4n}x^n+3a^{2n}x^{2n}+x^{3n}$

►7. Differenza di due quadrati

$$(A+B)\cdot(A-B)=A^2-B^2 \quad \rightarrow \quad A^2-B^2=(A+B)\cdot(A-B)$$

Un binomio che sia la differenza dei quadrati di due monomi può essere scomposto come prodotto tra la somma dei due monomi (basi dei quadrati) e la loro differenza.

Esempi

- $\frac{4}{9}a^4-25b^2=\left(\frac{2}{3}a^2\right)^2-(5b)^2=\left(\frac{2}{3}a^2+5b\right)\cdot\left(\frac{2}{3}a^2-5b\right)$
- $-x^6+16y^2=-(x^3)^2+(4y)^2=(x^3+4y)\cdot(-x^3+4y)$

La formula precedente vale anche se *A* e *B* sono polinomi.

- $a^2-(x+1)^2=[a+(x+1)]\cdot[a-(x+1)]=(a+x+1)(a-x-1)$
- $(2a-b^2)^2-(4x)^2=(2a-b^2+4x)\cdot(2a-b^2-4x)$
- $(a+3b)^2-(2x-5)^2=(a+3b+2x-5)\cdot(a+3b-2x+5)$

Per questo tipo di scomposizioni, la cosa più difficile è riuscire a riconoscere un quadrinomio o un polinomio di sei termini come differenza di quadrati. Riportiamo i casi principali:

- $(A+B)^2-C^2=A^2+2AB+B^2-C^2$
- $A^2-(B+C)^2=A^2-B^2-2BC-C^2$
- $(A+B)^2-(C+D)^2=A^2+2AB+B^2-C^2-2CD-D^2$

- $4a^2-4b^2-c^2+4bc$

Gli ultimi tre termini possono essere raggruppati per formare il quadrati di un binomio.

$=4a^2-(4b^2+c^2-4bc)$

$=(2a)^2-(2b-c)^2$

$=(2a+2b-c)\cdot(2a-2b+c)$

$4a^2-4b^2-c^2+4bc=4a^2-(4b^2+c^2-4bc)=(2a)^2-(2b-c)^2=(2a+2b-c)\cdot(2a-2b+c)$

- $4x^4-4x^2-y^2+1$

$=(2x^2-1)^2-(y)^2=(2x^2-1+y)\cdot(2x^2-1-y)$

- $a^2+1+2a+6bc-b^2-9c^2$

$=(a^2+1+2a)-(b^2+9c^2-6bc)=(a+1)^2-(b-3c)^2=(a+1+b-3c)\cdot(a+1-b+3c)$

Scomponi i seguenti polinomi come differenza di quadrati

159	a^2-25b^2	$16-x^2y^2$	$25-9x^2$
160	$4a^4-9b^2$	x^2-16y^2	$144x^2-9y^2$
161	$16x^4-81z^2$	$a^2b^4-c^2$	$4x^6-9y^4$
162	$-36x^8+25b^2$	$-1+a^2$	$\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{9}y^4$
163	$\frac{a^2}{4}-\frac{y^2}{9}$	$2a^2-50$	a^3-16ab^6
164	$-4x^2y^2+y^2$	$-4a^2+b^2$	$25x^2y^2-\frac{1}{4}z^6$
165	$-a^2b^4+49$	$16y^4-z^4$	a^8-b^8
166	a^4-16	$16a^2-9b^2$	$9-4x^2$
167	$\frac{1}{4}x^2-1$	$25a^2b^2-\frac{9}{16}y^6$	$\frac{25}{16}a^2-1$
168	$-16+25x^2$	a^2-9b^2	$-4x^8+y^{12}$
169	$\frac{1}{4}x^2-0{,}01y^4$	x^6-y^8	x^4-y^8

Quando è possibile, scomponi in fattori, riconoscendo la differenza di due quadrati:

170	$(b+3)^2-x^2$	R. $(b+3-x)(b+3+x)$
171	$(x-y)^2-(y+z)^2$	
172	$a^8-(b-1)^2$	R. $(a^4-b+1)(a^4+b-1)$
173	$-(2a-1)^2+(3b+3)^2$	
174	$(x-1)^2-a^2$	R. $[(x+a-1)(x-a-1)]$
175	x^2-b^2-9-6b	
176	$(2x-3)^2-9y^2$	R. $[(2x+3y-3)(2x-3y-3)]$
177	b^2-x^4+1+2b	
178	$(x+1)^2-(y-1)^2$	R. $[(x+y)(x-y+2)]$
179	$a^4+4a^2+4-y^2$	
180	$x^2+2x+1-y^2$	R. $[(x+y+1)(x-y+1)]$
181	x^2-y^2-1+2y	
182	$(2x+3)^2-(2y+1)^2$	R. $[4(x+y+2)(x-y+1)]$
183	$-(a+1)^2+9$	
184	$a^2-2ab+b^2-4$	R. $[(a-b-2)(a-b+2)]$
185	$16x^2y^6-(xy^3+1)^2$	
186	$x^2+25+10x-y^2+10y-25$	R. $[(x+y)(x-y+10)]$
187	$a^2+1+2a-9$	
188	$a^2-6a+9-x^2-16-8x$	R. $[-(x+a+1)(x-a+7)]$
189	$x^2y^4-z^2+9+6xy^2$	
190	$(2x-3a)^2-(x-a)^2$	
191	$(a-1)^2-(a+1)^2$	
192	$a^{2n}-4$	
193	$a^{2m}-b^{2n}$	
194	$x^{2n}-y^4$	

►8. Trinomi particolari

Consideriamo il seguente prodotto:

$$(x+3)(x+2) = x^2+3x+2x+6 = x^2+5x+6$$

Poniamoci ora l'obiettivo opposto: se abbiamo il polinomio x^2+5x+6 come facciamo a trovare ritrovare il prodotto che lo ha originato? Possiamo notare che il 5 deriva dalla somma tra il 3 e il 2, mentre il 6 deriva dal prodotto tra 3 e 2. Generalizzando

$$(x+a)\cdot(x+b) = x^2+ax+bx+ab = x^2+(a+b)x+a\cdot b$$

Leggendo la formula precedente da destra verso sinistra:

$$x^2+(a+b)x+a\cdot b = (x+a)\cdot(x+b).$$

Possiamo allora concludere che se abbiamo un trinomio di secondo grado in una sola lettera, a coefficienti interi, avente il termine di secondo grado con coefficiente 1, se riusciamo a trovare due numeri *a* e *b* tali che la loro somma è uguale al coefficiente del termine di primo grado ed il loro prodotto è uguale al termine noto, allora il polinomio è scomponibile nel prodotto $(x+a)(x+b)$.

Osserva che il termine noto, poiché è dato dal prodotto dei numeri che cerchiamo, ci dice se i due numeri sono concordi o discordi. Inoltre, se il numero non è particolarmente grande è sempre possibile scrivere facilmente tutte le coppie di numeri che danno come prodotto il numero cercato, tra tutte queste coppie dobbiamo poi individuare quella che ha per somma il coefficiente del termine di primo grado.

Esempi

- $x^2+7x+12$

I coefficienti sono positivi e quindi i due numeri da trovare sono entrambi positivi.
Il termine noto 12 può essere scritto sotto forma di prodotto di due numeri solo come:

$$12\cdot 1 \qquad 6\cdot 2 \qquad 3\cdot 4$$

Le loro somme sono rispettivamente 13, 8, 7. La coppia di numeri che dà per somma +7 e prodotto +12 è pertanto +3 e +4. Dunque il trinomio si scompone come:
$x^2+7x+12=(x+4)\cdot(x+3)$.

- $x^2 \underset{somma}{-8x} + \underset{prodotto}{15}$

I segni dei coefficienti ci dicono che i due numeri, dovendo avere somma negativa e prodotto positivo, sono entrambi negativi. Dobbiamo cercare due numeri negativi la cui somma sia -8 e il cui prodotto sia 15. Le coppie di numeri che danno 15 come prodotto sono -15; -1 e -5; -3. Allora i due numeri cercati sono –5 e –3. Il trinomio si scompone come:
$x^2-8x+15=(x-5)\cdot(x-3)$.

- $x^2+\underset{somma}{4}x-\underset{prodotto}{5}$

I due numeri sono discordi, il maggiore in valore assoluto è quello positivo. C'è una sola coppia di numeri che dà -5 come prodotto, precisamente +5 e –1. Il polinomio si scompone:
$x^2+4x-5=(x+5)\cdot(x-1)$.

- $x^2-\underset{S}{3}x-\underset{P}{10}$

I due numeri sono discordi, in modulo il più grande è quello negativo. Le coppie di numeri che danno -10 come prodotto sono -10; +1, ma anche -5; +2. Quelli che danno -3 come somma sono –5 e + 2.
$x^2-3x-10=(x-5)\cdot(x+2)$.

In alcuni casi si può applicare questa regola anche quando il trinomio non è di secondo grado, è necessario però che il termine di grado intermedio sia esattamente di grado pari alla metà di quello di grado maggiore.

Esempi

- $x^4+5x^2+6=(x^2+3)\cdot(x^2+2)$
- $x^6+x^3-12=(x^3+4)\cdot(x^3-3)$
- $a^4-10a^2+9=(a^2-9)\cdot(a^2-1)=$ differenze di quadrati $=(a+3)\cdot(a-3)\cdot(a+1)\cdot(a-1)$
- $-x^4-x^2+20=-(x^4+x^2-20)=-(x^2+5)\cdot(x^2-4)=-(x^2+5)\cdot(x+2)\cdot(x-2)$.
- $2x^5-12x^3-14x=2x\cdot(x^4-6x^2-7)=2x\cdot(x^2-7)\cdot(x^2+1)$
- $-2a^7+34a^5-32a^3=-2a^3(a^4-17a^2+16)=-2a^3(a^2-1)(a^2-16)=-2a^3(a-1)(a+1)(a-4)(a+4)$

E' possibile applicare questo metodo anche quando il polinomio è in due variabili.

- $x^2+5xy+6y^2$

Per capire come applicare la regola precedente, possiamo scrivere il trinomio in questo modo:
$x^2+\overset{somma}{5y}\,x+\overset{prodotto}{6y^2}$

Bisogna cercare due monomi *A* e *B* tali che $A+B=5y$ e $A\cdot B=6y^2$. Partendo dal fatto che i due numeri che danno 5 come somma e 6 come prodotto sono +3 e +2, i monomi cercati sono +3y e +2y, infatti $+3y+3y=+5y$ e $+3y\cdot(+2y)=+6y^2$. Pertanto si può scomporre come segue:
$x^2+5xy+6y^2=(x+3y)(x+2y)$.

La regola, opportunamente modificata, vale anche se il primo coefficiente non è 1. Vediamo un esempio:

- $2x^2-x-1$

Non possiamo applicare la regola del trinomio caratteristico, con somma e prodotto; con un accorgimento, possiamo riscrivere il polinomio in un altro modo. Cerchiamo due numeri la cui somma sia -1 e il prodotto sia pari al prodotto tra il primo e l'ultimo coefficiente, o meglio tra il coefficiente del termine di secondo grado e il termine noto, in questo caso $2\cdot(-1)=-2$. I numeri sono -2 e +1, spezziamo il monomio centrale in somma di due monomi in questo modo
$2x^2-x-1=2x^2-2x+x-1$
Ora possiamo applicare il raccoglimento a fattore comune parziale
$2x^2-x-1=2x^2\underbrace{-2x+x}_{-x}-1=2x\cdot\underline{(x-1)}+1\cdot\underline{(x-1)}=(x-1)\cdot(2x+1)$.

Procedura generale

Sia da scomporre un trinomio di secondo grado a coefficienti interi ax^2+bx+c con $a\neq 1$, cerchiamo due numeri m ed n tali che $m+n=b$ e $m\cdot n=a\cdot c$; se riusciamo a trovarli, li useremo per dissociare il coefficiente b e riscrivere il polinomio nella forma $p=ax^2+(m+n)\cdot x+c$ su cui poi eseguire un raccoglimento parziale.

Scomponi in fattori i seguenti trinomi particolari

195	$x^2-5x-36$	$x^2-17x+16$	$x^2-13x+12$
196	x^2+6x+8	$x^2+7x+12$	x^2-2x-3
197	$x^2+9x+18$	x^2-5x+6	x^2-8x-9
198	$x^2-7x+12$	x^2-6x+8	$x^2-51x+50$
199	x^2-3x-4	$x^2+5x-14$	x^4+8x^2+12
200	$x^2+4x-12$	x^2-3x+2	x^4-5x^2+4
201	$x^2+3x-10$	$x^2+13x+12$	$x^2+2x-35$
202	x^6-5x^3+4	$x^2+5x-36$	x^2+8x+7
203	$x^2-10x+24$	y^2+y-20	$x^2+4x-45$
204	$x^2-4x-21$	$x^2+4x-21$	$x^2-10x+21$
205	x^4+9x^2-10	x^6-x^3-30	$-x^6+7x^3-10$
206	$2x^3+14x^2+20x$	$-3x^6+15x^4-12x^2$	x^4-37x^2+36
207	$x^{20}+4x^{12}-32x^4$	$x^{40}-x^{20}-20$	$x^{14}-37x^7+36$
208	$x^2+4xy-32y^2$	$a^2-ax-20x^2$	$a^2-12xa-64x^2$
209	$m^2+20mn+36n^2$	$x^4-8x^2a+12a^2$	$x^6+9x^3y^2-36y^4$
210	$x^2y^2-2xy-35$	$a^4b^2-a^2b-72$	x^4+11x^2+24

Scomponete i seguenti polinomi con la regola descritta seguendo la traccia:

211	$2x^2-3x-5$	$=2x^2+2x-5x-5=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	
212	$3y^2+y-10$	$=3y^2+6y-5y-10=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	
213	$5t^2-11t+2$	$=5t^2-10t-t+2=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	
214	$-3t^2+4t-1$	$=-3t^2+3t+t-1=\ldots\ldots\ldots\ldots$...	
215	$2x^2-3x-9$		R. $[(x-3)(2x+3)]$
216	$3a^2-4a+1$	$11k-6k^2+7$	
217	$4b^2-4b-3$	$6x^2-13x-15$	
218	$x^2+10ax+16a^2$	$2x^4+x^2-3$	

►9. Scomposizione con la regola Ruffini

Anche il teorema di Ruffini permette di scomporre in fattori i polinomi. Dato il polinomio *P(x)*, se riusciamo a trovare un numero *k* per il quale *P(k)=0* allora *P(x)* è divisibile per il binomio x-k, allora possiamo scomporre $P(x)=(x-k)\cdot Q(x)$, dove $Q(x)$ è il quoziente della divisione tra *P(x)* e *(x-k)*.
Il problema di scomporre un polinomio P(x) si riconduce quindi a quello della ricerca del numero k che sostituito alla x renda nullo il polinomio. Un numero di questo tipo si dice anche **radice del polinomio**.
Il numero k non va cercato del tutto a caso, abbiamo degli elementi per restringere il campo di ricerca di questo numero quando il polinomio è a coefficienti interi.
Le radici intere del polinomio vanno cercate tra i divisori del termine noto.

Esempio

- $p(x)=x^3+x^2-10x+8$

Le radici intere del polinomio sono da ricercare nell'insieme dei divisori di 8, precisamente in $\{\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8\}$. Sostituiamo questi numeri nel polinomio, finché non troviamo quello che lo annulla.
Per *x=1* si ha $p(1)=(1)^3+(1)^2-10\cdot(1)+8=1+1-10+8=0$, pertanto il polinomio è divisibile per x-1.
Utilizziamo la regola di Ruffini per dividere P(x) per x-1.
Predisponiamo una griglia come quella a fianco, al primo rigo mettiamo i coefficienti di P(x), al secondo rigo mettiamo come primo numero la radice che abbiamo trovato, cioè 1. Poi procediamo come abbiamo già indicato per la regola di Ruffini.

	1	1	-10	8
1		1	2	-8
	1	2	-8	

I numeri che abbiamo ottenuto nell'ultimo rigo sono i coefficienti del polinomio quoziente: $q(x)=x^2+2x-8$.
Possiamo allora scrivere:
$x^3+x^2-10x+8=(x-1)\cdot(x^2+2x-8)$.
Per fattorizzare il polinomio di secondo grado x^2+2x-8 possiamo ricorrere al metodo del trinomio notevole. Cerchiamo due numeri la sui somma sia +2 e il cui prodotto sia -8. Questi numeri vanno cercati tra le coppie che danno per prodotto -8 e precisamente tra le seguenti coppie (+8, -1), (-8, +1), (+4, -2), (-4, +2).
La coppia che dà per somma +2 è (+4, -2). In definitiva si ha:
$x^3+x^2-10x+8=(x-1)\cdot(x^2+2x-8)=(x-1)(x-2)(x+4)$.

Esempio

- $x^4-5x^3-7x^2+29x+30$

Le radici intere vanno cercate tra i divisori di 30, precisamente in
$\{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 5; \pm 6; \pm 10; \pm 15; \pm 30\}$.
Sostituiamo questi numeri al posto della x, finché non troviamo la radice.
Per $x=1$ si ha $P(1)=1-5-7+29+30$ senza effettuare il calcolo si nota che i numeri positivi superano quelli negativi, quindi 1 non è una radice.
Per $x=-1$ si ha
$P(-1)=(-1)^4-5\cdot(-1)^3-7\cdot(-1)^2+29\cdot(-1)+30=+1+5-7-29+30=0$

Una radice del polinomio è quindi -1; utilizzando la regola di Ruffini abbiamo:

	1	-5	-7	29	30
-1		-1	6	1	-30
	1	-6	-1	30	0

Con i numeri che abbiamo ottenuto nell'ultima riga costruiamo il polinomio quoziente
$x^3-6x^2-1x+30$ Possiamo allora scrivere:
$x^4-5x^3-7x^2+29x+30=(x+1)(x^3-6x^2-x+30)$
Con lo stesso metodo scomponiamo il polinomio $x^3-6x^2-1x+30$
Cerchiamone le radici tra i divisori di 30, precisamente nell'insieme
$\{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 5; \pm 6; \pm 10; \pm 15; \pm 30\}$. Bisogna ripartire dall'ultima radice trovata, cioè da -1
Per $x=-1$ si ha $P(-1)=(-1)^3-6\cdot(-1)^2-1\cdot(-1)+30=-1-6+1+30\neq 0$.
Per $x=+2$ si ha $P(+2)=(+2)^3-6\cdot(+2)^2-1\cdot(+2)+30=+8-24-2+30\neq 0$.
Per $x=-2$ si ha $P(+2)=(-2)^3-6\cdot(-2)^2-1\cdot(-2)+30=-8-24+2+30=0$.

Quindi -2 è una radice del polinomio. Applichiamo la regola di Ruffini, ricordiamo che al primo rigo dobbiamo mettere i coefficienti del polinomio da scomporre, cioè $x^3-6x^2-1x+30$

	1	-6	-1	30
-2		-2	+16	-30
	1	-8	+15	0

Il polinomio $q(x)$ si scompone nel prodotto $x^3-6x^2-x+30=(x+2)\cdot(x^2-8x+15)$.
Infine possiamo scomporre $x^2-8x+15$ come trinomio notevole: i due numeri che hanno per somma -8 e prodotto +15 sono -3 e -5. In conclusione posiamo scrivere la scomposizione:
$x^4-5x^3-7x^2+29x+30=(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x-3)\cdot(x-5)$

Non sempre è possibile scomporre un polinomio utilizzando solo numeri interi. In alcuni casi possiamo provare con le frazioni, in particolare quando il coefficiente del termine di grado maggiore non è 1. In questi casi possiamo cercare la radice del polinomio tra le frazioni del tipo $\frac{p}{q}$, dove p un divisore del termine noto e q è un divisore del coefficiente del termine di grado maggiore.

Esempio

- $6x^2-x-2$

Determiniamo prima di tutto l'insieme nel quale possiamo cercare le radici del polinomio. Costruiamo tutte le frazione del tipo $\frac{p}{q}$, con p divisore di -2 e q divisore di 6. I divisori di 2 sono $\{\pm 1; \pm 2\}$ mentre i divisori di 6 sono $\{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6\}$. Le frazioni tra cui cercare sono $\left\{\pm\frac{1}{1}; \pm\frac{1}{2}; \pm\frac{2}{1}; \pm\frac{2}{3}; \pm\frac{2}{6}\right\}$ cioè $\left\{\pm 1; \pm\frac{1}{2}; \pm 2; \pm\frac{2}{3}; \pm\frac{1}{3}\right\}$.

Si ha $A(1)=-3;\ A(-1)=5;\ A\left(\frac{1}{2}\right)=-1;\ A\left(-\frac{1}{2}\right)=0$

Sappiamo dal teorema di Ruffini che il polinomio $A(x)=6x^2-x-2$ è divisibile per $\left(x+\frac{1}{2}\right)$ dobbiamo quindi trovare il polinomio $Q(x)$ per scomporre $6x^2-x-2$ come $Q(x)\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)$.

	6	−1	−2
$-\frac{1}{2}$		−3	2
	6	−4	0

Applichiamo la regola di Ruffini per trovare il quoziente:
Il quoziente è $Q(x)=6x-4$

Il polinomio sarà scomposto in $(6x-4)\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)$

Mettendo a fattore comune 2 nel primo binomio si ha:

$6x^2-x-2 = (6x-4)\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right) = 2(3x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right) =(3x-2)(2x+1)$

Scomponi in fattori i seguenti polinomi utilizzando il teorema di Ruffini

219 $2x^2-5x+2$

220 $3x^2-5x-2$

221 x^3-4x^2+x+6

222 $x^3+2x^2-9x-18$

223 $2x^3-3x^2-8x+12$

224 $x^4-x^3-5x^2-x-6$

225 x^3+2x^2-2x+3

226 x^3+x^2-5x+3

227 $2x^3-9x^2+7x+6$

228 $3x^3+5x^2-16x-12$

229 $2x^3+5x^2+5x+3$

230 $2x^3-13x^2+24x-9$

231 $6x^3-11x^2-3x+2$

232 $4x^4-4x^3-25x^2+x+6$

233 $x^3-9x-9+x^2$ R. $(x+1)(x+3)(x-3)$

234 m^3+2m^2-m-2 R. $[(m-1)(m+1)(m+2)]$

235 a^3+a^2-4a-4 R. $[(a+1)(a-2)(a+2)]$

236 $3a^2+a-2$ R. $[(a+1)(3a-2)]$

237 $6a^3-a^2-19a-6$ R. $[(a-2)(3a+1)(2a+3)]$

238 x^3-5x^2+8x-4 R. $(x-1)(x-2)^2$

239 $3t^3-t^2-12t+4$ R. $[(t+2)(t-2)(3t-1)]$

240 $3x^4+x^3-29x^2-17x+42$ R. $[(x+2)(x+3)(x+5)(2x^2-4x+3)]$

241 $y^4+y^3-3y^2-4y-4$ R. $[(y+2)(y-2)(y^2+y+1)]$

242 $t^4-8t^2-24t-32$ R. $[(t+2)(t-4)(t^2+2t+4)]$

243 $2x^5+16x^4+25x^3-34x^2-27x+90$ R. $[(x+2)(x+3)(x+5)(2x^2-4x+3)]$

244 $x^5-x^4-4x^3-5x^2-9x+18$ R. $[(x+2)(x+3)(x+5)(2x^2-4x+3)]$

245 $x^4+2x^3-3x^2-4x+4$ R. $[(x-1)^2(x+2)^2]$

246 $a^5+3a^4-2a^3-9a^2-11a-6$ R. $(a+1)(a-2)(a+3)(a^2+a+1)$

247 $2x^5+16x^4+19x^3-94x^2-213x-90$ R. $(x+2)(x+3)(x+5)(2x^2-4x-3)$

248 $6x^2-7x+2$ R. $(2x-1)(3x-2)$

249 $3x^3+x^2+x-2$ R. $(3x-2)(x^2+x+1)$

250 $2x^3+x^2+2x+1$ R. $(2x+1)(x^2+1)$

251 $3x^3+9x-x^2-3$ R: $(3x-1)(x^2+3)$

252 $1+5x+6x^2+4x^3+8x^4$

253 $a^6+6a^4+11a^2+6$ sostituisci $a^2=x$ R. $(a^2+1)(a^2+2)(a^2+3)$

254 $2x^{2n}+x^n-3$ sostituisci $x^n=a$ R. $(x^n-1)(2x^n+3)$

255 $x^3-ax^2-2ax+2a^2$ cerca le radici tra i monomi divisori di $2a^2$

►10. Somma e differenza di due cubi

Per scomporre i polinomi del tipo A^3+B^3 e A^3-B^3 possiamo utilizzare il metodo di Ruffini.

Esempio

- x^3-8 .

Il polinomio si annulla per x=2, che è la radice cubica di 8. Calcoliamo il quoziente.

	1	0	0	-8
2		2	4	8
	1	2	4	/

Il polinomio quoziente è $Q(x)=x^2+2x+4$ e la scomposizione risulta $x^3-8 = (x-2)(x^2+2x+4)$

Notiamo che il quoziente assomiglia al quadrato di un binomio, ma non lo è in quanto il termine intermedio è il prodotto e non il doppio prodotto dei due termini, si usa anche dire che è un falso quadrato. Un trinomio di questo tipo non è ulteriormente scomponibile.

Esempio

- x^3+27

Il polinomio si annulla per x=-3, cioè $P(-3)=(-3)^3+27=-27+27=0$. Il polinomio quindi è divisibile per $x+3$. Calcoliamo il quoziente attraverso la regola di Ruffini.

	1	0	0	27
-3		-3	9	-27
	1	-3	9	/

Il polinomio quoziente è $Q(x)=x^2-3x+9$ e la scomposizione risulta $x^3+27 = (x+3)(x^2-3x+9)$.

In generale possiamo applicare le seguenti regole per la scomposizione di somma e differenza di due cubi:

$$A^3+B^3=(A+B)(A^2-AB+B^2)$$
$$A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)$$

Scomponi in fattori tenendo presente la somma e la differenza di cubi

256	x^3-1	$27-x^3$
257	x^3+1	x^3+8
258	$64a^3-8b^3$	$8x^3-27y^3$
259	$0{,}001^3-x^3$	$10^{-3}x^3-10^3y^3$
260	x^6-y^6	$\frac{1}{8}a^3-\frac{1}{27}b^3$
261	$27x^3-8y^3$	a^3b^3-1
262	a^9-1	a^6-1
263	a^3-125	$\frac{27}{8}x^3-8$
264	$0{,}064x^3+\frac{1}{27}y^3$	$\frac{1}{8}a^3-\frac{1}{27}t^3$
265	x^6-y^3	x^9+27y^3
266	$5x^4y^3+\frac{625}{8}x$	$\frac{5}{8}a^4-\frac{5}{27}ab^3$
267	$8x^{12}-1$	$a^{300}+1$
268	$a^{3n}-8b^3$	$a^{3n+3}+1$

►11. Scomposizione mediante metodi combinati

Nei paragrafi precedenti abbiamo analizzato alcuni metodi per ottenere la scomposizione in fattori di un polinomio e talvolta abbiamo mostrato che la scomposizione si ottiene combinando metodi diversi. Sostanzialmente non esiste una regola generale per la scomposizione di polinomi, cioè non esistono criteri di divisibilità semplici come quelli per scomporre un numero nei suoi fattori primi. In questo paragrafo vediamo alcuni casi in cui si applicano vari metodi combinati tra di loro..
Un buon metodo per ottenere la scomposizione è procedere tenendo conto di questi suggerimenti:

1. analizzare se si può effettuare **un raccoglimento totale;**
2. **contare il numero di termini** di cui si compone il polinomio:
   - 2.1.con **due** termini analizzare se il binomio è
     - a) una *differenza di quadrati* $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$
     - b) una *somma di cubi* $A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)$
     - c) una *differenza di cubi* $A^3+B^3=(A+B)(A^2-AB+B^2)$
     - d) una *somma di quadrati o di numeri positivi* nel qual caso è ***irriducibile*** A^2+B^2
   - 2.2.con **tre** termini analizzare se è
     - a) un *quadrato di binomio* $A^2\pm 2AB+B^2=(A\pm B)^2$
     - b) un *trinomio particolare* del tipo $x^2+Sx+P=(x+a)(x+b)$ con $a+b=S\,;\,a\cdot b=P$
     - c) un *falso quadrato, che è irriducibile* $A^2\pm AB+B^2$
   - 2.3.con **quattro** termini analizzare se è
     - a) un *cubo di binomio* $A^3\pm 3A^2B+3AB^2\pm B^3=(A\pm B)^3$
     - b) una *particolare differenza di quadrati* $A^2\pm 2AB+B^2-C^2=(A\pm B+C)(A\pm B-C)$
     - c) possibile un *raccoglimento parziale* $ax+bx+ay+by=(a+b)(x+y)$
   - 2.4.con **sei** termini analizzare se è
     - a) un *quadrato di trinomio* $A^2+B^2+C^2+2AB+2AC+2BC=(A+B+C)^2$
     - b) possibile un *raccoglimento parziale* $ax+bx+cx+ay+by+cy=(a+b+c)(x+y)$
3. se non riuscite ad individuare nessuno dei casi precedenti, provate ad applicare la **regola di Ruffini**

Ricordiamo infine alcune formule per somma e differenza di potenze dispari

$A^5+B^5=\left(A+B\right)\left(A^4-A^3B+A^2B^2-AB^3+B^4\right)$

$A^5-B^5=\left(A-B\right)\left(A^4+A^3B+A^2B^2+AB^3+B^4\right)$

$A^7\pm B^7=(A\pm B)(A^6\mp A^5B+A^4B^2\mp A^3B^3+A^2B^4\mp AB^5+B^6)$

$(A^{11}-B^{11})=(A-B)(A^{10}+A^9B+A^8B^2+A^7B^3+A^6B^4+A^5B^5+A^4B^6+A^3B^7+A^2B^8+AB^9+B^{10})$

… … … ...

La differenza di due potenze ad esponente pari (uguale o diverso) rientra nel caso della differenza di quadrati:

$A^8-B^{10}=(A^4-B^5)(A^4+B^5)$

In alcuni casi si può scomporre anche la somma di potenze pari:

$A^6+B^6=(A^2)^3+(B^2)^3=(A^2+B^2)(A^4-A^2B^2+B^4)$

$A^{10}+B^{10}=\left(A^2+B^2\right)\left(A^8-A^6B^2+A^4B^4-A^2B^6+B^8\right)$

Proponiamo di seguito alcuni esercizi svolti o da completare in modo che possiate acquisire una certa abilità nella scomposizione di polinomi

Esempi

- $a^2x+5abx-36b^2x$

Il polinomio ha 3 termini, è di terzo grado in 2 variabili, è omogeneo;
tra i suoi monomi si ha M.C.D.= x; effettuiamo il raccoglimento totale: $x\cdot(a^2+5ab-36b^2)$
il trinomio ottenuto come secondo fattore è di grado 2 in 2 variabili, omogeneo;
può essere riscritto $a^2+(5b)\cdot a-36b^2$, proviamo a scomporlo come trinomio particolare: cerchiamo due monomi *m* ed *n* tali che $m+n=5b$ e $m\cdot n=-36b^2$; i due monomi sono *m=9b* ed *n=-4b*;
$a^2x+5abx-36b^2x=x\cdot(a+9b)\cdot(a-4b)$

- $x^2+y^2+2xy-2x-2y$

Facendo un raccoglimento parziale del coefficiente 2 tra gli ultimi tre monomi perché otterremmo $x^2+y^2+2\cdot(xy-x-y)$ su cui non possiamo fare alcun ulteriore raccoglimento.
I primi tre termini formano però il quadrato di un binomio e tra gli altri due possiamo raccogliere –2, quindi $(x+y)^2-2\cdot(x+y)$, (x + y) tra i due termini si ottiene
$x^2+y^2+2xy-2x-2y=(x+y)\cdot(x+y-2)$

- $8a+10b+(1-4a-5b)^2-2$

Tra i monomi sparsi possiamo raccogliere 2 a fattore comune
$p=2\cdot(4a+5b-1)+(1-4a-5b)^2$
Osserviamo che la base del quadrato è l'opposto del polinomio contenuto nel primo termine: poiché numeri opposti hanno stesso lo quadrato possiamo riscrivere: $p=2\cdot(4a+5b-1)+(-1+4a+5b)^2$
$8a+10b+(1-4a-5b)^2-2 = (4a+5b-1)\cdot(2-1+4a+5b) = (4a+5b-1)\cdot(1+4a+5b)$

- $t^3-z^3+t^2-z^2$

Il polinomio ha 4 termini, è di terzo grado in due variabili.
Poiché due monomi sono nella variabile t e gli altri due nella variabile z potremmo subito effettuare un raccoglimento parziale:
$t^3-z^3+t^2-z^2=t^2\cdot(t+1)-z^2\cdot(z+1)$, che non permette un ulteriore passo. Occorre quindi un'altra idea.
Notiamo che i primi due termini costituiscono una differenza di cubi e gli altri due una differenza di quadrati; applichiamo le regole:
$t^3-z^3+t^2-z^2=(t-z)\cdot(t^2+tz+z^2)+(t-z)\cdot(t+z)$
Ora effettuiamo il raccoglimento totale del fattore comune $(t-z)$
$t^3-z^3+t^2-z^2 = (t-z)\cdot(t^2+tz+z^2+t+z)$

- x^3-7x-6

Il polinomio ha 3 termini, è di 3° grado in una variabile.
Non possiamo utilizzare la regola del trinomio particolare poiché il grado è 3;
procediamo con la regola di Ruffini: cerchiamo il numero k tale che p(k) sia uguale a zero nell'insieme dei divisori del termine noto $D=\{\pm 1;\pm 2;\pm 3;\pm 6\}$;
per $x=+1$ si ha $P(+1)=(+1)^3-7\cdot(+1)-6=1-7-6\neq 0$;
per $x=-1$ si ha $P(-1)=(-1)^3-7\cdot(-1)-6=-1+7-6=0$;
quindi $p=x^3-7x-6=(x+1)\cdot q(x)$ con q(x) polinomio di secondo grado che determiniamo con la regola di Ruffini:

	1	0	-7	-6
-1		-1	+1	+6
	1	-1	-6	0

pertanto: $P(x)=x^3-7x-6=(x+1)\cdot(x^2-x-6)$
Il polinomio quoziente è un trinomio di secondo grado; proviamo a scomporlo come trinomio notevole;
cerchiamo due numeri a e b tali che $a+b=-1$ e $a\cdot b=-6$;
i due numeri vanno cercati tra le coppie che hanno -6 come prodotto, precisamente (-6, +1), (-3, +2), (+6,-1), (+3,-2). La coppia che fa a caso nostro è -3 +2 quindi si scompone $q=x^2-x-6=(x-3)\cdot(x+2)$. In definitiva
$x^3-7x-6=(x+1)\cdot(x-3)\cdot(x+2)$

- $(m^2-4)^2-m^2-4m-4$

Il polinomio ha 4 termini di cui il primo è un quadrato di binomio; negli altri tre possiamo raccogliere -1;
$(m^2-4)^2-m^2-4m-4=(m^2-4)^2-(m^2+4m+4)$
Notiamo che anche il secondo termine è un quadrato di binomio, quindi: $(m^2-4)^2-(m+2)^2$
che si presenta come differenza di quadrati,allora diviene: $[(m^2-4)+(m+2)]\cdot[(m^2-4)-(m+2)]$
eliminando le parentesi tonde $(m^2+m-2)\cdot(m^2-m-6)$
I due fattori ottenuti si scompongono con la regola del trinomio. In definitiva si ottiene:
$(m^2+m-2)\cdot(m^2-m-6) = (m+2)\cdot(m-1)\cdot(m-3)\cdot(m+2)=(m+2)^2\cdot(m-1)\cdot(m-3)$.

- $(a-3)^2+(3a-9)\cdot(a+1)-(a^2-9)$

$=(a-3)^2+3\cdot(a-3)\cdot(a+1)-(a-3)\cdot(a+3)$
mettiamo a fattore comune (a-3)
$(a-3)\cdot[(a-3)+3\cdot(a+1)-(a+3)]$
Svolgiamo i calcoli nel secondo fattore, otteniamo:
$(a-3)(a-3+3a+3-a-3)=(a-3)(3a-3)$

- $a^4+a^2b^2+b^4$

Osserva che per avere il quadrato del binomio occorre il doppio prodotto, aggiungendo e togliendo a^2b^2 otteniamo il doppio prodotto cercato e al passaggio seguente ci troviamo con la differenza di quadrati:
$a^4+2a^2b^2+b^4-a^2b^2=(a^2+b^2)^2-(ab)^2=(a^2+b^2+ab)(a^2+b^2-ab)$

- $a^5+2a^4b+a^3b^2+a^2b^3+2ab^4+b^5$

$a^3(a^2+2ab+b^2)+b^3(a^2+2ab+b^2)=(a^3+b^3)(a^2+2ab+b^2)=(a+b)(a^2-ab+b^2)(a+b)^2=$
$(a+b)^3(a^2-ab+b^2)$

- $a^2x^2+2ax^2-3x^2-4a^2-8a+12$

$x^2(a^2+2a-3)-4(a^2+2a-3)=(x^2-4)(a^2+2a-3)=(x+2)(x-2)(a-1)(a+3)$

►12. Esercizi di ripasso sulla scomposizione in fattori

269 $(x+1)^2-(y-1)^2$ R. $(x+y)(x-y+2)$

270 $5x^4y^2+5x^2y+\frac{5}{4}$ R. $5\left(\frac{1}{2}+x^2y\right)^2$

271 $(y-1)^2-2y+2$ R. $[(y-1)(y-3)]$

272 $4-(y-1)^2$ R. $[(y+1)(3-y)]$

273 $4x^2-xy-4x+y$ R. $[(x-1)(4x-y)]$

274 $0,\overline{3}a^2-\frac{1}{3}b^2$ R. $\frac{1}{3}(a+b)(a-b)$

275 $3x+k+3x^2+kx$ R. $[(x+1)(3x+k)]$

276 $x^3+3x-4x^2$ R. $[x(x-1)(x-3)]$

277 $4x^2-7x-2$ R. $[(x-2)(4x+1)]$

278 $6x^2-24xy+24y^2$ R. $[6(x-2y)^2]$

279 $x^2-(2+a)x+2a$ R. $[(x-2)(x-a)]$

280 $2x^2+5x-12$ R. $[(x+4)(2x-3)]$

281 $\frac{1}{16}a^2+4b^4-ab^2$ R. $\left(\frac{1}{4}a-2b^2\right)^2$

282 $81a-16a^3b^2$ R. $a(9-4ab)(9+4ab)$

283 $a^2-10a-75$ R. $(a-15)(a+5)$

284 $ax+bx-3ay-3by$ R. $(a+b)(x-3y)$

285 $x^5+x^3+x^2+1$ R. $[(x+1)(x^2+1)(x^2-x+1)]$

286 $0{,}09x^4y^5-0{,}04y$ R. $\frac{1}{100}y(3x^2y^2+2)(3x^2y^2-2)$

287 $-a^2x-2abx-b^2x+5a^2+10ab+5b^2$ R. $[(a+b)^2(5-x)]$

288 $\frac{1}{9}x^2-0{,}25b^2$ R. $\frac{1}{36}(2x+3b)(2x-3b)$

289 $8a^3-\frac{1}{8}b^3$ R. $\left(2a-\frac{1}{2}b\right)\left(4a^2+ab+\frac{1}{4}b^2\right)$

290 $4a^3+8a^2-a-2$ R. $[(a+2)(2a+1)(2a-1)]$

291 x^3-x^4+8-8x R. $[(1-x)(x+2)(x^2-2x+4)]$

292 $4xy+4xz-3ya-3za-yh-zh$ R. $[(x+z)(4x-3a-h)]$

293 x^6-81x^2 R. $[x^2(x+3)(x-3)(x^2+9)]$

294 $54a^3b-2b^4$ R. $[2b(3a-b)(9a^2+3ab+b^2)]$

295 $-12xyz+9ya+6x^3a-8x^4z$ R. $[(3a-4xz)(2x^3+3y)]$

296 $y^2+ay-6a^2$ R. $[(y-2a)(y+3a)]$

297 $2x^3+4x-3x^2-6$ R. $[(x^2+2)(2x-3)]$

298 $(x^2-7x+10)^2-x^2+10x-25$ R. $(x-5)^2(x-1)(x-3)$

299 $\frac{4}{9}a^2-b^2+\frac{2}{3}a+b$ R. $\left(\frac{2}{3}a+b\right)\left(\frac{2}{3}a-b+1\right)$

300 $x^2-6x+9-(y^2-2y+1)$ R. $(x-4+y)(x-2-y)$

301 $16a^4x^2-8a^2b^2x^2+b^4x^2$ R. $x^2(2a-b)^2(2a+b)^2$

302 $4(x-1)^2-4y(x-1)+y^2$ R. $(2x-2-y)^2$

303 $4a^4b-4a^3b^2+6a^3b^3-6a^2b^4$ R. $2a^2b(2a+3b^2)(a-b)$

304 $8x^3-14x^2+7x-1$ R. $(x-1)(2x-1)(4x-1)$

305 $x^4-3x^3-10x^2+24x$ R. $x(x-2)(x+3)(x-4)$

306 $81a^4-64a^2b^2$ R. $a^2(9a-8b)(9a+8b)$

307 $4x^3+8x^2+x-3$ R. $(2x+3)(2x-1)(x+1)$

308 $2a^4b^3c-8a^2bc^5$ R. $2a^2bc(ab-2c^2)(ab+2c^2)$

309 x^3+2x^2-x-2 R. $(x-1)(x+2)(x+1)$

310 $20x^3-45x$ R. $5x(2x-3)(2x+3)$

311 $18p^3q^2x-2pq^4x+18p^3q^2y-2pq^4y$ R. $2pq^2(3p-q)(3p+q)(x+y)$

312 $20a^6-16a^3c-25a^4b+20abc$ R. $a(4a^2-5b)(5a^3-4c)$

313 $2a^7-6a^4x^2+6a^4b^2-18ab^2x^2$ R. $2a(a^2+3b^2)(a^2-3x^2)$

314 $x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3$ R. $(x-2y)^3$

315 $3x^5+12x^4-21x^3-66x^2+72x$ R. $3x(x-1)(x-2)(x+3)(x+4)$

316 $32a^3x^2y-48a^3xy^2+4b^3x^2y-6b^3xy^2$ R. $2xy(2a+b)(2x-3y)(4a^2-2ab+b^2)$

317 $x^5+3x^4-xy^4-3y^4$ R. $(x+3)(x-y)(x+y)(x^2+y^2)$

318 $48a^5bx+16a^5by-6a^2b^4x-2a^2b^4y$ R. $a^2b(2a-b)(3x+y)(4a^2+2ab+b^2)$

319 $x^2(x^4-18x^2+81)-x^6+729$ R. $-9(x+3)(x-3)(2x^2+9)$

320 x^5-2x^2-x+2 R. $(x+1)(x-1)^2(x^2+x+2)$

321 $x^8-y^8-2x^6y^2+2x^2y^6$ R. $(x-y)^3(x+y)^3(x^2+y^2)$

322 $16ab-81a^5b^9$ R. $ab(2-3ab^2)(2+3ab^2)(4+9a^2b^4)$

323 $6x^7+2x^6-16x^5+8x^4$ R. $2x^4(x-1)(x+2)(3x-2)$

324 x^4-4x^2-45 R. $(x-3)(x+3)(x^2+5)$

325 $-3a^7x^2+9a^5x^4-9a^3x^6+3ax^8$ R. $3ax^2(x-a)^3(x+a)^3$

326 $x^3-13x^2+35x+49$ R. $(x+1)(x-7)^2$

327 $4ab^3c^2+20ab^3-3abc^2-15ab$ R. $ab(4b^2-3)(c^2+5)$

328 $6a^6b^3-12a^4b^5+6a^2b^7$ R. $6a^2b^3(a-b)^2(a+b)^2$

329 y^3-5y^2-24y R. $y(y+3)(y-8)$

330 $x^2+4xy-6x+4y^2-12y+9$ R. $(x+2y-3)^2$

331 $2x^4-4x^3+4x^2-4x+2$ R. $2(x^2+1)(x-1)^2$

332 $x^2-y^2+2ay-a^2$ R. $(x-a+y)(x+a-y)$

333 $(3-a)^2+(5+a)\cdot(a-3)$ R. $(a-3)(2a+3)$

334 $3x^3-x-1+3x^2$ R. $(3x^2-1)(x+1)$

335 $x^3y^2-x^2y^3+\frac{1}{4}xy^4$ R. $xy^2\left(x-\frac{1}{2}y\right)^2$

336 $-27x^6+9x^5-x^4+\frac{x^3}{27}$ R. $x^3\left(\frac{1}{3}-3x\right)^3$

337 $4x^2-9y^2-6yz^2-z^4$ R. $(2x+3y+z^2)(2x-3y-z^2)$

338 $\frac{1}{8}a^4b^2-\frac{3}{4}a^3b^3+\frac{3}{2}a^2b^4-ab^5$ R. $\frac{1}{8}ab^2(a-2b)^3$

339 $a^2+4ab+4b^2-x^2+2xy-y^2$ R. $(a+2b+x-y)(a+2b-x+y)$

340 $a^4b-2a^3b^2+4a^3bc+a^2b^3-4a^2b^2c+4a^2bc^2$ R. $a^2b(a-b+2c)^2$

341 $3a^4-3a^3x+a^2x^2-\frac{1}{9}ax^3$ R. $3a\left(a-\frac{1}{3}x\right)^3$

342 a^3x+4a^2x+4ax R. $ax(a+2)^2$

343 $a^3b^5-\frac{2}{3}a^2b^6+\frac{1}{9}ab^7$ R. $ab^3\left(ab-\frac{1}{3}b^2\right)^2$

344 $a^2-ab-9a+3b+18$ R. $(a-3)(a-b-6)$

345 $8ab^2-2a^3$ R. $-2a(a+2b)(a-2b)$

346 $a^4-6a^3+3a^2+18a+9-1$ R. $(a^2-3a-4)(a^2-3a-2)$

347 $a^3+3a^2b+a^2+3ab^2+2ab+b^3+b^2$ R. $(a+b)^2(a+b+1)$

348 $\frac{x^7}{3}+x^5+x^3+\frac{x}{3}$ R. $\frac{1}{3}x(x^2+1)^3$

349 $\frac{a^2}{4}+2ab-16b^4+4b^2$ R. $\left(\frac{1}{2}a+2b-4b^2\right)\left(\frac{1}{2}a+2b+4b^2\right)$

350 $5a^4x^3-40a^4y^3-45a^2b^2x^3+360a^2b^2y^3$ R. $5a^2(a-3b)(a+3b)(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$

351 $-24a^4b^2x^2-72a^4b^2y^2-3ab^5x^2-9ab^5y^2$ R. $-3ab^2(2a+b)(x^2+3y^2)(4a^2-2ab+b^2)$

352 $2ax^4y-6bx^4y-2axy^4+6bxy^4$ R. $2xy(a-3b)(x-y)(x^2+xy+y^2)$

353 $640a^3x^2y-960a^3xy^2+10b^3x^2y-15b^3xy^2$ R. $5xy(4a+b)(2x-3y)(16a^2-4ab+b^2)$

354 $-4x-3-2(x+1)(16x^2+9+24x)$ R. $-(4x+3)(8x^2+14x+7)$

355 $(x-2)+3(x^2-4x+4)-(x+1)(x-2)^2$ R. $(x-1)(x-2)(3-x)$

356 $(x-1)^2-(x+2)(x^2-2x+1)-2(x^3-3x^2+3x-1)$ R. $(x-1)^2(1-3x)$

357 $(3x+6)-5(x^2+4x+4)^2$ R. $(2-x)(5x^3+30x^2+60x+37)$

358 $(y-x)^2(3x+2)-2(x-y)^3-2x^2+2y^2$ R. $(x-y)(x^2+xy-4y-2y^2)$

359 $(-x^2+6x-9)^2-(4x-12)(x+1)$ R. $(x-3)(x^3-9x^2+23x-31)$

360 $x+1-2(x^2+2x+1)+(3x^2+x^3+3x+1)(x-2)$ R. $(x+1)(x^3-5x^2-4)$

361 $36x^2+24xy-48x+4y^2-16y+15$ R. $(6x+2y-3)(6x+2y-5)$

362 $x^5-2-x+2x^4$ R. $(x+2)(x^2+1)(x+1)(x-1)$

363 $6a^3+11a^2+3a$ R. $a(3a+1)(2a+3)$

364 $3a^4-24ax^3$ R. $(3x-1)(a-2x)(a^2+2ax+4x^2)$

365 x^2-2x+1 $\qquad$ $x^2+y^2+z^4-2xy+2xz^2-2yz^2$

366 $a^6+b^9+3a^4b^3+3a^2b^6$ $\qquad$ $a^3-6a^2+12a-8$

367 $a^2+b^2-1-2ab$ $\qquad$ $a^4+2b-1-b^2$

368 $-8a^2b+24ab^2-18b^3$ $\qquad$ $6a^5-24ab^4$

369 $a^4+b^4-2a^2b^2$ $\qquad$ $x^6-9x^4y+27x^2y^2-27y^3$

370 $x^2-12x+32$ $\qquad$ $x^2-8x+15$

371 x^4-7x^2-60 $\qquad$ x^3-5x^2+6x

372 $4a^2-9-4b^2+12b$ $\qquad$ x^5-13x^3+36x

373 $4a^2+4a+1$ $\qquad$ $4x^2y^2-4xy+1$

374 x^3+1 $\qquad$ a^2+6a+9

375 $12xy-16y^2$ $\qquad$ $2x^3-16$

376 $2x^2+4x+8$ $\qquad$ ax^2-ay^2

377 $a^3-8+12a-6a^2$ $\qquad$ $7t^2-28$

378 $2x^2+8+8x$ $\qquad$ $25+9x^2+30x$

379 z^8-2z^4+1 $\qquad$ $3k^4+k^6+1+3k^2$

380 $3x^5-27xy^4$ $\qquad$ $25y^4-10y^2+1$

381	$8a^4b-8a^3b^2+12a^3b^3-12a^2b^4$	$3a^3x+3a^3y-3abx-3aby$
382	$81a^6b^3-a^2b^3$	$6abx-3x+2aby-y$
383	$x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3$	$8a^7b-8a^3b^3+12a^6b-12a^2b^3$
384	$4a^2x-4a^2y^2-4ab^2x+4ab^2y^2$	$a^2+12a+36$
385	$x^8-y^8-2x^6y^2+2x^2y^6$	$5x^4-5x^2y^4$
386	$(2x-1)^3-(3-6x)^2$	$x^4-2x^3+6x^2y+x^2-6xy+9y^2$
387	$x^2+10xy+25y^2$	$27a^6-54a^4b+36a^2b^2-8b^3$
388	$64a^9-48a^6b^2+12a^3b^4-b^6$	$4a^2x^2-4b^2x^2-9a^2y^2+9b^2y^2$
389	$-54a^7x+54a^5x^2-18a^3x^3+2ax^4$	$4ax^5-2ax^3z^4+8ax^3y^2-4axy^2z^4$
390	$x^6-6x^4+12x^2-8$	$a^7-a^4b^2-4a^3b^2+4b^4$
391	x^4+6x^2-40	$x^5-13x^3+12x^2$
392	$32ab-2a^5b^5$	$24x^4y+36x^3y^3+18x^2y^5+3xy^7$
393	$\frac{4}{9}a^4+\frac{4}{9}a^2b+\frac{b^2}{9}$	$\frac{4}{25}+\frac{4}{5}xy+x^2y^2$
394	$-2a^{10}+12a^7b-24a^4b^2+16ab^3$	$x^3-7x^2-25x+175$
395	$-4x^7+16x^6+28x^5-88x^4-96x^3$	$128a^3-200a$
396	x^4-6x^2-27	$x^4+4x^3+x^2-6x$
397	$8a^5b^2-64a^2b^5$	$4a^2b^5-81b$
398	$ax+bx-3ay-3by$	$2ax^2+8ay^2+8axy$
399	$81a^4-b^4$	$3a^5b^3+24a^2b^9$
400	$x^2-3a^3+ax-3a^2x$	$x^2-12x+133$
401	$3x^5-27xy^4$	$25y^4-10y^2+1$
402	$4x^2+2xy+\frac{1}{4}y^2$	$\frac{16}{27}x^3+\frac{8}{3}x^2y+4xy^2+2y^3$
403	$1-9x+27x^2-27x^3$	$6x^3y-12x^2y^2+6xy^3$
404	x^4+3x^2-28	$2x^3-3x^2-5x+6$
405	$3x^4y^3+9x^4-9xy^3-27x$	$81a^6-18a^4b^2+a^2b^2$
406	$125+75y+15y^2+y^3$	$4a^2x^2-16a^2y^2-b^2x^2+4b^2y^2$
407	x^4+2x^2-24	$5x^3-17x^2+16x-4$
408	$27a^6-54a^4b+36a^2b^2-8b^3$	$18a^4b-2b^3$
409	$\frac{1}{8}x^6-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{27}$	$\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{3}ax+\frac{1}{9}a^2$
410	x^4-9x^2+20	$3a^4b^3-6a^3b^3-9a^2b^3$
411	$4a^5b^2+32a^2b^5$	$32a-50ab^2$
412	$5x^4y^2+5x^4-5xy^4-5xy^2$	$4y^2-12y+9$

413	$\frac{8}{27}x^3-2x^2+\frac{9}{2}x-\frac{27}{8}$	$\frac{4}{49}x^2y^2-\frac{4}{7}xyz+z^2$
414	$\frac{1}{9}a^6+9a^2-2a^4$	$1-\frac{3}{2}x^3+\frac{9}{16}x^6$
415	$5x^4-5x^3y^2-5x^2y+5xy^3$	$2b^6c-8c^3$
416	$-8a^3+12a^2x^2-6ax^4+x^6$	$16a^4x^2-8a^2b^2x^2+b^4x^2$
417	$x^2+14x-32$	$4x^3+7x^2-14x+3$
418	x^4-4x^2-45	$3x^3+x^2-8x+4$
419	$4a^2-9-4b^2+12b$	x^3+3x^2-6x-8
420	$2ax^2+8ay^2+8axy$	x^6-81x^2+x-3
421	$x^6-y^6+x^3+y^3$	$x^2-3a^3+ax-3a^2x$
422	$16x^3-72x^2+108x-54$	$50a^4b^3-2b^3$
423	$12ax^2+12axy+3ay^2$	$625a^4-b^4$
424	x^4+5x^2-36	$-4x^7+16x^6+28x^5-88x^4-96x^3$
425	a^4+4a^2-32	$4x^3+7x^2-14x+3$
426	$2ax^4y-8bx^4y-2axy^4+8bxy^4$	$36ab-49a^3b^3$
427	$\frac{1}{9}x^6-2x^4+9x^2$	$\frac{4}{25}a^4+\frac{25}{9}b^2-\frac{4}{3}a^2b$
428	t^5-z^5	$3x^2+6x+6$
429	t^6-2t^3+1	$tx+x^2+y^2+ty+2xy$
430	$12m^3+9m^5-3m^7$	$a^2b-25b+a^2-25$
431	$2ab-b^2+3\cdot(b-2a)^2$	x^6-y^6
432	$3k^3-k^2+k+5$	y^6+y^3-2
433	a^8-1	$32a^4b^3-2b^3$
434	$x^6-8a^3+12a^2x^2-6ax^4$	$x^2-3a^3+ax-3a^2x$
435	$9y^2+6y+1$	$9a^3-9$
436	$a^3+4a-2a^2-3$	$3a+2a^3-7a^2$
437	$50a^3b^2-8a^5$	$20ab^2c+8abc+2abc^2+2a^2bc^2+2a^2b^2c$
438	$ab^4-\frac{1}{3}a^2b^2-b^6+\frac{1}{27}a^3$	$2xy+16-x^2-y^2$
439	$(a+2)(a^3-8)+(a^3+8)(a-2)$	$(x-y)^2+2(x-y)(3a+b)+(3a+b)^2$
440	$x^6-27+26x^3$	$4y^2-12x^2y+25x^2y^2-20xy^2+9x^4+30x^3y$
441	$\frac{1}{8}-8x^3y^3+6x^2y^2+\frac{3}{2}xy$	$4xy(a-3b)+2xy^2a-6xy^2b-2x^2y(3b-a)$
442	$x^2-4x-5xy+x^2y+6y+4$	x^6-8-7x^3
443	$x^{a+1}-5x^a-4x^{a-2}$	R. $x^{a-2}(x^3-5x^2-4)$
444	$x^{n^2-1}+2x^{n^2+2}+x^{n^2}(x-3)$	R. $x^{n^2-1}(2x-1)(x^2+x-1)$
445	$x^{4n+1}-x^{3n+1}y^n+2x^ny^{4n}-2y^{5n}$	R. $(x^n-y^n)(x^{3n+1}+2y^{4n})$
446	$x^{n+2}+3x^ny^{2n}-x^2y^3-3y^{3+2n}$	R. $(x^n-y^3)(x^2++3y^{2n})$
447	$x^ay^b+x^a-y^b-1$	R. $(x^a-1)(y^b+1)$
448	$x^{2n+1}y^{h+1}-2x^{2n+1}-y^{h+1}+2$	R. $(x^{2n+1}-1)(y^{1+h}-2)$
449	$x^{a+4}-3x^{a+2}y^a+x^2y^2-3y^{2+a}$	R. $(x^{2+a}+y^2)(x^2-3y^a)$

►13. M.C.D. e m.c.m. tra polinomi

Il calcolo del minimo comune multiplo (m.c.m.) e del massimo comune divisore (M.C.D.) si estende anche ai polinomi. Per determinare M.C.D e m.c.m. di due o più polinomi occorre prima di tutto scomporli in fattori irriducibili. La cosa non è semplice poiché non si può essere sicuri di aver trovato il massimo comune divisore o il minimo comune multiplo per la difficoltà di decidere se un polinomio è irriducibile: prudentemente si dovrebbe parlare di divisore comune e di multiplo comune.
Un polinomio A si dice **multiplo** di un polinomio B se esiste un polinomio C per il quale $A=B\cdot C$; in questo caso diremo anche che B è **divisore** del polinomio A.

Massimo Comun Divisore

Dopo aver scomposto ciascun polinomio in fattori, il massimo comune divisore tra due o più polinomi è il prodotto di tutti i fattori comuni ai polinomi, presi ciascuno una sola volta, con il minimo esponente.
Sia i coefficienti numerici, sia i monomi possono essere considerati polinomi.

Procedura per calcolare il M.C.D. tra polinomi

1. **scomponiamo in fattori ogni polinomio;**
2. **prendiamo i fattori comuni a tutti i polinomi una sola volta con l'esponente più piccolo;**
3. **se non ci sono fattori comuni a tutti i polinomi il M.C.D. è 1.**

Esempio

- $M.C.D.(3a^2b^3-3b^3;\ 6a^3b^2-6b^2;\ 12a^2b^2-24ab^2+12b^2)$

Scomponiamo in fattori i singoli polinomi

$3a^2b^3-3b^3 = 3b^3(a^2-1) = 3b^3(a-1)(a+1)$

$6a^3b^2-6b^2 = 6b^2(a^3-1) = 6b^2(a-1)(a^2+a+1)$

$12a^2b^2-24ab^2+12b^2 = 12b^2(a^2-2a+1) = 12b^2(a-1)^2$

I fattori comuni a tutti i polinomi presi con l'esponente più piccolo sono:

- tra i numeri il 3
- tra i monomi b^2
- tra i polinomi $a-1$

quindi il $M.C.D. = 3b^2(a-1)$

Minimo comune multiplo

Dopo aver scomposto ciascun polinomio in fattori, il minimo comune multiplo tra due o più polinomi è il prodotto dei fattori comuni e non comuni di tutti i polinomi, quelli comuni presi una sola volta, con il massimo esponente.

Procedura per calcolare il m.c.m. tra polinomi

1. **scomponiamo in fattori ogni polinomio;**
2. **prendiamo tutti i fattori comuni e non comuni dei polinomi, i fattori comuni presi una sola volta con il massimo esponente.**

Esempio

- $m.c.m.(3a^2b^3-3b^3;\ 6a^3b^2-6b^2;\ 12a^2b^2-24ab^2+12b^2)$

Scomponiamo in fattori i singoli polinomi

$3a^2b^3-3b^3 = 3b^3(a^2-1) = 3b^3(a-1)(a+1)$

$6a^3b^2-6b^2 = 6b^2(a^3-1) = 6b^2(a-1)(a^2+a+1)$

$12a^2b^2-24ab^2+12b^2 = 12b^2(a^2-2a+1) = 12b^2(a-1)^2$

- Il m.c.m. tra i coefficienti numerici è 6;
- tra i monomi è b^3 ;
- tra i polinomi $(a-1)^2\cdot(a+1)\cdot(a^2+a+1)$

Quindi $m.c.m. = 12b^3(a-1)^2(a+1)(a^2+a+1)$

Calcola il m.c.m e il M.C.D dei seguenti gruppi di polinomi

450 $a+3;\quad 5a+15;\quad a^2+6a+9$ R. $M.C.D.=(a+3);\ m.c.m.=5(a+3)^2$

451 $a^2-b^2;\quad ab-b^2;\quad a^2b-2ab^2+b^3$ R. $M.C.D.=(a-b);\ m.c.m.=b(a+b)(a-b)^2$

452 $x^2-5x+4;\quad x^2-3x+2;\quad x^2-4x+3$ R. $(x-1);(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$

453 $x^2+2x-2;\quad x^2-4x+4;\quad x^2-4$ R. $1;\ (x-2)^2(x+2)(x^2+2x-2)$

454 $a^3b^2-2a^2b^3;\quad a^3b-4a^2b^2+4ab^3;\quad a^3b^2-4ab^4$ R. $(a-2b);a^2b^2(a-2b)^2(a+2b)$

455 $x^3+2x^2-3x;\quad x^3-x;\quad x^2-2x+1$ R. $(x-1);\ x(x-1)^2(x+1)(x+3)$

456 $a-b;\ ab-a^2;\ a^2-b^2$ R. $(a-b);\ (b-2a)(b+2a)(b^2-4a+4a^2)$

457 $b+2a;\ b-2a;\ b^2-4a^2;\ b^2-4a+4a^2$ R. $M.C.D.=1;m.c.m.=a(a-3)(a+3)$

458 $a^2-9;\ 3a-a^2;\ 3a+a^2$ R. $M.C.D.=1;m.c.m.=a(a-3)(a+3)$

459 $a+1;\ a^2-1;\ a^3+1$ R. $(a+1);\ (a+1)(a-1)(a^2-a+1)$

460 $x^2+2xy+y^2;\ x^2-y^2;\ (x+y)^2(x-y)$ R. $(x+y);(x+y)^2(x-y)$

461 $b^3+b^2-4b-4;\ b^2-a;\ b^2-1$ R. $1;(b-1)(b+1)(b-2)(b+2)(b^2-a)$

462 $a-2;\ a^2-9;\ a^2+a-6$ R. $1;\ (a-2)(a-3)(a+3)$

463 $3x+y+3x^2+xy;\ 9x^2-1;\ 9x^2+6xy+y^2$ R. $1;(x+1)(3x-1)(3x+1)(3x+y)^2$

464 $2x^3-12x^2y+24xy^2-16y^3;\ 6x^2-12xy;\ 4x^3-16x^2y+16xy^2$ R. $2(x-2y);12x(x-2y)^3$

465 $x^3-9x+x^2;\quad 4-(x-1)^2;\quad x^2+4x+3$

466 $x-1;\quad x^2-2x+1;\quad x^2-1$

467 $x-2;\quad x-1;\quad x^2-3x+2$

468 $a^2-1;\quad b+1;\quad a+ab-b-1$

469 $x;\quad 2x^2-3x;\quad 4x^2-9$

470 $x-1;\quad x^2-1;\quad x^3-1$

471 $y^3+8a^3;\quad y+2a;\quad y^2-2ay+4a^2$

472 $z-5;\quad 2z-10;\quad z^2-25;\quad z^2+25+10z$

473 $a^2-2a+1;\quad a^2-3a+2;\quad 1-a$

474 $2x;\quad 3x-2;\quad 3x^2-2x;\quad 10x^2$

475 $a^2-a;\quad a^2+a;\quad a-a^2;\quad 2a^2-2$

476 $x-2;\quad x^2-4;\quad ax+2a-3x-6;\quad a^2-6a+9$

477 $x^2-a^2;\quad x+a;\quad x^2+ax;\quad ax+a^2$

478 $x^2-4x+4;\quad 2x-x^2;\quad x^2-2x;\quad x^3;\quad x^3-2x^2$

►14. Frazioni algebriche

Definizione di frazione algebrica

Diamo la seguente definizione:

DEFINIZIONE. Si definisce **frazione algebrica** una espressione del tipo $\frac{A}{B}$ dove A e B sono polinomi.

Osserviamo che un'espressione di questo tipo si ottiene talvolta quando ci si propone di ottenere il quoziente di due monomi.

Esempi

- Determinare il quoziente tra $m_1=5a^3b^2c^5$ e $m_2=-3a^2bc^5$

Questa operazione si esegue applicando, sulla parte letterale, le proprietà delle potenze e sul coefficiente la divisione tra numeri razionali: $q=5a^3b^2c^5:(-3a^2bc^5)=-\frac{5}{3}ab$.

Il quoziente è quindi un monomio.

- Determinare il quoziente tra $m_1=5a^3b^2c^5$ e $m_2=-3a^7bc^5$.

In questo caso l'esponente della *a* nel dividendo è minore dell'esponente della stessa variabile nel divisore quindi si ottiene $q_1=5a^3b^2c^5:(-3a^7bc^5)=-\frac{5}{3}a^{-4}b$. Questo non è un monomio per la presenza dell'esponente negativo alla variabile *a*. Sappiamo che $a^{-4}=\frac{1}{a^4}$ e quindi:

$q_1=5a^3b^2c^5:(-3a^7bc^5)=\frac{-5}{3}a^{-4}b=-\frac{5b}{3a^4}$ Il quoziente è una frazione algebrica.

Quando vogliamo determinare il quoziente di una divisione tra un monomio e un polinomio si presentano diversi casi:

Caso1: monomio diviso un polinomio

- Determinare il quoziente tra: $D=2a^3b$ e $d=a^2+b$

Il dividendo è un monomio e il divisore un polinomio.
Questa operazione non ha come risultato un polinomio ma una frazione.

$$q=2a^3b:(a^2+b)=\frac{2a^3b}{a^2+b}$$.

Caso2: un polinomio diviso un monomio

- $D=2a^3b+a^5b^3-3ab^2$ e $d=\frac{1}{2}ab$

$$q=(2a^3b+a^5b^3-3ab^2):\left(\frac{1}{2}ab\right)=4a^2+2a^4b^2-6b$$

Il quoziente è un polinomio

- $D=2a^3b+a^5b^3-3ab^2$ e $d=\frac{1}{2}a^5b$

Dividiamo ciascun termine del polinomio per il monomio assegnato: il quoziente sarà

$$q=(2a^3b+a^5b^3-3ab^2):\left(\frac{1}{2}a^5b\right)=4a^{-2}+2b^2-6a^{-4}b=\frac{4}{a^2}+2b^2-\frac{6b}{a^4}$$

Il quoziente è una somma di frazioni algebriche.

Caso3: un polinomio diviso un altro polinomio

- Determinare il quoziente tra i polinomi: $D=x-3$ e $d=x^2+1$

La divisione tra polinomi in una sola variabile è possibile, quando il grado del dividendo è maggiore o uguale al grado del divisore; questa condizione non si verifica nel caso proposto:

Il quoziente è la frazione algebrica $q=\frac{x-3}{x^2+1}$

Conclusione

una frazione algebrica può essere considerata come il quoziente indicato tra due polinomi.

Ogni frazione algebrica è dunque un'**espressione letterale fratta o frazionaria**.

►15. Condizioni di esistenza per una frazione algebrica

Per discussione di una frazione algebrica intendiamo la ricerca dei valori che attribuiti alle variabili non la rendano priva di significato. Poiché non è possibile dividere per 0, una frazione algebrica perde di significato per quei valori che attribuiti alle variabili rendono il denominatore uguale a zero. Quando abbiamo una frazione algebrica tipo $\frac{A}{B}$ poniamo sempre la **condizione di esistenza (C.E.)**: $B\neq 0$.

Esempi

- $\frac{1+x}{x}$ Questa frazione perde di significato quando il denominatore si annulla: C.E. $x\neq 0$
- $\frac{x}{x+3}$ Questa frazione perde di significato quando il denominatore si annulla: C.E. $x\neq -3$
- $\frac{3a+5b-7}{ab}$ C.E.: $ab\neq 0$ **.** Sappiamo che un prodotto è nullo quando almeno uno dei suoi fattori è nullo, dunque affinché il denominatore non si annulli non si deve annullare né *a* né *b*, quindi $a\neq 0$ e $b\neq 0$. Concludendo C.E.: $a\neq 0\wedge b\neq 0$.
- $f_3=\frac{-6}{2x+5}$ C.E. $2x+5\neq 0$, per risolvere questa disuguaglianza si procede come per le usuali equazioni: $2x+5\neq 0\rightarrow 2x\neq -5\rightarrow x\neq -\frac{5}{2}$ si può concludere C.E. $x\neq -\frac{5}{2}$.
- $f_4=\frac{-x^3-8x}{x^2+2}$ C.E. : $x^2+2\neq 0$; il binomio è sempre maggiore di 0 perché somma di due grandezze positive. Pertanto la condizione $x^2+2\neq 0$ è sempre verificata e la frazione esiste sempre. Scriveremo C.E. $\forall x\in\mathbb{R}$.
- $f_5=\frac{2x}{x^2-4}$ C.E. : $x^2-4\neq 0$; per rendere nullo il denominatore si dovrebbe avere $x^2 = 4$ e questo si verifica se x = +2 oppure se x = -2; possiamo anche osservare che il denominatore è una differenza di quadrati e che quindi la condizione di esistenza si può scrivere
C.E. : $(x-2)(x+2)\neq 0$, essendo un prodotto possiamo scrivere
C.E. : $x-2\neq 0\wedge x+2\neq 0$ e concludere: C.E. : $x\neq 2\wedge x\neq -2$.

Procedura per determinare la Condizione di Esistenza di una frazione algebrica

1. porre il denominatore della frazione diverso da zero;
2. scomporre in fattori il denominatore;
3. porre ciascun fattore diverso da zero;
4. escludere i valori che annullano il denominatore.

Determinare per ciascuna frazione la Condizione di Esistenza

479 $\frac{-3x^3+x-2x^2+1}{3x-6}$ $\frac{-x^3-8x}{x^2+4x+4}$ $\frac{2x}{x^3-7x^2+x-7}$

480 $\frac{-54}{a^3b^5c}$ $\frac{b-1}{3ab}$ $\frac{a+b-1}{2a\cdot(b^2-1)}$

481 $\frac{ay^2}{y^2-5y+6}$ $\frac{3x-8}{x^2}$ $\frac{-3x^3+x-2x^2+1}{x-1}$

482 $\frac{a^2-3b}{a-b}$ $\frac{a+2ab-6b}{a+b}$ $\frac{-a}{2a-b}$

483 $\frac{-x^3-8y^2}{x^2+y^2}$ $\frac{2x+3y-1}{x^2-4xy}$ $\frac{3x+8y}{x^2-y^2}$

484 $\frac{a^2-1}{2a^2x+4ax+2x}$ $\frac{-6a-5ab}{2b^2+4ab}$ $\frac{y-1}{ay+a+y+1}$

485 $\frac{-8a+3ab^4}{a^2b^2-25b^4}$ $\frac{a^3-2b^2}{a^3-b^3}$ $\frac{-8a+3}{a^3+3a^2+3a+1}$

►16. Semplificazione di una frazione algebrica

Semplificare una frazione algebrica significa dividere numeratore e denominatore per uno stesso fattore diverso da zero, in questo modo infatti la proprietà invariantiva della divisione garantisce che la frazione non cambia di valore. Quando semplifichiamo una frazione numerica dividiamo il numeratore e il denominatore per il loro M.C.D. che è sempre un numero diverso da zero, ottenendo una frazione ridotta ai minimi termini equivalente a quella assegnata. Quando ci poniamo lo stesso problema su una frazione algebrica, dobbiamo porre attenzione a escludere quei valori che attribuiti alle variabili rendono nullo il M.C.D.

Esempio

- $\dfrac{16x^3y^2z}{10xy^2}$ C.E. $xy^2 \neq 0 \rightarrow x \neq 0 \wedge y \neq 0$

Puoi semplificare la parte numerica $\dfrac{\cancel{16}^8}{\cancel{10}^5}$. Per semplificare la parte letterale applica la proprietà della potenze relativa al quoziente di potenze con la stessa base: $x^3 : x = x^{3-1} = x^2$ e $y^2 : y^2 = 1$

$$\frac{16x^3y^2z}{10xy^2} = \frac{8x^2z}{5}$$

- Ridurre ai minimi termini la frazione: $\dfrac{a^2-6a+9}{a^4-81}$

1° passo: scomponiamo in fattori
- il numeratore: $a^2 - 6a + 9 = (a-3)^2$
- il denominatore: $a^4 - 81 = (a^2-9)\cdot(a^2+9) = (a-3)\cdot(a+3)\cdot(a^2+9)$

2° passo: riscriviamo la frazione $\dfrac{(a-3)^2}{(a-3)\cdot(a+3)\cdot(a^2+9)}$

3° passo: C.E.: $(a-3)\cdot(a+3)\cdot(a^2+9) \neq 0$ da cui C.E.: $a \neq -3$ e $a \neq +3$
il terzo fattore non si annulla mai perché somma di un numero positivo e un quadrato;

4° passo: semplifichiamo: $\dfrac{(a-3)^2}{(a-3)\cdot(a+3)\cdot(a^2+9)} = \dfrac{a-3}{(a+3)(a^2+9)}$

- Riduciamo ai minimi termini la frazione in due variabili: $\dfrac{x^4+x^2y^2-x^3y-xy^3}{x^4-x^2y^2+x^3y-xy^3}$.

Scomponiamo in fattori
- numeratore: $x^4+x^2y^2-x^3y-xy^3 = x^2\cdot(x^2+y^2) - xy\cdot(x^2+y^2) = x\cdot(x^2+y^2)\cdot(x-y)$
- denominatore: $x^4-x^2y^2+x^3y-xy^3 = x^2\cdot(x^2-y^2) + xy\cdot(x^2-y^2) = x\cdot(x^2-y^2)\cdot(x+y) = x\cdot(x+y)^2\cdot(x-y)$

La frazione diventa: $\dfrac{x^4+x^2y^2-x^3y-xy^3}{x^4-x^2y^2+x^3y-xy^3} = \dfrac{x\cdot(x^2+y^2)\cdot(x-y)}{x\cdot(x+y)^2\cdot(x-y)}$.

C.E.: $x\cdot(x+y)^2\cdot(x^2+y^2) \neq 0$ cioè C.E.: $x \neq 0 \wedge x \neq -y$

Semplifichiamo i fattori uguali:

$$f = \frac{\cancel{x}\cdot\cancel{(x^2+y^2)}\cdot\cancel{(x-y)}}{\cancel{x}\cdot(x-y)^2\cdot\cancel{(x^2+y^2)}} = \frac{1}{(x-y)}$$

Semplificazioni errate

$\dfrac{\cancel{a}+b}{\cancel{a}}$ questa semplificazione è errata perché a e b sono addendi, non sono fattori.

$\dfrac{\cancel{x^2}+x+4}{\cancel{x^2}+2}$ questa semplificazione è errata perché x^2 è un addendo, non un fattore.

$\dfrac{x^2+y^2}{(x+y)^2}$ Questa frazione non si può semplificare.

$\dfrac{\cancel{3a}\cdot(a-2)}{\cancel{3a}x-7} = \dfrac{a-2}{x-7}$; $\dfrac{\cancel{(x-y^2)}\cdot\cancel{(a-b)}}{\cancel{(y^2-x)}\cdot\cancel{(a-b)}} = 1$; $\dfrac{\cancel{(2x-3y)}}{(3y-2x)^{\cancel{2}}} = \dfrac{1}{(3y-2x)}$

$$f = \frac{a^2+ab}{a^3} = \frac{\cancel{a}\cdot(a+b)}{a^{\cancel{3}\,2}} = \frac{\cancel{a}+b}{a^{\cancel{2}}} = \frac{1+b}{a}$$

Semplifica le seguenti frazioni e indica le Condizioni di Esistenza

486	$\frac{x^2-6x+9}{x^2-9}$	R $\frac{x-3}{x+3}$	$\frac{4x^2-4}{8x^2-8}$	R $\frac{1}{2}$
487	$\frac{ax+x+a^2+a}{a^2+2a+1}$	R $\frac{x+a}{a+1}$	$\frac{4x^2-4+x^3-x}{2x+2}$	R $\frac{x^2+3x-4}{2}$
488	$\frac{5x+5y}{3x+3y+ax+ay}$	R $\frac{5}{3+a}$	$\frac{3a^3-3a^2-a+1}{9a^4-1}$	R $\frac{a-1}{3a^2+1}$
489	$\frac{2x-2-ax+a}{x^2-2x+1}$	R $\frac{2-a}{x-1}$	$\frac{6a^2-4ab+3a-2b}{4a^2+4a+1}$	R. $\frac{3a-2b}{2a+1}$
490	$\frac{4x+4y}{3x+3y+ax+ay}$	R $\frac{4}{a+3}$	$\frac{a^2-b^2-ac+bc}{ab+ac+b^2-c^2}$	R $\frac{a-b}{b+c}$
491	$\frac{x^2+xy}{2x+2y+ax+ay}$	R $\frac{x}{a+2}$	$\frac{3ax+6a+3x+6}{6ax+6x+12a+12}$	R $\frac{1}{2}$
492	$\frac{2x^2-x-1}{3x^2-x-2}$	R $\frac{2x+1}{3x+2}$	$\frac{2x^2-5x+2}{2x^2-7x+6}$	R $\frac{2x-1}{2x-3}$
493	$\frac{a^3+a^2+a+1}{ax+x+2a+2}$	R $\frac{a^2+1}{x+2}$	$\frac{x^2+5x+6}{x^2+6x+9}$	R $\frac{x+2}{x+3}$
494	$\frac{2x-2-ax+a}{x^2-2x+1}$	R $\frac{a-2}{x-1}$	$\frac{4x^3-4x^4+8x-8x^2}{1-x^2}$	R $\frac{4x(x^2+2)}{x+1}$
495	$\frac{2x^2-3x+1}{2x^2-5x+3}$	R $\frac{2x-1}{2x-3}$	$\frac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}$	R $\frac{x+2}{x+3}$
496	$\frac{x^2-2x+1}{x^3-3x^2+3x-1}$	R $\frac{1}{x-1}$	$\frac{6a^2b^3-9a^3b^2}{2ab-3a^2-2b+3a}$	R $\frac{3a^2b^2}{a-1}$
497	$\frac{x^2+7x+12}{x^2-9}$	R $\frac{x+4}{x-3}$	$\frac{x^3-1}{x^4+2x^3+x^2-1}$	R $\frac{x-1}{x^2+x-1}$
498	$\frac{2x^2+3x-2}{2x^2+x-6}$	R $\frac{2x-1}{2x-3}$	$\frac{x^3-x^2+x-1}{2x^2-x-1}$	R $\frac{x^2+1}{2x+1}$
499	$\frac{2x^2-4xy}{ax-2ay+2x-4y}$	R $\frac{2x}{a+2}$	$\frac{8a^5b^5-4a^3b^5}{2a^3-a-1+2a^2}$	R $\frac{4a^3b^5}{a+1}$
500	$\frac{2x^2-x-3}{3x^2+2x-1}$	R $\frac{2x-3}{3x-1}$	$\frac{x^3+x^2-2x-2}{x^3+x^2+2x+2}$	R $\frac{x^2-2}{x^2+2}$
501	$\frac{-2a-a^2}{2b+ab+4+2a}$	R $\frac{-a}{b+2}$	$\frac{x^2+3x-28}{x^2+2x-24}$	R $\frac{x+7}{x+6}$
502	$\frac{2x^3-7x^2+7x-2}{2x^3-5x^2+x+2}$	R $\frac{2x-1}{2x+1}$	$\frac{a^2+a}{ab+b+a+1}$	R $\frac{a}{b+1}$
503	$\frac{x^2-x-6}{x^2+2x-15}$	R $\frac{x+2}{x+5}$	$\frac{x^3+x^2-2x-2}{x^2+2x+1}$	R $\frac{x^2-2}{x+1}$
504	$\frac{-a^2-a}{ab+b+a+1}$	R $-\frac{a}{b+1}$	$\frac{2x^2-x-3}{x^3+1}$	R $\frac{2x-3}{x^2-x+1}$
505	$\frac{4x+4y}{6x+6y+2ax+2ay}$	R $\frac{2}{a+3}$	$\frac{x^3-x^2+x-1}{x^3-3x^2+3x-1}$	R $\frac{x^2+1}{(x-1)^2}$
506	$\frac{x^2-xy}{2x^2-2xy+ax^2-axy}$	R $\frac{1}{a+2}$	$\frac{x^3-8}{(x^2+4)^2-4x^2}$	R $\frac{x-2}{x^2+4-2x}$
507	$\frac{2x^2-x-1}{2x^2+x}$	R $\frac{x-1}{x}$	$\frac{x^2+2xy+y^2-1}{x^2+y^2+1+2xy-2x-2y}$	R $\frac{x+y+1}{x+y-1}$
508	$\frac{2x^3-x-1}{ax^2-ax+x^2-x}$	R $\frac{2x^2+2x+1}{x(a+1)}$	$\frac{x^6-1}{x^4-1}$	R $\frac{x^4+x^2+1}{x^2+1}$

►17. Moltiplicazione di frazioni algebriche

Il prodotto di due frazioni è una frazione avente per numeratore il prodotto dei numeratori e per denominatore il prodotto dei denominatori.

Esempio numerico: si vuole determinare il prodotto $p=\frac{7}{15}\cdot\frac{20}{21}$;

possiamo scrivere prima il risultato dei prodotti dei numeratori e dei denominatori e poi ridurre ai minimi termini la frazione ottenuta: $p=\frac{7}{15}\cdot\frac{20}{21}=\frac{\cancel{140}^{\,4}}{\cancel{315}_{\,9}}=\frac{4}{9}$

oppure prima semplificare i termini delle frazioni e poi moltiplicare: $p=\frac{\cancel{7}^{\,1}}{\cancel{15}_{\,3}}\cdot\frac{\cancel{20}^{\,4}}{\cancel{21}_{\,3}}=\frac{4}{9}$

Esempi

- Determinare il prodotto delle frazioni algebriche $f_1=-\frac{3a^2}{10b^3c^4}$ e $f_2=\frac{25ab^2c^7}{ab}$.

Poniamo le C.E. per ciascuna frazione assegnata ricordando che tutti i fattori letterali dei denominatori devono essere diversi da zero, quindi **C.E. :** $a\neq 0\wedge b\neq 0\wedge c\neq 0$

Il prodotto è la frazione $f=-\frac{3a^2}{10b^3c^4}\cdot\frac{25ab^2c^7}{ab}=-\frac{15a^2c^3}{2b^2}$.

- Determinare il prodotto delle frazioni algebriche $f_1=-\frac{3a}{2b+1}$ e $f_2=\frac{10b}{a-3}$.

L'espressione è in due variabili, i denominatori sono polinomi di primo grado irriducibili; poniamo le **C**ondizioni di **E**sistenza: **C.E. :** $2b+1\neq 0\wedge a-3\neq 0$ dunque **C.E.:** $b\neq -\frac{1}{2}\wedge a\neq 3$ **.**

Il prodotto è la frazione algebrica: $f=-\frac{3a}{2b+1}\cdot\frac{10b}{a-3}=-\frac{30ab}{(2b+1)\cdot(a-3)}$ in cui non è lecita alcuna semplificazione.

ATTENZIONE il passaggio di semplificazione qui a lato **contiene un errore**: la variabile *a* mentre è un fattore del numeratore, è un addendo nel denominatore e così la variabile *b*.

$$f=-\frac{3\cancel{a}}{2\cancel{b}+1}\cdot\frac{10\cancel{b}}{\cancel{a}-3}$$

- Determinare il prodotto delle frazioni algebriche in cui numeratori e denominatori sono polinomi: $f_1=\frac{2x^2-x}{x^2-3x+2}$ e $f_2=\frac{5x-5}{x-4x^2+4x^3}$

1° passo: scomponiamo in fattori tutti i denominatori (servirà per la determinazione delle C.E.) e tutti i numeratori (servirà per le eventuali semplificazioni)

$$f_1=\frac{2x^2-x}{x^2-3x+2}=\frac{x\cdot(2x-1)}{(x-1)\cdot(x-2)}\quad e\quad f_2=\frac{5x-5}{x-4x^2+4x^3}=\frac{5\cdot(x-1)}{x\cdot(2x-1)^2}$$

2° passo: Poniamo le C.E. ricordando che tutti i fattori dei denominatori devono essere diversi da zero:

C.E.: $x-1\neq 0\wedge x-2\neq 0\wedge x\neq 0\wedge 2x-1\neq 0$ da cui C.E.: $x\neq 1\wedge x\neq 2\wedge x\neq 0\wedge x\neq\frac{1}{2}$

3° passo: determiniamo la frazione prodotto, effettuando le eventuali semplificazioni:

$$f=\frac{\cancel{x}\cdot\cancel{(2x-1)}}{\cancel{(x-1)}\cdot(x-2)}\cdot\frac{5\cdot\cancel{(x-1)}}{\cancel{x}\cdot(2x-1)^{\cancel{2}}}=\frac{5}{(x-2)\cdot(2x-1)}$$

*Determinate i seguenti prodotti, indicando sempre le **C.E.**:*

509 $\frac{3x-6y}{5xy^3}\cdot\frac{2x^2y^2+xy^3}{4y^2-x^2}$ R. $\frac{-3(2x+y)}{5y(x+2y)}$

510 $\frac{x^4-5x^2+4}{x^2-1}\cdot\frac{x}{x^3-4x}$ R. 1

511 $\frac{4x-2a}{x-a}\cdot\frac{3a-3x}{a-2x}$ R. [6]

512 $\frac{-1-2a-a^2}{1+a^2-2a}\cdot\frac{a^3-3a^2+3a-1}{a^4+2a^3-2a-1}$; R. $-\frac{1}{a+1}$

513 $\frac{2a^4+6a+12+4a^3}{16-a^4}\cdot\frac{a^2-7a+10}{5a^5+15a^2}$ R. $\frac{-2(a-5)}{5a^2(a^2+4)}$

514 $\frac{-45x^7}{y^{-2}}\cdot\frac{4y^{-7}}{36x^{-1}}$ R. $-5\frac{x^8}{y^5}$

515 $\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}\cdot\frac{x^2+3x+2}{x^2-2x+1}$ R. $\frac{x+1}{x-1}$

516 $\frac{x^2-4x+4}{x^3-8}\cdot\frac{x^2+2x+4}{x^2-2x}$ R. $\frac{1}{x}$

517 $\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^2+2x+1}\cdot\frac{ax+x}{x^2+x}$ R. $a+1$

518 $\frac{4x^3-4x^2-x+1}{8x^3-1}\cdot\frac{4x^3+2x^2+x}{2x^2-x-1}$ R. x

519 $\frac{x^2-x-6}{2x^2-8x+8}\cdot\frac{x^2+x-6}{x^3+2x^2-9x-18}$ *R.* $\frac{1}{2(x-2)}$

520 $\frac{x^4-1}{x^2-2x+1}\cdot\frac{2x^2-x-1}{2x^3+x^2+2x+1}\cdot\frac{2x^2-2x+2}{x^3+1}$ *R.* 2

521 $\frac{x^2-4}{x^2+4x+4}\cdot\frac{2x^2+8x+8}{4x^2-16}$

522 $\frac{2x^3-2x^2-3x+3}{2x^2-4x+2}\cdot\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$

523 $\frac{a^2-b^2}{3x-3y}\cdot\frac{6x^3y-6xy^3}{a^2x-a^2y+b^2y-b^2x}$

524 $\frac{2x^2-x-3}{3x^2+2x-1}\cdot\frac{x^3+1}{2x^2-x-3}$

525 $\frac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}\cdot\frac{x^2+2x-15}{x^2-x-6}$

526 $\frac{2x^2-5x-3}{ax-3a+x-3}\cdot\frac{2ax+4a+2x+4}{4ax-4x+8a-8}$

527 $\frac{x^3-x}{x^3-2x^2-x+2}\cdot\frac{x^3-8}{(x^2+4)^2-4x^2}$

528 $\frac{a^3+a^2+a+1}{ax+x+2a+2}\cdot\frac{x^4-5x^2+4}{x^2-3x+2}$

529 $\frac{2x^2-5x-3}{ax-3a+x-3}\cdot\frac{2ax+4a+2x+4}{4ax-4x+8a-8}$

530 $\frac{2ax+4a+2x+4}{4ax-4x+8a-8}\cdot\frac{-a-b}{a^2+ab+a+b}$

►18. Potenza di una frazione algebrica

La potenza di esponente n, naturale diverso da zero, della frazione algebrica $\frac{A}{B}$ con B ≠ 0 (C.E.) è la frazione avente per numeratore la potenza di esponente n del numeratore e per denominatore la potenza di esponente n del denominatore: $\left(\frac{A}{B}\right)^n=\frac{A^n}{B^n}$.

■ Calcoliamo $\left(\frac{x-2}{x^2-1}\right)^3$.

Innanzi tutto determiniamo le C.E. per la frazione assegnata $\frac{x-2}{x^2-1}=\frac{x-2}{(x-1)\cdot(x+1)}$ con C.E.:

$(x-1)(x+1)\neq 0$ da cui C.E. $x\neq 1\wedge x\neq -1$ dunque si ha $\left(\frac{x-2}{x^2-1}\right)^3=\frac{(x-2)^3}{(x-1)^3\cdot(x+1)^3}$.

Casi particolari dell'esponente

- Se n = 0 sappiamo che qualsiasi numero diverso da zero elevato a zero è uguale a 1; lo stesso si può dire se la base è una frazione algebrica, purché essa non sia nulla.

$$\left(\frac{A}{B}\right)^0=1 \quad con \quad A\neq 0 \quad e \quad B\neq 0$$

■ Quali condizioni devono rispettare le variabili affinché si abbia $\left(\frac{3a-2}{5a^2+10a}\right)^0=1$?

Scomponiamo in fattori sia il numeratore che il denominatore della frazione: $\left(\frac{3a-2}{5a\cdot(a+2)}\right)^0$.

Determiniamo le C.E. : $a\neq 0\wedge a+2\neq 0$ da cui C.E.: $a\neq 0\wedge a\neq -2$.
Poniamo poi la condizione affinché la frazione non sia nulla, cioè anche il suo numeratore deve essere diverso da zero; indichiamo con $\mathbf{C_0}$ questa condizione dunque $\mathbf{C_0}$ **:** $3a-2\neq 0$ da cui $\mathbf{C_0}$ **:** $a\neq\frac{2}{3}$ **.**

Le condizioni di esistenza sono allora $a\neq -2\wedge a\neq 0\wedge a\neq\frac{2}{3}$ **.**

- Se n è intero negativo la potenza con base diversa da zero è uguale alla potenza che ha per base l'inverso della base e per esponente l'opposto dell'esponente:

$$\left(\frac{A}{B}\right)^{-n}=\left(\frac{B}{A}\right)^{+n} \quad con \quad A\neq 0 \quad e \quad B\neq 0$$

■ Determinare $\left(\frac{x^2+5x+6}{x^3+x}\right)^{-2}$.

Scomponiamo in fattori numeratore e denominatore: $\left(\frac{(x+2)\cdot(x+3)}{x\cdot(x^2+1)}\right)^{-2}$

C.E.: $x\neq 0$ e $x^2+1\neq 0$ da cui C.E.: $x\neq 0$ essendo l'altro fattore sempre diverso da 0.
Per poter determinare la frazione inversa dobbiamo porre le condizioni perché non sia nulla e cioè che anche il numeratore sia diverso da zero, quindi si deve avere $C_0=(x+2)\cdot(x+3)\neq 0$ da cui $C_0=$ $x\neq -2$ e $x\neq -3$.

Quindi se $x\neq 0$, $x\neq -2$ e $x\neq -3$ si ha $\left(\frac{(x+2)\cdot(x+3)}{x\cdot(x^2+1)}\right)^{-2}=\left(\frac{x\cdot(x^2+1)}{(x+2)\cdot(x+3)}\right)^2=\frac{x^2\cdot(x^2+1)^2}{(x+2)^2\cdot(x+3)^2}$

Determina, con le dovute condizioni sulle variabili, le seguenti frazioni

531 $\left(\frac{3x^2}{5y^3}\right)^2$ $\quad\left(\frac{x+y}{x^2-y^2}\right)^3$

532 $\left[\left(\frac{12ab}{a^{2b}-ab^2}\right)^2\cdot\left(\frac{a-b}{2a^2}\right)^{-2}\right]^{-1}$ $\quad\left[\left(\frac{x^2+x}{x^2+4x+3}\right)^2\cdot\left(\frac{2x}{x+3}\right)\right]^2$

533 $\frac{a^2-b^2}{a^3+ab^2+2a^2b}\cdot\left(\frac{5a^2-5ab}{4ab+4b^2}\right)^{-1}$ $\quad\left(\frac{a^2-9}{12a^2-12a+3}\right)\cdot\left(\frac{12a^3-6a^2}{a^2-4a+3}\right)^3$

►19. Divisione di frazioni algebriche

Il quoziente di due frazioni è la frazione che si ottiene moltiplicando la prima con l'inverso della seconda.
Lo schema di calcolo può essere illustrato nel modo seguente, come del resto abbiamo visto nell'insieme dei numeri razionali: $\frac{m}{n}:\frac{p}{q}=\frac{m}{n}\cdot\frac{q}{p}=\frac{m\cdot q}{n\cdot p}$

Esempio numerico

- $\frac{5}{12}:\frac{7}{4}$ L'inversa di $\frac{7}{4}$ è la frazione $\frac{4}{7}$ dunque: $\frac{5}{12}:\frac{7}{4}=\frac{5}{\cancel{12}_{3}}\cdot\frac{\cancel{4}^{1}}{7}=\frac{5}{21}$.

Esempio

- Determinare il quoziente delle frazioni algebriche: $f_1=\frac{3a-3b}{2a^2b}$; $f_2=\frac{a^2-ab}{b^2}$

1° passo: scomponiamo in fattori $f_1=\frac{3a-3b}{2a^2b}=\frac{3\cdot(a-b)}{2a^2b}$; $f_2=\frac{a^2-ab}{b^2}=\frac{a\cdot(a-b)}{b^2}$
2° passo: poniamo le **C**ondizioni d'**E**sistenza: $2a^2b\neq 0\wedge b^2\neq 0$ da cui **C.E.:** $a\neq 0\wedge b\neq 0$.
3° passo: determiniamo la frazione inversa di f_2;
Per poter determinare l'inverso dobbiamo porre le condizioni perché non sia nulla.
Poniamo il numeratore diverso da zero **C_0:** $a\neq 0\wedge a-b\neq 0$ da cui **C_0:** $a\neq 0\wedge a\neq b$ **.**
4° passo: aggiorniamo le condizioni **C.E.:** $a\neq 0\wedge b\neq 0\wedge a\neq b$ **.**
5° passo: cambiamo la divisione in moltiplicazione e semplifichiamo:

$$f=\frac{3\cdot(a-b)}{2a^2b}:\frac{a\cdot(a-b)}{b^2}=\frac{3\cdot\cancel{(a-b)}}{2a^2\cancel{b}}\cdot\frac{b^{\cancel{2}}}{a\cdot\cancel{(a-b)}}=\frac{3b}{2a^3}$$

Semplificare le seguenti espressioni, evidenziando sempre le ***C.E.****:*

534 $\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}:\frac{x^2-x-6}{x^2-4}$ *R.* $\left[\frac{(x-2)^2}{x^2-9}\right]$

535 $\frac{4x^3-4x^2-8}{4x^2-16}:\frac{x^2-1}{x^2+x-2}$

536 $\frac{x^2+ax-x-a}{x^2-1}:\frac{x^2+2x+1}{x^2+x+ax+a}$ R. $\left[\left(\frac{x+a}{x+1}\right)^2\right]$

537 $\frac{x^2+x}{5x-10}:\frac{x+1}{20x}$

538 $\frac{2x^2-3x+1}{x^3-3x^2-x+3}:\frac{4x^2-1}{x^2-2x-3}$ *R.* $\frac{1}{2x+1}$

539 $\frac{xy+x+2y+2}{xy+2x-y-2}\cdot\frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}:\frac{x^2+5x+6}{x^2-9}$ *R.* $\frac{y+1}{y+2}$

540 $\frac{x^4-1}{x^4-2x^2+1}:\frac{x^3-x^2+x-1}{x^3-3x^2+3x-1}$ R. $\frac{x-1}{x+1}$

541 $\left(\frac{a^3-a^2}{2a^2+a-1}\cdot\frac{a^2-2a-3}{a^2-2a+1}\right):\left(\frac{a^2-9}{12a^2-12a+3}\cdot\frac{12a^3-6a^2}{a^2-4a+3}\right)$ R. $\left[\frac{a-3}{2a+6}\right]$

542 $\frac{a^2-b^2-a-b}{3a^2-3b^2}:\left(\frac{a^2-ab}{3a^2}\cdot\frac{5a+5ab-5a^2}{a^2-2ab+b^2}\right)$ R. $-\frac{1}{5}$

543 $\frac{x^3-x^2+x+1}{2x^2-x-1}:\frac{2x^3-7x^2+7x-2}{2x^3-5x^2+x+2}:\frac{2x^2-5x+2}{x^2-5x+6}$

544 $\frac{2x^2-x-3}{x^2-1}:\frac{x^3+x^2-2x-2}{x^2+2x+1}$

545 $\left(\frac{-2a}{b^3}\cdot\left(\frac{-ab}{4}\right)^2\right):\left(\frac{a^2}{2b^3}\right)^{-2}$ R. $\left[\frac{-a^7}{32b^7}\right]$

►20. Addizione di frazioni algebriche

Proprietà della addizione tra frazioni algebriche

Nell'insieme delle frazioni algebriche la somma

- è commutativa: $f_1 + f_2 = f_2 + f_1$
- è associativa: $(f_1 + f_2) + f_3 = f_1 + (f_2 + f_3) = f_1 + f_2 + f_3$
- possiede l'elemento neutro, cioè esiste una frazione F° tale che: per qualunque frazione f si abbia F° + f = f + F°= f e F° = 0
- ogni frazione algebrica f, possiede la frazione opposta (-f) tale che (- f) + f = f + (- f) = F° = 0

Quest'ultima proprietà ci permette di trattare contemporaneamente l'operazione di addizione e di sottrazione, come abbiamo fatto tra numeri relativi; (+1) + (-2) omettendo il segno di addizione + e togliendo le parentesi diventa 1 – 2 ; (+1) – (-2) omettendo il segno di sottrazione – e togliendo le parentesi diventa 1 + 2. Come per i numeri relativi, quando si parlerà di somma di frazioni si intenderà "somma algebrica".

Esempio

- $\frac{2x-3y}{x+y}+\frac{x+2y}{x+y}$ le frazioni hanno lo stesso denominatore.

Poniamo le C.E.: x + y ≠ 0 da cui C.E.: x ≠ -y allora $\frac{2x-3y}{x+y}+\frac{x+2y}{x+y}=\frac{(2x-3y)+(x+2y)}{x+y}=\frac{3x-y}{x+y}$.

Osservazione

a questo caso ci si può sempre ricondurre trasformando le frazioni allo stesso denominatore. Si potrebbe scegliere un qualunque denominatore comune, ad esempio il prodotto di tutti i denominatori, ma, come abbiamo operato in **Q**, scegliamo il m.c.m dei denominatori delle frazioni addendi.

Esempio

- $\frac{x+y}{3x^2y}-\frac{2y-x}{2xy^3}$

Dobbiamo trasformare le frazioni in modo che abbiano lo stesso denominatore:

1° passo: calcoliamo il m.c.m. $(3x^2y, 2xy^3) = 6x^2y^3$

2° passo: poniamo le C.E.: $6x^2y^3 \neq 0$ da cui C.E.: $x \neq 0$ e $y \neq 0$

3° passo: trasformiamo gli addendi allo stesso denominatore: $\frac{2y^2\cdot(x+y)}{6x^2y^3}-\frac{3x\cdot(2y-x)}{6x^2y^3}$

4° passo: la frazione somma ha come denominatore lo stesso denominatore e come numeratore la somma dei numeratori: $\frac{2y^2\cdot(x+y)-3x\cdot(2y^2-x)}{6x^2y^3}=\frac{2xy^2+2y^3-6xy^2+3x^2}{6x^2y^3}=\frac{2y^3-4xy^2+3x^2}{6x^2y^3}$.

- $\frac{x+2}{x^2-2x}-\frac{x-2}{2x+x^2}+\frac{-4x}{x^2-4}$

1° passo: scomponiamo in fattori i denominatori $=\frac{x+2}{x(x-2)}-\frac{x-2}{x(2+x)}+\frac{-4x}{(x+2)(x-2)}$

il m.c.m. è $x\cdot(x+2)\cdot(x-2)$

2° passo: poniamo le C.E.: $x\cdot(x+2)\cdot(x-2) \neq 0$ da cui C.E.: $x \neq 0$ e $x \neq 2$ e $x \neq -2$

3° passo: dividiamo il m.c.m. per ciascun denominatore e moltiplichiamo il quoziente ottenuto per il relativo numeratore $=\frac{(x+2)^2-(x-2)^2-4x^2}{x\cdot(x+2)\cdot(x-2)}$

4° passo: eseguiamo le operazioni al numeratore $=\frac{x^2+4x+4-x^2+4x-4-4x^2}{x\cdot(x+2)\cdot(x-2)}=\frac{8x-4x^2}{x\cdot(x+2)\cdot(x-2)}=$

6° passo: semplifichiamo se la frazione ottenuta: $S=\frac{-4\cancel{x}\cdot\cancel{(x-2)}}{\cancel{x}\cdot(x+2)\cdot\cancel{(x-2)}}=\frac{-4}{(x+2)}$

- $\frac{x}{x-2}-\frac{2x}{x+1}+\frac{x}{x-1}-\frac{5x^2-7}{x^3-2x^2+2-x}$

$=\frac{x}{x-2}-\frac{2x}{x+1}+\frac{x}{x-1}-\frac{5x^2-7}{x^2\cdot(x-2)-1\cdot(x-2)}=\frac{x}{x-2}-\frac{2x}{x+1}+\frac{x}{x-1}-\frac{5x^2-7}{(x-2)(x+1)(x-1)}$

$=\frac{x(x+1)(x-1)-2x(x-2)(x-1)+x(x-2)(x+1)-(5x^2-7)}{(x-2)(x+1)(x-1)}=...=-\frac{7}{(x-2)(x+1)}$

Vero o falso? Se falso calcola il risultato corretto

546	$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{y^2+x^2}{x^2+y^2}=1$	V	F
547	$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{1+x}{x^2}$	V	F
548	$\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x-y}=\frac{x-y+x+y}{x^2-y^2}=\frac{2x}{x^2-y^2}$	V	F
549	$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-y}=\frac{-y+1}{x-y}$	V	F
550	$\frac{1}{x-1}-\frac{1}{1-x}=\frac{2}{x-1}$	V	F
551	$1+\frac{1}{x}=\frac{x+1}{x+1}=1$	V	F
552	$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-a}=\frac{1+1}{a-b}$	V	F
553	$\frac{1}{x}+\frac{2}{x}=\frac{3}{x}$	V	F
554	$x-\frac{y}{x+y}=\frac{x^2+xy-y}{x+y}$	V	F

Riduci le seguenti somme di frazioni algebriche

555	$\frac{x+2y}{15}+\frac{x-y}{3}$		$\frac{a}{2x}+5-\frac{3a}{4x^2}$	
556	$\frac{5a^2+1}{12}-\frac{4a^2-1}{3}+\frac{5a+a^2}{4}$		$\frac{a}{9}-\frac{2b}{27}-ab$	
557	$\frac{1}{x-2}+1$		$\frac{x}{2y}+1-\frac{3x}{4y^2}$	
558	$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}$		$\frac{2}{xy}-\frac{1}{xy-1}$	
559	$-\frac{1}{x}+\frac{2}{3x}-6x$		$-3x+\frac{1}{2x}$	
560	$\frac{5}{x}-x+\frac{1}{3}$		$\frac{2x+1}{8x}-\frac{x-1}{4x^2}$	
561	$\frac{2x+1}{3}-\frac{1}{x}$		$\frac{1}{x+y}-y$	
562	$\frac{9}{x^3y}+\frac{x^2}{x^2y^2}$		$1-\frac{x+1}{x-1}$	
563	$\frac{1}{x^2y}+\frac{1}{xy^2}-\frac{1}{x^2y^2}$	*R.* $\frac{x+y-1}{x^2y^2}$	$\frac{1}{x}+\frac{1}{2x}-\frac{1}{3x}$	*R.* $\frac{7}{6x}$
564	$\frac{2}{a}+\frac{1}{a^2-a}-\frac{1}{a-1}$	*R.* $\frac{1}{a}$	$\frac{a-1}{a^2-a}+\frac{1}{a-2}-\frac{2}{a}$	*R.* $\frac{2}{a(a-2)}$
565	$\frac{2}{a-1}+\frac{3}{1-a}+\frac{a}{a-1}$	*R.* 1	$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x-1}+x$	*R.* x
566	$\frac{x+1}{x}-\frac{x}{x-1}$	*R.* $-\frac{1}{x^2-x}$	$\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x^2-4}$	*R.* $\frac{2x+1}{x^2-4}$
567	$\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x^2-3x+2}$	*R.* $\frac{2}{x-2}$	$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x^2-2x+1}$	*R.* $\frac{x}{(x-1)^2}$
568	$\frac{1}{a-1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{a+ab-b-1}$	*R.* $\frac{a+b+1}{(a-1)(b+1)}$	$\frac{2x-3}{x}+\frac{-2x}{2x+3}-1$	*R.* $\frac{-3(x+3)}{x(2x+3)}$
569	$\frac{1}{2a+1}+\frac{1}{a-1}+\frac{1}{2a^2-a-1}$	*R.* $\frac{3a+1}{2a^2-a-1}$	$\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^3-1}$	*R.* $\frac{x(x+1)}{x^3-1}$

►21. Espressioni con le frazioni algebriche

570 $\frac{2}{x}+\frac{3}{x^3}-\frac{5}{x^2}$ R. $\frac{2x^2-5x+3}{x^3}$

571 $\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x-x^2}+\frac{1}{x}$ R. $\frac{2}{x(1-x)}$

572 $\frac{a-3}{a+3}+\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{3}\right):\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3}$ R. $-\frac{1}{3}$

573 $\frac{6x}{x^2-4}+\frac{3}{2-x}-\frac{1}{x+2}$

574 $\frac{x^2-4x+3}{x-1}+\frac{2-x}{x^2-4}$ R. $\frac{x^2-x-7}{x+2}$

575 $\left(\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a+1}\right)\frac{a^2-1}{2a}$ *R.* 1

576 $\frac{x^2}{x^4+x^2+1}-\frac{1}{x^2+x+1}$

577 $\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a+1}\frac{a^2-1}{2a}$ *R.* $\frac{a^2+1}{2a(a-1)}$

578 $1-\frac{a+b}{a-b}\cdot\left(\frac{2a-b}{a+b}-\frac{a-b}{a}\right)$ R. $\frac{b^2}{a(b-a)}$

579 $\frac{x^2+2x+1}{1-x^2}-\frac{x^3-1}{x-1}+\frac{2-8x^2}{4x^2-1}$ R. $\frac{x^3+3x-1}{1-x}$

580 $\frac{(x-1)^2}{x^3-3x^2+3x-1}-\frac{(x-1)}{(1-x)^3}$

581 $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x^2-2x+1}+\frac{1}{x^3-3x^2+3x-1}$ *R.* $\frac{x^2-x+1}{(x-1)^3}$

582 $\frac{1-x}{(x-1)^2}-\frac{x^3+1}{(x+1)^2}+\frac{3x^2-4x+1}{1-x^2}$ *R.* $\frac{-x^3-x^2+x-1}{x^2-1}$

583 $\frac{x^2-4}{x^2-4x+4}-\frac{x^2-5x+6}{x^2-4x+4}+\frac{x^3-x}{x^3-2x^2-x+2}-\frac{x^3-8}{x^2-4x+4}$

584 $\frac{1}{2-3x}+\frac{2x+2}{2x}+\frac{6x+1}{3x-2}-\frac{x+2}{3x^2-2x}$ R. $\frac{3x+2}{x}$

585 $\frac{3x}{x^2-2xy+y^2}-\frac{3}{x-y}+\frac{9}{2y-2x}$ *R.* $\frac{3(5y-3x)}{2(x-y)^2}$

586 $\frac{24x}{x^2+3x-4}+\frac{x+1}{x^2-3x+2}-\frac{18(x-1)}{x^2+2x-8}$ *R.* $\frac{7(x+1)}{(x+4)(x-1)}$

587 $\frac{1}{2x-1-x^2}-\frac{x}{1-x}$

588 $\frac{2}{x^2-9x+20}-\frac{2}{25-x^2}-\frac{4}{x^2+x-20}$ *R.* $\frac{22}{(x+5)(x-5)(x-4)}$

589 $\frac{4ay-4a^2}{y^3+8a^3}+\frac{1}{y+2a}-\frac{y-a}{y^2-2ay+4a^2}$ *R.* $\frac{a}{y^2-2ay+4a^2}$

590 $\frac{2x^2-5x-3}{ax-3a+x-3}-\frac{2x^3-x-1}{ax^2-ax+x^2-x}$

591 $\frac{8x-12}{4x^2-12x+9}-\frac{5x}{2x^2+3x}-\frac{20x}{9-4x^2}$ *R.* $\frac{9}{2x-3}$

592 $\frac{x^2-2x+3}{x^3+1}+\frac{x-2}{x^2-x+1}-\frac{1}{x+1}$ *R.* $\frac{x^2-2x}{x^3+1}$

593 $\frac{z+1}{4z-4}+\frac{1+z}{z^2-4z+3}-\frac{3-z}{4-4z}$

594 $\frac{t^2-1}{4+t^2}-\frac{4z-1}{2z+1}+\frac{24z-4t^2-2t^2z}{2t^2z+t^2+8z+4}$ *R.* $\frac{3-2t^2}{t^2+4}$

595 $\frac{b+1}{a^2+ab+a}-\frac{1}{a}+\frac{a+1-b}{a^2+2a+1-b^2}$

596 $\frac{1}{xy+yz-y^2-xz}-\frac{1}{zx+zy-xy-z^2}-\frac{1}{xy-x^2-yz+xz}$ *R.* $\frac{2}{(x-y)(y-z)}$

597 $1-\frac{2x(x-2)}{x+2}+\frac{2-x^2}{-x-2}+\frac{6+(3-x)^2}{x+2}$ R. $\frac{15-x}{x+2}$

598 $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2\right):\left(1-\frac{x^2}{y^2}\right)+\frac{x-y}{x}$ *R.* $\frac{x-y}{x+y}$

599 $\left(\frac{x+a}{x-a}-\frac{x-a}{x+a}\right):\left(1-\frac{x-a}{x+a}\right)^2$ R. $\frac{x(a+x)}{a(x-a)}$

600 $\frac{a^2b^2}{a^4-ab^3+a^3b-b^4}:\left(\frac{a+b}{a^3-b^3}-\frac{1}{a^2-b^2}\right)$ R. $[ab]$

601 $\frac{x^4-x^2a^2}{4x^2a^2+4xa^3+a^4}:\left(\frac{x^2+ax}{2x^2a+xa^2}\cdot\frac{2xa^2+a^3}{x^2-ax}\right)$

602 $\left(\frac{2a^2+a}{a^3-1}-\frac{a+1}{a^2+a+1}\right)\cdot\left(1+\frac{a+1}{a}-\frac{a^2+5a}{a^2+a}\right)$ R. $\left[\frac{a-1}{a^2+a}\right]$

603 $\frac{x+2}{x-3}-\frac{2-x}{1-x}+\frac{x^2+1}{x^2-4x+3}-1$ R. $\left[\frac{10}{x-3}\right]$

604 $\frac{1}{2}\left[\frac{2x}{x^2-4}-\left(\frac{x}{x+2}-1\right)\right]:\frac{1}{2-x}$ R. $\left[\frac{2(1-x)}{x+2}\right]$

605 $\left(\frac{x^2-5}{x^2+4x+4}+\frac{1}{2+x}+\frac{6}{4x+8}\right)\cdot\frac{2x+4}{2x^2+5x}$ R. $\left[\frac{1}{x+2}\right]$

606 $\left(\frac{x+1}{2x-2}+\frac{5}{2x^2-2}-\frac{x+3}{2x+2}\right):\frac{3}{4x^2-4}$

607 $\left(\frac{x^3-x^2}{1-x^2}+x-1\right):\left(1-\frac{x}{x+1}\right)$ R: $[-1]$

608 $\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z+1}\right):\left(\frac{z^3-z^2}{z-5}:\frac{z^5-z^3}{2z-10}\right)$ R. $\left[\frac{1}{2}\right]$

609 $\frac{x^3+x^2+x+1}{x^2+2x+1}-\frac{x^3-1}{x^2-1}+\frac{x^2-3x-4}{x^2+2x+1}-\frac{2x^2-x-1}{x^2-1}$

610 $\frac{x+y}{x^2+x+xy+y}-\frac{1}{y+1}+\frac{x}{x+1}$ R. $\left[\frac{y}{y+1}\right]$

611 $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}\right)\cdot\left(\frac{1}{1-a^3}-1\right)$ R. $\left[\frac{1}{1-a}\right]$

612 $\frac{x^2}{2}-\frac{(1-x)^2}{x^3-x}-\frac{2}{1-x}+(x-3)\cdot\frac{2x-x^2-1}{(1-x^2)^2}$ R. $\frac{x^6+x^5-x^4-x^3+18x^2-2}{2x(x-1)(x+1)^2}$

613 $\frac{x^4-x^2a^2}{4x^2a^2+4xa^3+a^4}:\frac{x^2+ax}{2x^2a+xa^2}:\frac{2xa^2+a^3}{x^2-ax}$

614 $\left(\frac{x}{x-1}+\frac{x}{x+1}+\frac{2x}{1-x^2}\right)\cdot\frac{x^2+2x+1}{4x^2}$ R. $\left[\frac{x+1}{2x}\right]$

615 $\left(\frac{1}{a^2-2a+1}+\frac{1}{a^2-3a+2}\right):\frac{4a^2-6a}{1-a}$ *R.* $\frac{-1}{2a(a-1)(a-2)}$

616 $\left(\frac{x}{x-a}-\frac{x}{x-1}\right)\frac{ax^2-ax-a^2x+a^2}{ax-x^2}$ *R.* $\left[\frac{a(a-1)}{a-x}\right]$

617 $\left[\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2-a}\right)-\frac{1}{a-2}\right]:\frac{1+a+a^2}{1-a^3}$ *R.* $\frac{1}{a-2}$

618 $\left(\frac{a}{a^2-1}-\frac{a}{a^2+1}\right)\cdot\frac{a^3-a^2+a-1}{2a^2}+\frac{a}{1+a}$

619 $\left(\frac{a^2+1}{2a}-1\right):\frac{a^2-3a+2}{4a}:\frac{a^2+a-2}{a^2-4}+\frac{a^2+1}{a}$ *R.* $\frac{(a+1)^2}{a}$

620 $\left(\frac{x^4-x^2a^2}{4x^2a^2+4xa^3+a^4}:\frac{x^2+ax}{2x^2a+xa^2}\right)\cdot\frac{2xa^2+a^3}{x^2-ax}$

621 $\left(x^2+\frac{1}{4}+x\right)\left(\frac{1-6x}{1-2x}+\frac{1-12x^2}{4x^2-1}\right)\left(4-\frac{2}{x}\right)\left(1+\frac{1}{4x^2-1}\right)$ R. $\left[\frac{8x^2}{2x-1}\right]$

622 $\frac{a^2+b^2-2ab}{a-1}\left(a-b+\frac{a^2+b^2}{b-a}\right)\left(\frac{a+2}{a-1}-\frac{a^2+1}{a^2-a}\right)\frac{a-1}{2b^2-2ab}$ R. $\left[\frac{2a-1}{a-1}\right]$

623 $\frac{a+1}{a^2-3a+2}-\frac{a}{(4-a^2)(1-a)}+a^2-a$

624 $\left(\frac{x^2}{x+1}+1-x\right)\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{2x}{x-1}+\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{2x^3-3x^2+x}{(x-1)^3}\right)+\frac{3}{x}$ R. $\left[\frac{4(2x-1)}{(x-1)^2}\right]$

625 $\left(\frac{2a-b}{a-2b}-2\right)^2\left[\left(\frac{4b^2}{a}-a\right)\left(\frac{3a+2b}{a+2b}-1\right)\right]^2$ R. $\left[36b^2\right]$

626 $\dfrac{\left(\frac{x^2+2x+2}{x^3}-\frac{1}{x+2}\right)\left(\frac{10-3x}{4-x^2}-\frac{1}{2-x}\right)}{\left(\frac{2+x}{2-x}-\frac{2-x}{2+x}\right)^2}$ R. $\left[\frac{(x+4)(x-2)^2}{4x^5}\right]$

627 $\left(\frac{a-1}{a+4}-\frac{a+1}{a-4}\right):\left(\frac{a-1}{4-a}+\frac{a+1}{a-4}\right)\cdot\frac{a^2-16}{5a^2-20a}$ R. $[-1]$

628 $\left(1-\frac{x+1}{x-1}\right):\frac{x-2}{x-1}+\frac{3x+6}{x^2-4}-\frac{2}{x^2-3x+2}\cdot\left(\frac{x}{x+3}-\frac{x}{x-3}\right)+\frac{2x-3}{x(x-2)(x-1)^2}$ R. $\left[\frac{x(10x-19)}{3(x-2)(x-1)^2}\right]$

629 $\frac{1}{x^2+4x+4}+\frac{1}{x^2+2x^2}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3+4x^2+4x}-\frac{2}{x^4+4x^3+4x^2}$ R. $\left[\frac{-2}{x^2(x+2)}\right]$

630 $\frac{4x+1}{2-2x}+\frac{3x+5}{3x-5}-\frac{1}{3x}+3x\cdot\frac{x-3}{3x^2-8x+5}$ R. $\left[\frac{x+2}{6x(x-1)}\right]$

631 $\left(\frac{3}{x-8}-\frac{22x-48}{x^2-12x+32}+\frac{4x}{x-4}\right):\frac{x-12}{x-8}$ R. $\left[\frac{4x-3}{x-4}\right]$

632 $\frac{x^3-25x}{x^2+8x+15}:\left(\frac{x}{2x+6}+\frac{2}{3-x}+\frac{6+x}{x^2-9}\right)$ R. 2(x-3)

633 $\frac{x-2}{2}-\left(\frac{1}{3x-6}+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{4}{2-x}-\left[\frac{1}{2}x^2(x-6)+6x-5\right]:(x-2)^2$ R. $\left[\frac{6x-5}{3(x-2)^2}\right]$

634 $\frac{x^4-x^2a^2}{4x^2a^2+4xa^3+a^4}:\frac{x^2+ax}{2x^2a+xa^2}\cdot\frac{2xa^2+a^3}{x^2-ax}$

635 $2x^2\cdot\frac{x-3}{x-1}+(2x-1)(1-x)-\frac{1}{1-x}+\frac{1}{9x-9}+x$ R. $\left[\frac{45x-19}{9(1-x)}\right]$

636 $\frac{x+5}{x^2-6x+5}+\frac{3x+3}{x^2-4x+3}-\frac{2(x+1)}{x^2-8x+15}-\frac{2x+4}{(x-1)(x-5)}$ R. $\left[\frac{8(x+2)}{(1-x)(x-3)(x-5)}\right]$

637 $\frac{x^2+x-6}{27-3x^2}+\frac{5x-18}{2x^2-18}-\frac{11}{4x-12}+\frac{1}{3}-\frac{1}{12(x-3)}$ R. $\left[\frac{1}{3(3-x)}\right]$

638 $\left(2a-\frac{1}{2}\right)a+\left(\frac{2a^2}{2+a}+2+a\right)x+(3a-2)x-x\left(\frac{8}{a+2}+6a-4\right)$ R. $\left[\frac{a(4a-1)}{2}\right]$

639 $\left(\frac{3x^2+x-3}{2-6x}+\frac{x}{2}\right):\frac{3+2x}{3x-1}+\frac{9x-3}{(6x-2)(3+2x)}-\frac{x}{3+2x}$ R. $\left[\frac{3-2x}{2x+3}\right]$

640 $\frac{8x^2-2a^2}{(a-1)^2}+\left[\left(\frac{2x^2-1}{a+1}+\frac{2x^2+1}{1-a}\right)(a-1)+\frac{4x^2-1}{a-1}\right]-\frac{16x^2-5a^2+a}{(a-1)^2}$ R. $\left[\frac{a+1}{a-1}\right]$

641 $\left[\left(\frac{x+6}{2}+\frac{3}{a-1}\right):\frac{x}{a-1}+3a+\frac{x(1+2a)}{2}+\frac{x(1-7a)+3}{2x}\right]\cdot\frac{2x^2}{x^2+3}$ R. $[x(2a+1)]$

642 $\left[\left(\frac{1}{5}x-\frac{x-1}{x-5}\right)\left(\frac{x+1}{5}-\frac{1}{x-5}\right)\cdot(25-x^2)\right]-\frac{2}{5}x(x+5)(7-x)$ R. $[x+5]$

643 $\left(\frac{ax}{a^2-9}\cdot\frac{3a+9}{b-3}-\frac{ax}{9-3b-3a+ab}\right)\cdot\frac{b-3}{2}$ R. $\left[\frac{ax}{a-3}\right]$

644 $\left(\frac{1}{a}+\frac{x-a}{x^2+ax}-\frac{2}{a+x}\right)\cdot\frac{x^2+3x}{x^2-a^2}+\left(\frac{x^2}{x^2-a^2}+\frac{a-x}{a+x}\right)\cdot\frac{x-a}{2ax-a^2}$ R. $\left[\frac{x+a+3}{a(x+a)}\right]$

645 $\left(\frac{a}{a^2-a}+\frac{a}{a^2+a}+\frac{1}{a}-\frac{1}{a-a^2}\right):\frac{3a+1}{2a^2-2}$ R. $[2]$

646 $\left[\left(\frac{1}{a^2+9-b^2+6a}-\frac{1}{a^2+9+b^2+6a-2ab-6b}\right):\frac{-6b}{3a+9+3b}\right]^{-1}$ *R.* $(a+3-b)^2$

647 $\left(\frac{3}{x^6-x^3}-\frac{1}{9x^3-9}\right):\frac{9+x^2+3x}{3x^5+3x^3+3x^4}+\frac{6x-5}{x-1}-\frac{x-2}{x+2}+\frac{12}{x^2+x-2}$ *R.* $\frac{14x+3}{3(x-1)}$

648 $\left(\frac{1}{2b-2-a+ab}+\frac{1}{1-b}\right):\left(\frac{1}{b+1}-\frac{1}{2+a+2b+ab}\right)+\frac{2b^2-b-1}{b^2-2b+1}$ R. $\left[\frac{b}{b-1}\right]$

649 $\left(\frac{x+2}{x-2}-\frac{2x^2+ax}{x^2-4}+\frac{ax-3x+2a-6}{(x+2)(a-3)}\right)\cdot\frac{x^2-4}{a-4}$ R. $[-x]$

650 $\left[\frac{(a-3b)(b-2)}{a^2-4a+4}-\left(2-\frac{1}{a+1}\right)\frac{a^2+2a+1}{2a+1}+\frac{3a+b}{2-a}+\frac{a^3-4a+4}{(a-2)^2}\right]\cdot\frac{a-2}{b}$ R. $\left[\frac{8-3b}{a-2}\right]$

651 $\left(\frac{x+1}{a}\right)^3\cdot\frac{6x^2}{-x^3-x^4}\cdot\left(1-\frac{1}{x+1}\right)\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)^2:\frac{x+1}{a^3}$ R. $[-6(x+1)^2]$

652 $\left(\frac{6ab+6ab^2}{ab-3a^2b}-\frac{3(a-x)+6b}{1-3a}+\frac{2-x}{x}-1-\frac{2}{x}-\frac{1}{1-3a}\right):\frac{3}{1-3a}$ R. $[a+x+1]$

653 $\left(\frac{(a+2)^2-4(1+ax)-7}{a^2-16}+\frac{3ax+a}{a-4}-\frac{5a+17}{a^2-16}+ax-1\right):\frac{ax+1}{a-4}$ R. $\left[\frac{a^2+3a-8}{a+4}\right]$

654 $\left(\frac{a^2+3ax}{10a^2-4a}+\frac{x}{2}-\frac{2+ax}{2a}\right)\cdot\frac{2a}{a^2+4}+\left[\frac{2(x+3)}{2-5a}-\frac{x}{4-10a}+\frac{11}{5a-2}\right]:\frac{a^2+4}{2a}$ R. $\left[\frac{1}{5a-2}\right]$

655 $\left(\frac{x+2a}{2+a}+\frac{x-6}{a+4}+\frac{x-4}{-a-2}+\frac{2x}{a+4}+1\right)\cdot\frac{a+4}{x+a+2}$ R. $[3]$

656 $\left[\frac{3ax+2b}{a^2}+\frac{6ax+8b}{2a^2-a^2b}+\frac{8b-2b^3}{a^2(b^2-4b+4)}+\frac{16b}{a^2b-2a^2}\right]\cdot\frac{b-2}{b-4}$ R. $\left[\frac{3x}{a}\right]$

657 $\left(\frac{1}{a}-\frac{2}{a+x}+\frac{x-a}{x^2+ax}\right):\frac{x^2-a^2}{ax(x+3)}+\frac{x+a}{2ax-a^2}\cdot\left(\frac{x^2}{x^2-a^2}-\frac{x-a}{x+a}\right)-\frac{x(4-a)}{x^2+ax}+\frac{a(a-2)}{x^2-a^2}$ R. $\left[\frac{x^2}{(x+a)(x-a)}\right]$

658 $\frac{6x+1}{x^2-4x+4}+\frac{10x-12}{4x}+1+\frac{1-x^2}{x(x-2)}+\frac{9x-28}{x^2-4x+4}$ R. $\left[\frac{5x^3-28}{2x(x-2)^2}\right]$

659 $\left(\frac{4}{x^2-4}+\frac{x}{x^2-2x}+\frac{3}{x^2+2x}+\frac{24}{x^3-4x}\right)\cdot\frac{x^2+2x}{x+6}$ R. $\left[\frac{x+3}{x-2}\right]$

660 $\left(\frac{6x^2-26x-15}{x-5}:\frac{2x^2+1}{x^2-x-20}\cdot\frac{6x}{x+4}+\frac{90x}{2x^2+1}\right):\frac{12x^2}{2x^2+1}$ R. $[3x-13]$

661 $\left(\frac{6x+2}{x^2-4x+4}+\frac{2}{2x-x^2}\right)\left(1-\frac{2}{x}\right)+\frac{x-1}{x^2-2x}+\frac{x-4}{x^3-2x^2}$ R. $\left[\frac{7}{x-2}\right]$

662 $\left(\frac{a+x+2}{2a-a^2}+\frac{2x}{2-a}+\frac{x}{a}\right)\cdot\frac{2-a}{a+3}-\frac{a+2}{a^2+3a}$ R. $\left[\frac{x}{a}\right]$

663 $\left[\frac{2x+2(a+1)}{a^2-1}+\frac{2-x}{1-a}\right]\cdot\frac{a+1}{ax+3x}$ R. $\left[\frac{1}{a-1}\right]$

664 $\left(\frac{x^2+3x+9}{x^3-27}+\frac{1}{9-6x+x^2}-\frac{1}{3-x}\right):\left(\frac{2x-3}{x^2-9}\right)$ R. $\left[\frac{x+3}{x-3}\right]$

665 $\left[\frac{a+x}{a-x}:\left(\frac{2x}{a-x}+1\right)-\frac{4a^2+x}{x+2}\right]\cdot\frac{2x^2-8}{1-2a^2}$ R. $[4(x-2)]$

666 $\left(\frac{1-x}{x-a}+\frac{3+2a}{x+a}-\frac{5x}{x+a}-\frac{6x^2-a^2}{a^2-x^2}\right):\frac{3a+2}{a^2-2ax+x^2}$ R. $\left[\frac{(x-a)(2x-a)}{x+a}\right]$

667 $\left[\frac{a-b+1}{a^2-ab}+\frac{1}{a^2+ab}-\frac{2}{a+b}+\frac{b}{b-a}+\frac{2b(1-a^2)}{a(a^2-b^2)}-\frac{a(3b+1)-2}{(a+b)(a-b)}\right]\cdot\frac{a^2-b^2}{2ab-b^2+2b-ab^2}$ R. $\left[\frac{1}{a}\right]$

668 $\frac{1}{4}\left(\frac{15}{x+3}-\frac{12}{x+1}+\frac{1}{x-1}\right):\left[\frac{1}{2}\left(\frac{3}{x+1}-\frac{1}{x-1}\right)\right]$

669 $(1+x^2)\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right):\left(\frac{x}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right)$

670 $\left[\frac{a+3}{a^2+3a+2}:\left(\frac{1}{a+2}-\frac{2}{a+1}\right)\right]:\left[\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{a+1}\right):(3a+1)\right]$

671 $\frac{2y+1}{2y-1}\left(\frac{x+2y}{x-2y}+\frac{x-2y}{x+2y}-\frac{2x^2+1+4y^2}{x^2-4y^2}\right):\frac{4y^2+1+4y}{x^2-4y^2}$

672 $(x+2)\cdot\left(\frac{2}{x^2+5x+6}+\frac{2}{x+3}-\frac{2}{x+2}\right)^2$

673 $2\left(1+\frac{x}{y}\right)+\left[\left(\frac{x}{y}+1\right)^2:\left(\frac{x}{y}-1\right)\right]\cdot\left(\frac{x}{y}-1\right)^2:\left(\frac{x}{y}+1\right)$

674 $\left(1-\frac{2y}{x+y}\right)\left[\left(1-\frac{3xy}{x^2+xy+y^2}\right):\frac{x^3+y^3}{x^3-y^3}\right]^2$

675 $\frac{2x-3}{x-1}\cdot\left[\left(\frac{3x^2-2}{x-1}+\frac{6x-2}{x-3}\right)\cdot\frac{1}{x-2}-\frac{x+13}{x-3}\right]^2$

676 $\frac{a^2-2a+1}{a^2+2a+1}\cdot\left(a+\frac{a}{a+3}\cdot\frac{4}{a+3}\right)\cdot\left[\left(\frac{2}{a+1}-1+a\right):\frac{2+3a+a^2}{a^2+2a-3}\right]^2:\left(\frac{2}{a+1}+a-1\right)^2$

677 $\left(2a+\frac{1+4a-8a^3}{4a^2-1}\right):\left(\frac{2}{a-1}+\frac{4}{2a+1}-2\right)\cdot\left(\frac{8a^2}{1+2a}-2a\right)\cdot\left(a-\frac{2a}{2a+1}\right)^{-1}$

678 $\left[\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{3-x}\right)\cdot\left(\frac{5-2x}{x^2+3-4x}\right)^{-1}+\left(\frac{1-x}{x-2}\right)^2\right]:\left[\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2-\frac{x-1}{x^2-4x+4}\right]^{-1}$

679 $\frac{2x}{x^2-1}\cdot\left[\frac{2}{x^2-1}+\frac{1}{3}x\left(1+\frac{1}{x-1}+\frac{9}{x^3-x^2}\right)\right]:\left[\frac{1}{1-x}\left(\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x}\right)-\frac{x^2}{3x-3}\right]$

680 $\frac{x^3-x}{x^3-2x^2-x+2}+\frac{x^3-8}{x^2-4x+4}+\frac{x^4-5x^2+4}{x^2-3x+2}+\frac{x^2-5x+6}{x^2-4x+4}$

681 $\dfrac{\dfrac{x^{3n}-y^{3n}}{x^{2n}+2x^ny^n+y^{2n}}}{\dfrac{2x^{2n}-4x^ny^n+2y^{2n}}{x^{2n}-y^{2n}}}+\dfrac{1}{2}\left(x^n-y^n\right)-\dfrac{x^ny^n}{2\left(x^n+y^n\right)}$ *R.* $\dfrac{x^{2n}}{x^n+y^n}$

682 $\dfrac{\dfrac{x^ny+x^{n+1}+y^{n+1}+xy^n}{x^{n+1}-x^ny-xy^n+y^{n+1}}}{\dfrac{x^n+y^n}{x^n-y^n}}-\dfrac{\dfrac{x^3}{x^3-y^3}}{\dfrac{x^2}{x^2+y^2+xy}}$ *R.* $\dfrac{y}{x-y}$

683 $\dfrac{\dfrac{1}{x^2-25+20y-4y^2}-\dfrac{1}{x^2-25+4y^2+4xy}}{\dfrac{x^2-4y^2}{x^2+25+10x-4y^2}}\cdot\left(\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{2}-\dfrac{5}{4}\right):\dfrac{1}{\dfrac{x}{y}-2}$ *R.* $\dfrac{1}{x+2y}$

684 $\dfrac{\dfrac{x^{n+1}+xy-x^ny-y^2}{x^{2n}-y^2}}{\dfrac{1+\dfrac{y}{x}}{x^{n-1}-\dfrac{y}{x}}}-\left(-\dfrac{a}{a+2}+\dfrac{x}{x+y}-\dfrac{1}{\dfrac{ax+2x+ay+2y}{2y+2x}}\right)$ *R.* $\dfrac{x}{x+y}$

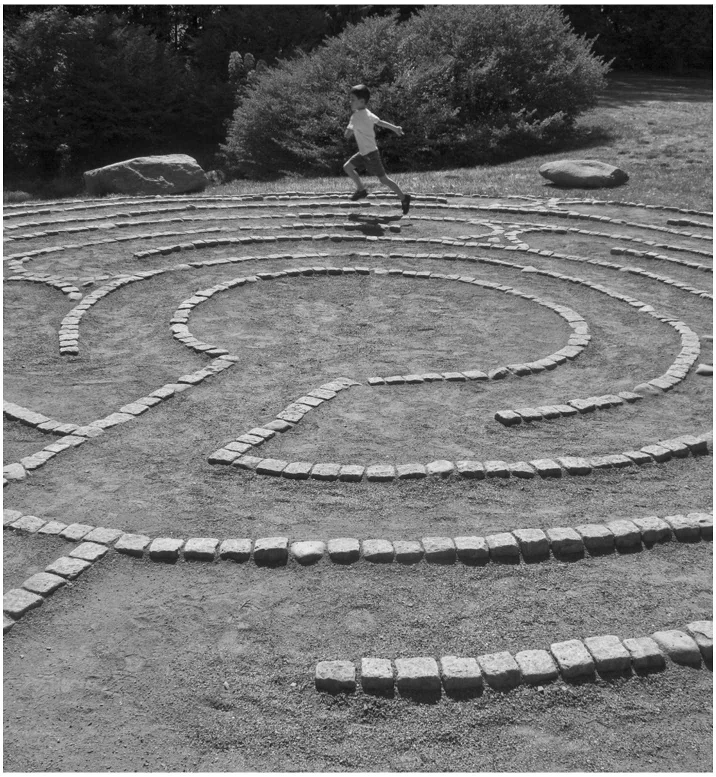
685 $\dfrac{\left(\dfrac{x^3-b^3}{x^3-3bx^2+3b^2x-b^3}-\dfrac{bx}{x^2-2bx+b^2}+\dfrac{x+b}{b-x}\right):\left(\dfrac{x+b}{x-b}+1\right)}{\dfrac{x^2-bx-6b^2}{x^2+bx-2b^2}}:\dfrac{b}{x}$ *R.* $\dfrac{b}{x-3b}$

686 È vero che $P=\left(\dfrac{4a^2-1}{8a^3b}:\dfrac{2a+1}{4a^4b}\right)\cdot\left(\dfrac{2a^5}{6a-3}:\dfrac{a^2}{27}\right)$ è sempre positiva per qualunque a≠0 e b≠0? R. $9a^4$

687 Data $Q=\dfrac{4-\left(a^2-2ab+b^2\right)}{b-2-a}:\left(\dfrac{4-2a+2b}{3a^2}:\dfrac{2}{a^3}\right)$, quali condizioni dobbiamo porre alla variabile b affinché sia vera la proposizione “Per a = 3, l’espressione Q assume il valore –1.”? R. $b\neq 1\wedge b\neq 5$

MATEMATICA C3 - ALGEBRA 1

6. ALGEBRA DI PRIMO GRADO



Maze photo by woodleywonderworks
taken from: http://www.flickr.com/photos/wwworks/2786242106

Indice

►1. Equazioni di grado superiore al primo riducibili al primo grado

Le equazioni di grado superiore al primo possono, in certi casi, essere ricondotte ad equazioni di primo grado, utilizzando la legge di annullamento del prodotto.

Esempio

■ $x^2-4=0$

Il polinomio a primo membro può essere scomposto in fattori: $(x-2)(x+2)=0$

Per la legge di annullamento, il prodotto dei due binomi si annulla se $x-2=0$ oppure se $x+2=0$.

Di conseguenza si avranno le soluzioni: $x=2$, $x=-2$.

In generale, se si ha un'equazione di grado *n* scritta in forma normale $P(x)=0$
e se il polinomio $P(x)$ è fattorizzabile nel prodotto di *n* fattori di primo grado:

$$(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\dots(x-a_{n-1})(x-a_n)=0$$

applicando la legge di annullamento del prodotto, le soluzioni dell'equazione si ottengono determinando le soluzioni delle *n* equazioni di primo grado, cioè risolvendo:

$x-a_1=0$
$x-a_2=0$
$x-a_3=0$
$\dots$
$x-a_{n-1}=0$
$x-a_n=0$

Pertanto l'insieme delle soluzioni dell'equazione data sarà $S=\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n\}$

Esempio

■ $x^2-x-2=0$

Scomponendo in fattori il polinomio a primo membro, ricercando quei due numeri la cui somma è pari a -1 e il cui prodotto è pari a -2, si ha: $(x+1)(x-2)=0$

Utilizzando la legge di annullamento del prodotto, si ottiene il seguente insieme di soluzioni: $I.S.=\{-1,2\}$

■ $x^4-5x^2+4=0$

Scomponendo in fattori il polinomio a primo membro, utilizzando la regola della scomposizione del particolare trinomio di secondo grado, si ottiene: $(x^2-1)(x^2-4)=0$.

Scomponendo ulteriormente in fattori si ha $(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$

Per la legge di annullamento del prodotto è necessario risolvere le equazioni:

x-1=0 da cui x=1
x+1=0 da cui x=-1
x-2=0 da cui x=2
x+2=0 da cui x=-2

L'insieme delle soluzioni: $I.S.=\{+1,-1,+2,-2\}$.

Risolvere le seguenti equazioni di grado superiore al primo, riconducendole a equazioni di primo grado, ricercare le soluzioni tra i numeri reali.

1 $x^2+2x=0$ $I.S.=\{0,-2\}$ $x^2+2x-9x-18=0$ $I.S.=\{-2,+9\}$

2 $2x^2-2x-4=0$ $I.S.=\{2,-1\}$ $4x^2+16x+16=0$ $I.S.=\{-2\}$

3 $x^2-3x-10=0$ $I.S.=\{5,-2\}$ $x^2+4x-12=0$ $I.S.=\{2,-6\}$

4 $3x^2-6x-9=0$ $I.S.=\{3,-1\}$ $x^2+5x-14=0$ $I.S.=\{2,-7\}$

5 $-3x^2-9x+30=0$ $I.S.=\{2,-5\}$ $7x^2+14x-168=0$ $I.S.=\{4,-6\}$

6 $-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}x+63=0$ $I.S.=\{7,-6\}$ $\frac{7}{2}x^2+7x-168=0$ $I.S.=\{6,-8\}$

7 $x^4-16x^2=0$ $I.S.=\{0,4,-4\}$ $2x^3+2x^2-20x+16=0$ $I.S.=\{1,2,-4\}$

8 $-2x^3+6x+4=0$ $I.S.=\{2,-1\}$ $-x^6+7x^5-10x^4=0$ $I.S.=\{0,2,5\}$

9 $x^3-3x^2-13x+15=0$ $I.S.=\{1,5,-3\}$ $x^2+10x-24=0$ $I.S.=\{2,-12\}$

10 $2x^3-2x^2-24x=0$ $I.S.=\{0,-3,4\}$ $x^4-5x^2+4=0$ $I.S.=\{1,-1,2,-2\}$

11 $-x^3-5x^2-x-5=0$ $I.S.=\{-5\}$ $-4x^4-28x^3+32x^2=0$ $I.S.=\{0,1,-8\}$

12 $-4x^3+20x^2+164x-180=0$ $I.S.=\{1,9,-5\}$

13 $\frac{3}{4}x^3-\frac{3}{4}x=0$ $I.S.=\{0,1,-1\}$ $-\frac{6}{5}x^3-\frac{6}{5}x^2+\frac{54}{5}x+\frac{54}{5}=0$ $I.S.=\{-1,3,-3\}$

14 $5x^3+5x^2-80x-80=0$ $I.S.=\{-1,4,-4\}$

15 $-3x^3+18x^2+3x-18=0$ $I.S.=\{1,-1,6\}$

16 $4x^3+8x^2-16x-32=0$ $I.S.=\{2,-2\}$

17 $x^3+11x^2+26x+16=0$ $I.S.=\{-1,-2,-8\}$

18 $2x^3+6x^2-32x-96=0$ $I.S.=\{4,-4,-3\}$

19 $2x^3+16x^2-2x-16=0$ $I.S.=\{1,-1,-8\}$

20 $-2x^3+14x^2-8x+56=0$ $I.S.=\{7\}$

21 $2x^3+12x^2+18x+108=0$ $I.S.=\{-6\}$

22 $x^4-10x^3+35x^2-50x+24=0$ $I.S.=\{1,2,3,4\}$

23 $-2x^3-12x^2+18x+28=0$ $I.S.=\{-1,2,-7\}$

24 $-5x^4+125x^2+10x^3-10x-120=0$ $I.S.=\{1,-1,-4,6\}$

25 $\frac{7}{6}x^4-\frac{161}{6}x^2-21x+\frac{140}{3}=0$ $I.S.=\{1,-2,5,-4\}$

26 $(x^2-6x+8)(x^5-3x^4+2x^3)=0$ $I.S.=\{0,1,2,4\}$

27 $(25-4x^2)^4(3x-2)^2=0$ $I.S.=\left\{\frac{5}{2},-\frac{5}{2},\frac{2}{3}\right\}$

28 $(x-4)^3(2x^3-4x^2-8x+16)^9=0$ $I.S.=\{4,2,-2\}$

29 $(x^3-x)(x^5-9x^3)(x^2+25)=0$ $I.S.=\{0,1,-1,3,-3\}$

30 $(x^4+3x^3-3x^2-11x-6)(4x^6-216x^3+2916)=0$ $I.S.=\{-1,2,3,-3\}$

31 $2x^2-x-1=0$ R. 1; -1/2

32 $3x^2+5x-2=0$ R. -2; 1/3

33 $6x^2+x-2=0$ R. 1/2; -2/3

34 $2x^3-x^2-2x+1=0$ R. 1; -1; 1/2

35 $3x^3-x^2-8x-4=0$ R. -1; 2; -2/3

36 $8x^3+6x^2-5x-3=0$ R. -1; -1/2; 3/4

37 $6x^3+x^2-10x+3=0$ R. 1; 1/3 -3/2

38 $4x^4-8x^3-13x^2+2x+3=0$ R. 3; -1; 1/2; -1/2

39 $8x^4-10x^3-29x^2+40x-12=0$ R. 2; -2; 3/4; 1/2

40 $-12x^3+68x^2-41x+5=0$ R. 5; 1/2; 1/6

41 $x^5+3x^4-11x^3-27x^2+10x+24=0$ R. 1; -1; -2; 3; -4

►2. Equazioni numeriche frazionarie

In un capitolo precedente abbiamo affrontato le equazioni di primo grado. Affrontiamo ora le equazioni in cui l'incognita compare anche al denominatore.

DEFINIZIONE. Un'**equazione** in cui compare l'incognita al denominatore si chiama **frazionaria o fratta.**

Esempio

■ $\frac{3x-2}{1+x}=\frac{3x}{x-2}$

Questa equazione si differenzia dalle equazioni affrontate in precedenza per il fatto che l'incognita compare anche al denominatore.
Riflettendo sulla richiesta del problema, possiamo senz'altro affermare che, se esiste il valore che rende la frazione al primomembro uguale alla frazione al secondo membro, esso non deve annullare nessuno dei due denominatori, poiché in questo caso renderebbe priva di significato la scrittura, in quanto frazioni con denominatore 0 sono prive di significato.

Per risolvere un'equazione frazionaria, prima di tutto dobbiamo renderla nella forma $\frac{F(x)}{G(x)}=0$.

1° passo: determiniamo il m.c.m. dei denominatori $m.c.m.=(1+x)\cdot(x-2)$
Osserviamo che per x = -1 oppure per x = 2 le frazioni perdono di significato, in quanto si annulla il denominatore.
2° passo: imponiamo le **C**ondizioni di **E**sistenza: $1+x\neq0$ e $x-2\neq0$ cioè C.E. $x\neq-1\wedge x\neq2$.
La ricerca dei valori che risolvono l'equazione viene ristretta all'insieme $D=\mathbb{R}-\{-1,2\}$ detto **dominio** dell'equazione o **insieme di definizione.**
3° passo: applichiamo il primo principio d'equivalenza trasportando al primo membro la frazione che si trova al secondo membro e riduciamo allo stesso denominatore (m.c.m.) $\frac{(3x-2)\cdot(x-2)-3x\cdot(1+x)}{(1+x)\cdot(x-2)}=0$
4° passo: applichiamo il secondo principio di equivalenza moltiplicando ambo i membri per il m.c.m., certamente diverso da zero per le condizioni poste. L'equazione diventa: $(3x-2)\cdot(x-2)-3x\cdot(1+x)=0$
5° passo: eseguiamo le moltiplicazioni e sommiamo i monomi simili per portare l'equazione alla forma canonica: $3x^2-6x-2x+4-3x-3x^2=0 \quad\rightarrow\quad -11x=-4$

6° passo: dividiamo ambo i membri per –11, per il secondo principio di equivalenza si ha: $x=\frac{4}{11}$

7° passo: confrontiamo il valore trovato con le C.E.: in questo caso la soluzione appartiene al dominio D, quindi possiamo concludere che è accettabile. L'insieme soluzione è: $I.S.=\left\{\frac{4}{11}\right\}$.

Esempio

■ $\frac{x^2+x-3}{x^2-x}=1-\frac{5}{2x}$

1° determiniamo il m.c.m. dei denominatori; per fare questo dobbiamo prima scomporli in fattori. Riscriviamo: $\frac{x^2+x-3}{x\cdot(x-1)}=1-\frac{5}{2x}$ $\qquad m.c.m.=2x\cdot(x-1)$;
2° **C**ondizioni di **E**sistenza: $x-1\neq0\wedge 2x\neq0$, cioè $x\neq1\wedge x\neq0$, il dominio è $D=\mathbb{R}-\{1,0\}$;
3° passo: trasportiamo al primo membro ed uguagliamo a zero $\frac{x^2+x-3}{x\cdot(x-1)}-1+\frac{5}{2x}=0$; riduciamo allo stesso denominatore (m.c.m.) ambo i membri $\frac{2x^2+2x-6-2x^2+2x+5x-5}{2x\cdot(x-1)}=0$.
4° passo: moltiplicando ambo i membri per il m.c.m., certamente diverso da zero per le condizioni poste; l'equazione diventa: $2x^2+2x-6-2x^2+2x+5x-5=0$;
5° passo: riduciamo i monomi simili per portare l'equazione alla forma canonica: $9x=11$;
6° passo: dividiamo ambo i membri per 9 , otteniamo: $x=\frac{11}{9}$
7° passo: confrontando con le C.E., la soluzione appartiene all'insieme **D**, dunque è accettabile e l'insieme soluzione è: $I.S.=\left\{\frac{11}{9}\right\}$.

Risolvi le seguenti equazioni frazionarie

42 $\frac{2}{x+1}=\frac{1}{x+2}$ $I.S.=\{-3\}$ $\frac{1}{x-1}=2$ $I.S.=\left\{\frac{3}{2}\right\}$

43 $1-\frac{1}{x+1}=0$ $I.S.=\{0\}$ $\frac{2x-4}{x-2}=0$ $I.S.=\emptyset$

44 $\frac{x}{x+1}-\frac{1}{x-1}=1$ $I.S.=\{0\}$ $\frac{1}{x-3}=\frac{x}{3-x}$ $I.S.=\{-1\}$

45 $\frac{x-1}{x^2-4}=-\frac{5}{x+2}$ $I.S.=\left\{\frac{11}{6}\right\}$ $\frac{3}{x+1}=\frac{2}{x+1}$ $I.S.=\emptyset$

46 $\frac{1}{3-x}-\frac{4}{2x-6}=0$ $I.S.=\{\emptyset\}$ $\frac{x^2-1}{x-1}-1=2x+1$ $I.S.=\{-1\}$

47 $\frac{x}{x^2-4}=\frac{1}{x+2}$ $I.S.=\emptyset$ $\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}=\frac{2-2x}{x^3}$ $I.S.=\{2,-1\}$

48 $\frac{x-2}{x-1}=\frac{x-1}{x-2}$ $I.S.=\left\{\frac{3}{2}\right\}$ $\frac{x+3}{x+1}=x+3$ $I.S.=\{0,-3\}$

49 $\frac{3x+1}{3x^2+x}=1$ $I.S.=\{1\}$ $\frac{6+x}{x-3}=\frac{x^2}{x-3}$ $I.S.=\{-2\}$

50 $\frac{1}{x-2}+\frac{2}{x+1}=\frac{3}{x^2-x-2}$ $I.S.=\emptyset$ $\frac{5}{x-2}-\frac{6}{x+1}=\frac{3x-1}{x^2-x-2}$ $I.S.=\left\{\frac{9}{2}\right\}$

51 $\frac{1}{(1-x)}-\frac{x}{(x-1)}=0$ $I.S.=\{-1\}$ $\frac{x+1}{x-1}-\frac{x}{1+x}=0$ $I.S.=\left\{-\frac{1}{3}\right\}$

52 $\frac{2x+1}{2x-1}+\frac{4x^2+1}{4x^2-1}=2$ $I.S.=\{-1\}$ $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2-x}=0$ $I.S.=\left\{\frac{1}{3}\right\}$

53 $\frac{x-1}{x^2-2x+1}=\frac{2}{2-2x}$ $I.S.=\emptyset$ $4-x^2=\frac{x^2+5x+6}{x+2}-1$ $I.S.=\{1\}$

54 $\frac{5}{5x+1}+\frac{2}{2x-1}=\frac{1}{1-2x}$ $I.S.=\left\{\frac{2}{25}\right\}$ $\frac{1}{x-2}+\frac{2}{x+1}=\frac{3}{x^2-x-2}$ $I.S.=\{\emptyset\}$

55 $\frac{30}{x^2-25}+\frac{3}{5-x}=0$

56 $1+\frac{x-1}{x+1}=\frac{1}{x-2}+\frac{1-x^2}{x^2-x-2}$ $I.S.=\left\{-\frac{1}{3}\right\}$

57 $-\frac{3x}{6-2x}+\frac{5x}{10-5x}=\frac{1-x}{4-2x}$ $I.S.=\left\{\frac{3}{4}\right\}$

58 $\frac{18x^2-9x-45}{4-36x^2}-\frac{6x+1}{9x-3}+\frac{21x-1}{18x+6}=0$

59 $\frac{1}{x+3}-\frac{1}{2-x}=\frac{x+3}{x^2+x-6}$ $I.S.=\emptyset$

60 $\frac{1+2x}{1-2x}+\frac{1-2x}{1+2x}=\frac{6-8x^2}{1-4x^2}$ $I.S.=\emptyset$

61 $\frac{3x}{x-2}+\frac{6x}{x^2-4x+4}=\frac{3x^2}{(x-2)^2}$ $I.S.=\mathbb{R}-\{2\}$

62 $(4x+6)\left(\frac{4}{x+1}-\frac{1}{x-1}\right)=0$ $I.S.=\left\{-\frac{3}{2},\frac{5}{3}\right\}$

63 $\left(\frac{1}{x+5}-\frac{1}{5}\right):\left(\frac{1}{x-5}+\frac{1}{5}\right)+\frac{x^2}{x^2-5x}=0$ $I.S.=\left\{\frac{5}{3}\right\}$

64 $\frac{1+2x}{x^2+2x}+\frac{x^3-6x+1}{x^2-4}=\frac{x^2-2x}{x-2}+\frac{1}{x^2-2x}$ $I.S.=\left\{-\frac{4}{3}\right\}$

65 $\frac{1}{3x+2}-\frac{3}{2-x}=\frac{10x+4}{3x^2-4x-4}$ $\mathbb{R}-\left\{-\frac{2}{3},2\right\}$

66 $\frac{2x+1}{x+3}+\frac{1}{x-4}=\frac{4x-9}{x^2-x-12}$ $x=4$ soluzione non accettabile $I.S.=\{1\}$

67 $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}=\frac{(x+1)^2}{2(x^2-1)}+1$ $I.S.=\left\{-\frac{2}{3}\right\}$

68 $\frac{x^2-1}{x+1}-\frac{1}{x+2}=\frac{x+1}{x+2}-x$ $I.S.=\{1\}$

69 $\frac{1}{x+3}-\frac{2}{x+2}=\frac{3x-6}{x^2+5x+6}$ $I.S.=\left\{\frac{1}{2}\right\}$

70 $\frac{2x-3}{x+2}+\frac{1}{x-4}=\frac{2}{x^2-2x-8}$ $I.S.=\{2{,}3\}$

71 $\frac{x-1}{x+2}-\frac{x+2}{x-1}=\frac{1}{x^2+x-2}$ $I.S.=\emptyset$

72 $\frac{3}{x-1}+\frac{1}{x+1}=\frac{12-x}{x^2-1}$ $I.S.=\{2\}$

73 $\frac{1}{2}\cdot\left(x-\frac{1}{x}\right)-2\left(1-\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2-1}{x}$ $I.S.=\{-5,+1\}$

74 $(40-10x^2)^3\cdot\left(\frac{3x-1}{x+2}-\frac{3x}{x+1}\right)=0$ $I.S.=\left\{2,-\frac{1}{4}\right\}$

75 $\frac{x}{2x+1}+\frac{x+1}{2(x+2)}=\frac{x-1}{2x^2+5x+2}$ $I.S.=\emptyset$

76 $\frac{3x+1}{x^2-9}+\frac{2}{3x^2-9x}=\frac{3}{x+3}$ $I.S.=\left\{-\frac{3}{16}\right\}$

77 $\frac{3(2x-3)}{x^3+27}+\frac{1}{x+3}=\frac{x}{x^2-3x+9}$ $I.S.=\mathbb{R}-\{-3\}$

78 $\frac{1}{x^2-3x+2}+\frac{2}{x-1}=0$ R. $x=\frac{3}{2}$

79 $\frac{2x-1}{3x^2-75}-\frac{3-x}{x+5}+\frac{x-3}{10-2x}=\frac{7}{25-x^2}$ R. $x=\frac{35}{3}$

80 $\frac{x+2}{(x-3)^2}-\frac{1}{x-3}=\frac{4}{9-3x}$ R. $x=-\frac{3}{4}$

81 $\frac{5x}{3x^2-18x+15}-\frac{2}{3x-3}=\frac{5}{18x-90}$ R. $x=-5$

82 $(x-4)(x+3)=\frac{(x-4)(x+3)}{x-2}$ $I.S.=\{4,-3{,}3\}$

83 $\left(1-\frac{1}{2}x\right):\left(1+\frac{1}{2}x\right)=\left(\frac{2x+1}{6x+3}-\frac{1}{2}x\right)+\frac{x^2}{2x+4}$ $I.S.=\{4\}$

84 $\frac{3x-1}{1-2x}+\frac{x}{2x-1}-\frac{x^3-8}{x^2-4}:\frac{x^2+2x+4}{x^2+2x+1}=\frac{2-3x}{2x-6}\cdot\frac{x^2-9}{4-9x^2}-\frac{6x+7}{6}$ $I.S.=\left\{-\frac{26}{25}\right\}$

85 $\left(\frac{2x}{6x-3}+\frac{x}{4-8x}\right)+\left(\frac{1}{2x+1}-\frac{1}{2x-1}\right)\cdot\frac{2x(x^2-1)}{8x^2-4x}=\frac{x^2(5x-3)}{3(2x+1)(2x-1)^2}$ $I.S.=\{\frac{12}{5}\}$

86 $\frac{3x^2-2x+3}{x^2-3x}+\frac{x+2}{3-x}=\left(\frac{x+1}{x}-1\right)\left(\frac{x^2}{x^3-27}+\frac{x}{x-3}\right):\frac{3x}{3x^3-81}+\frac{x^2-x+2}{3-x}$ $I.S.=\{-30\}$

87 Osservando i due membri dell'equazione, senza svolgere i calcoli, puoi subito affermare che non esiste alcun numero reale che rende vera l'uguaglianza? $(2x-4x^2+7)^6=-\frac{1}{(x^2-5x+7)^4}$

88 Quale numero occorre aggiungere a numeratore e denominatore della frazione tre settimi perchè essa raddoppi di valore? R. [x=21]

89 Quale numero occorre aggiungere a numeratore e denominatore della frazione due settimi perchè essa triplichi di valore? R. {x=28]

90 Due amici A e B partono con le loro automobili nello stesso istante da due località diverse; A fa un viaggio di 100 Km a una certa velocità, B fa un viaggio di 132 Km ad una velocità che supera quella dell'amico di 20 Km/h. I due amici arrivano nello stesso istante all'appuntamento.
Qual è la velocità di A?



Traccia di soluzione
1. Se A e B partono insieme e arrivano insieme significa che hanno impiegato lo stesso tempo per fare il proprio viaggio;
2. il tempo è dato dal rapporto tra lo spazio percorso e la velocità;
3. la velocità di A è l'incognita del problema: la indichiamo con x;
4. l'equazione risolvente è $\frac{110}{x}=\frac{132}{x+20}$.

Prosegui nella risoluzione.

91 Per percorrere 480Km un treno impiega 3 ore di più di quanto impiegherebbe un aereo a percorrere 1920 Km. L'aereo viaggia ad una velocità media che è 8 volte quella del treno. Qual è la velocità del treno?

►3. Equazioni letterali

Quando si risolvono problemi, ci si ritrova a dover tradurre nel linguaggio simbolico delle proposizioni del tipo: *Un lato di un triangolo scaleno ha lunghezza pari a k volte la lunghezza dell'altro e la loro somma è pari a 2k.*
Poiché la lunghezza del lato del triangolo non è nota, ad essa si attribuisce il valore incognito x e quindi la proposizione viene tradotta dalla seguente equazione: $x+kx = 2k$.
È possibile notare che i coefficienti dell'equazione non sono solamente numerici, ma compare una lettera dell'alfabeto diversa dall'incognita. Qual è il ruolo della lettera k?
Essa prende il nome di **parametro** ed è una costante che rappresenta dei numeri fissi, quindi, può assumere dei valori prefissati. Ogni volta che viene fissato un valore di k, l'equazione precedente assume una diversa forma. Infatti si ha:

Valore di k	Equazione corrispondente
$k=0$	$x=0$
$k=2$	$x+2x=4$
$k=-\frac{1}{2}$	$x-\frac{1}{2}x=-1$

Si può quindi dedurre che il parametro diventa una costante, all'interno dell'equazione nell'incognita x, ogni volta che se ne sceglie il valore.
Si supponga che il parametro k assuma valori all'interno dell'insieme dei numeri reali. Lo scopo è quello di risolvere l'equazione, facendo attenzione a rispettare le condizioni che permettono l'uso dei principi d'equivalenza e che permettono di ridurla in forma normale.
Riprendiamo l'equazione $x+kx = 2k$, raccogliamo a fattore comune la x si ha $(k+1)x=2k$.
Per determinare la soluzione di questa equazione di primo grado, è necessario utilizzare il secondo principio d'equivalenza e dividere ambo i membri per il coefficiente $k+1$.
Si ricordi però che il secondo principio ci permette di moltiplicare o dividere i due membri dell'equazione per una stessa espressione, purché questa sia diversa da zero.
Per questa ragione, nella risoluzione dell'equazione $(k+1)x=2k$ è necessario distinguere i due casi:

- se $k+1\neq 0$, cioè se $k\neq -1$, è possibile dividere per $k+1$ e si ha $x=\frac{2k}{k+1}$;
- se $k+1=0$, cioè se $k=-1$, sostituendo tale valore all'equazione si ottiene l'equazione $(-1+1)x=2\cdot(-1)$, cioè $0\cdot x=-2$ che risulta impossibile.

Riassumendo si ha:

$x+kx = 2k$ con $k\in\mathbb{R}$		
Condizioni sul parametro	**Soluzione**	**Equazione**
$k=-1$	nessuna	Impossibile
$k\neq -1$	$x=\frac{2k}{k+1}$	Determinata

Ritorniamo ora al problema sul triangolo isoscele, spesso nell'enunciato del problema sono presenti delle limitazioni implicite che bisogna trovare. Infatti, dovendo essere x un lato del triangolo esso sarà un numero reale positivo. Di conseguenza, dovendo essere l'altro lato uguale a k volte x, il valore di k deve necessariamente essere anch'esso positivo, ovvero $k>0$. Di conseguenza il parametro k non può mai assumere il valore -1 e quindi il problema geometrico ammette sempre una soluzione.

Questa analisi effettuata sui valori che può assumere il parametro k, prende il nome di **discussione dell'equazione**.

Procedura per stabile quando una equazione è determinata, indeterminata, impossibile
In generale, data l'equazione $ax+b=0$ si ha $ax=-b$ e quindi:

- **se $a\neq 0$, l'equazione è determinata e ammette l'unica soluzione $x=-\frac{b}{a}$;**
- **se $a=0$ e $b\neq 0$, l'equazione è impossibile;**
- **se $a=0$ e $b=0$, l'equazione è soddisfatta da tutti i valori reali di x, ovvero è indeterminata.**

Esempi

■ $1+(x+m)=(x+1)^2-x(x+m)$

Dopo aver fatto i calcoli si ottiene l'equazione $(m-1)\cdot x=-m$ e quindi si ha:
Se $m-1\neq 0$, cioè se $m\neq 1$, è possibile dividere ambo i membri per $m-1$ e si ottiene l'unica soluzione $x=-\frac{m}{m-1}$;
Se $m-1=0$, cioè se $m=1$, sostituendo nell'equazione il valore 1 si ottiene $0\cdot x=-1$; che risulta impossibile.

■ $(k+3)x=k+4x(k+1)$

Effettuando i prodotti si ottiene l'equazione: $(3k+1)x=-k$ e quindi si ha:
Se $3k+1\neq 0$, cioè se $k\neq -\frac{1}{3}$, è possibile dividere ambo i membri per 3k+1 e si ottiene l'unica soluzione $x=\frac{-k}{3k+1}$
Se $k=-\frac{1}{3}$, sostituendo questo valore di k nell'equazione si ottiene $0\cdot x=\frac{1}{3}$, che risulta un'equazione impossibile.

■ $a^2\cdot x=a+1+x$

Portiamo al primo membro tutti i monomi che contengono l'incognita $a^2\cdot x-x=a+1$
Raccogliamo a fattore comune l'incognita $x\cdot(a^2-1)=a+1$
Scomponendo in fattori si ha l'equazione $x\cdot(a-1)(a+1)=a+1$
I valori di *a* che annullano il coefficiente dell'incognita sono *a=1* e *a=-1*
Nell'equazione sostituisco a=1, ottengo l'equazione 0x=2 che è impossibile.
Sostituisco a=-1, ottengo l'equazione 0x=0 che è indeterminata.
Escludendo i casi a=1 e a=-1, che annullano il coefficiente della *x* posso applicare il secondo principio di equivalenza delle equazione e dividere 1° e 2° membro per *a+1*, ottengo $x=\frac{a+1}{(a+1)\cdot(a-1)}=\frac{1}{a-1}$.

Ricapitolando

Se a=1 allora $I.S.=\emptyset$; se a=-1 allora $I.S.\mathbb{R}$; se $a\neq +1\wedge a\neq -1$ allora $I.S.=\left\{\frac{1}{a-1}\right\}$.

Risolvi e discuti le seguenti equazioni letterali nell'incognita x.

92 $1+2x=a+1-2x$ $\quad x=\frac{a}{4}\ \forall a\in\mathbb{R}$

93 $2x-\frac{7}{2}=ax-5$ $\quad$ se a=2 $I.S.\ \emptyset$; se $a\neq 2$ $I.S.=\left\{\frac{3}{2(a-2)}\right\}$

94 $b^2x=2b+bx$ $\quad$ se b=0 $I.S.=\mathbb{R}$, b=1 $I.S.\ \emptyset$, $b\neq 0\wedge b\neq 1$ $I.S.=\left\{\frac{2}{b-1}\right\}$

95 $ax+x-2a^2-2ax=0$

96 $ax+2=x+3$ $\quad$ se $a=1$ $I.S.=\emptyset$; se $a\neq 1$ $I.S.=\left\{\frac{1}{a-1}\right\}$

97 $3ax-2a=x\cdot(1-2a)+a\cdot(x-1)$

98 $k(x+2)=k+2$ $\quad$ se $k=0$ $I.S.=\emptyset$; se $k\neq 0$ $I.S.=\left\{\frac{2-k}{k}\right\}$

99 $(b+1)(x+1)=0$ $\quad$ se $b=-1$ $I.S.=\mathbb{R}$; se $b\neq -1$ $I.S.=\{-1\}$

100 $k^2x+2k=x+2$ $\quad$ $k=1$ $I.S.=\mathbb{R}$; $k=-1$ $I.S.=\emptyset$; $k\neq 1\wedge k\neq -1$ $I.S.=\left\{-\frac{2}{k+1}\right\}$

101 $x\cdot(3-5a)+2\cdot(a-1)=(a-1)\cdot(a+1)$

102 $(a-1)(x+1)=x+1$ $\quad$ se $a=2$ $I.S.=\mathbb{R}$; se $a\neq 2$ $I.S.=\{-1\}$

103 $x+2a\cdot(x-2a)+1=0$

104 $(a-1)(x+1)=a-1$ $\quad$ se $a=1$ $I.S.=\mathbb{R}$; se $a\neq 1$ $I.S.=\{0\}$

105 $2k(x+1)-2=k(x+2)$ $\quad$ se $k=0$ $I.S.=\emptyset$; se $k\neq 0$ $I.S.=\left\{\frac{2}{k}\right\}$

106 $a(a-1)x=2a(x-5)$ $\quad$ se $a=0$ $I.S.=\mathbb{R}$; se $a\neq 0$ $I.S.=\left\{\frac{10}{3-a}\right\}$

107 $3ax+a=2a^2-3a$ $\quad$ se $a=0$ $I.S.=\mathbb{R}$; se $a\neq 0$ $I.S.=\left\{\frac{2}{3}\cdot(a-2)\right\}$

108 $3x-a=a(x-3)+6$ $\quad$ se $a=3$ $I.S.=\mathbb{R}$; se $a\neq 3$ $I.S.=\{2\}$

109 $2+2x=3ax+a-a^2x$ $\quad$ $a=2$ $I.S.=\mathbb{R}$; $a=1$ $I.S.=\emptyset$; $a\neq 2\wedge a\neq 1$ $I.S.=\left\{\frac{1}{a-1}\right\}$

110 $x(a^2-4)=a+2$ $\quad$ $a=2$ $I.S.=\emptyset$; $a=-2$ $I.S.=\mathbb{R}$; $a\neq -2\wedge a\neq 2$ $I.S.=\left\{\frac{1}{a-2}\right\}$

111 $(x-m)(x+m)=(x+1)(x-1)$ $\quad$ $m=1\vee m=-1$ $I.S.=\mathbb{R}$; $m\neq 1\wedge m\neq -1$ $I.S.=\emptyset$

112 $(a-2)^2x+(a-2)x+a-2=0$ $\quad$ $a=2$ $I.S.=\mathbb{R}$; $a=1$ $I.S.=\emptyset$; $a\neq 1\wedge a\neq 2$ $I.S.=\left\{\frac{1}{1-a}\right\}$

113 $(9a^2-4)x=2(x+1)$ $\quad$ $a=-\frac{2}{3}\ \vee\ a=\frac{2}{3}$ $I.S.=\emptyset$; $a\neq -\frac{2}{3}\wedge a\neq\frac{2}{3}$ $I.S.=\left\{\frac{2}{3(3a^2-2)}\right\}$

114 $(a-1)x=a^2-1$ $\quad$ se $a=1$ $I.S.=\mathbb{R}$; se $a\neq 1$ $I.S.=\{a+1\}$

115 $(a+2)x=a^2+a-1$ $\quad$ se $a=-2$ $I.S.=\emptyset$; se $a\neq -2$ $I.S.=\left\{\frac{a^2+a-1}{a+2}\right\}$

116 $a(x-1)^2=a(x^2-1)+2a$ $\quad$ se $a=0$ $I.S.=\mathbb{R}$; se $a\neq 0$ $I.S.=\{0\}$

117 $a^3x-a^2-4ax+4=0$ $\quad$ $a=-2\vee a=2$ $I.S.=\mathbb{R}$; $a=0$ $I.S.=\emptyset$; $a\neq -2\wedge a\neq 0\wedge a\neq 2$ $I.S.=\left\{\frac{1}{a}\right\}$

118 $bx(b^2+1)-(bx-1)(b^2-1)=2b^2$ $\quad$ se $b=0$ $I.S.=\emptyset$; se $b\neq 0$ $I.S.=\left\{\frac{1+b^2}{2b}\right\}$

119 $a(a-5)x+a(a+1)=-6(x-1)$ $\quad$ $a=2$ $I.S.=\mathbb{R}$; $a=3$ $I.S.=\emptyset$; $a\neq 2\wedge a\neq 3$ $I.S.=\left\{\frac{a+3}{3-a}\right\}$

120 $(x+a)^2-(x-a)^2+(a-4)(a+4)=a^2$ $\quad$ $a\neq 0$ $I.S.=\left\{\frac{4}{a}\right\}$; $a=0$ $I.S.=\emptyset$

Equazioni con due parametri

Esempio

■ $(b+a)x-(b+2)(x+1)=-1$

Mettiamo l'equazione in forma canonica

$bx+ax-bx-b-2x-2=-1$

$(a-2)x=b+1$

- se $a-2=0$ l'equazione è impossibile o indeterminata
  - se $b+1=0$ è indeterminata
  - se $b+1\neq 0$ è impossibile
- se $a-2\neq 0$ l'equazione è determinata e la sua soluzione è $x=\frac{b+1}{a-2}$

Riassumendo:

$a=2\wedge b=-1 \rightarrow I.S.=\mathbb{R}$

$a=2\wedge b\neq -1 \rightarrow I.S.=\emptyset$

$a\neq 2\wedge b\neq -1 \rightarrow I.S.=\left\{\frac{b+1}{a-2}\right\}$.

Risolvi e discuti le seguenti equazioni nell'incognita x con due parametri

121 $(m+1)(n-2)x=0$ $\quad m=-1\vee n=2 \;\; I.S.=\mathbb{R}\, ;\, m\neq -1\wedge n\neq 2 \;\; I.S.=\{0\}$

122 $m(x-1)=n$ $\quad m=0\wedge n\neq 0\; I.S.=\emptyset\, ;\, m=0\wedge n=0\; I.S.=\mathbb{R}\, ;\, m\neq 0\; I.S.=\left\{\frac{m+n}{m}\right\}$

123 $(a+1)(b+1)x=0$ $\quad a=-1\vee b=-1 \;\; I.S.=\mathbb{R}\, ;\;\; a\neq -1\wedge b\neq -1\; I.S.=\{0\}$

124 $(m+n)(x-1)=m-n$ $\quad m=n=0 \;\; I.S.\mathbb{R}\, ;\, m=-n\neq 0 \;\; I.S.=\emptyset\, ;\, m\neq -n \;\; I.S.=\left\{\frac{2m}{m+n}\right\}$

125 $x(2a-1)+2b(x-2)=-4a-x$ $\quad a=b=0 \;\; I.S.\mathbb{R}\, ;\, a=-b\neq 0 \;\; I.S.=\emptyset\, ;\, a\neq -b \;\; I.S.=\left\{\frac{2(b-a)}{a+b}\right\}$

126 $ax-3+b=2(x+b)$ $\quad \begin{cases} a=2\wedge b=-3 \text{ eq. ind.} \\ a=2\wedge b\neq -3 \text{ eq. imp.} \\ a\neq 2\wedge b\neq -3 \quad x=\frac{b+3}{a-2} \end{cases}$

127 $(a+1)x=b+1$

$a=-1\wedge b=-1 \;\; I.S.=\mathbb{R}\, ;\;\; a=-1\wedge b\neq -1 \;\; I.S.=\emptyset\, ;\;\; a\neq -1 \;\; I.S.=\left\{\frac{b+1}{a+1}\right\}$

128 $(a+b)(x-2)+3a-2b=2b(x-1)$

$a=b=0\; I.S.\mathbb{R}\, ;\, a=b\neq 0\; I.S.=\emptyset\, ;\, a\neq 0\; I.S.=\left\{\frac{2b-a}{a-b}\right\}$

129 $x(x+2)+3ax=b+x^2$

$a\neq -\frac{2}{3}\; I.S.=\left\{\frac{b}{2+3a}\right\}\, ;\, a=-\frac{2}{3}\wedge b=0\; I.S.=\mathbb{R}\, ;\, a=-\frac{2}{3}\wedge b\neq 0\; I.S.=\emptyset$

130 $(x-a)^2+b(2b+1)=(x-2a)^2+b-3a^2$

$a=0\wedge b=0\; I.S.=\mathbb{R}\, ;\, a=0\wedge b\neq 0\; I.S.=\emptyset\, ;\, a\neq 0\; I.S:=\left\{-\frac{b^2}{a}\right\}$

Equazioni letterali frazionarie, caso in cui il denominatore contiene solo il parametro

Esempio

■ $\frac{x+a}{2a-1}-\frac{1}{a-2a^2}=\frac{x}{a}$ con $a\in\mathbb{R}$

Questa equazione è intera, pur presentando termini frazionari.
Sappiamo che ogni volta che viene fissato un valore per il parametro, l'equazione assume una forma diversa; la presenza del parametro al denominatore ci obbliga ad escludere dall'insieme dei numeri reali quei valori che annullano il denominatore.

Per $a=0\vee a=\frac{1}{2}$ si annullano i denominatori quindi l'equazione è priva di significato.

Per risolvere l'equazione abbiamo bisogno delle Condizioni di Esistenza $C.E.\ a\neq 0$ et $a\neq\frac{1}{2}$

Procediamo nella risoluzione, riduciamo allo stesso denominatore ambo i membri dell'equazione:
$\frac{a\cdot(x+a)+1}{a\cdot(2a-1)}=\frac{x\cdot(2a-1)}{a\cdot(2a-1)}$,
applichiamo il secondo principio moltiplicando ambo i membri per il m.c.m. $ax+a^2+1=2ax-x$
che in forma canonica è $x\cdot(a-1)=a^2+1$.
Il coefficiente dell'incognita dipende dal valore assegnato al parametro; procediamo quindi alla
Se $a-1\neq 0$ cioè $a\neq 1$ possiamo applicare il secondo principio e dividere ambo i membri per il coefficiente $a-1$ ottenendo $x=\frac{a^2+1}{a-1}$ L'equazione è determinata: $I.S.=\left\{\frac{a^2+1}{a-1}\right\}$;
Se $a-1=0$ cioè $a=1$ l'equazione diventa $0\cdot x=2$. L'equazione è impossibile: $I.S.=\emptyset$.
Riassumendo si ha:

Condizioni sul parametro	Insieme Soluzione	Equazione
$a=0\vee a=\frac{1}{2}$		Priva di significato
$a=1$	$I.S.=\emptyset$	Impossibile
$a\neq 0\wedge a\neq\frac{1}{2}\wedge a\neq 1$	$I.S.=\left\{\frac{a^2+1}{a-1}\right\}$	Determinata

■ $\frac{a-x}{a-2}+\frac{2ax}{a^2-4}-\frac{2-x}{a+2}=0$

Scomponendo i denominatori troviamo il m.c.m. = a^2-4
Pertanto se a=2 o a=-2 il denominatore si annulla e quindi l'equazione è priva di significato
Per poter procedere nella risoluzione poni le C.E. $a\neq -2\wedge a\neq 2$
Riduci allo stesso denominatore: $\frac{(a-x)(a+2)+2ax-(2-x)(a-2)}{(a+2)(a-2)}=0$
Applica il secondo principio per eliminare il denominatore e svolgi i calcoli.
Arrivi alla forma canonica è $2\cdot(a-2)\cdot x=a^2+4$. Per le C.E. sul parametro il coefficiente dell'incognita è sempre diverso da zero, pertanto puoi dividere per 2(a-2) e ottieni $x=\frac{a^2+4}{2(a-2)}$.
Riassumendo si ha:

$\frac{a-x}{a-2}+\frac{2ax}{a^2-4}-\frac{2-x}{a+2}$ con $a\in\mathbb{R}$		
Condizioni sul parametro	**Insieme Soluzione**	**Equazione**
$a=-2\vee a=+2$		Priva di significato
$a\neq -2\wedge a\neq +2$	$I.S.=\left\{\frac{a^2+4}{2(a-2)}\right\}$	Determinata

Equazioni letterali frazionarie, caso in cui il denominatore contiene l'incognita ma non il parametro

Esempio

■ $\frac{x+4a}{3x}=a-\frac{2x+2a}{6x}$ con $a\in\mathbb{R}$

Questa equazione è frazionaria o fratta perché nel denominatore compare l'incognita.
Sappiamo che risolvere un'equazione significa determinare i valori che sostituiti all'incognita rendono vera l'uguaglianza tra il primo e il secondo membro. Non sappiamo determinare tale valore solamente analizzando l'equazione, ma certamente possiamo dire che non dovrà essere x = 0 perché tale valore, annullando i denominatori, rende privi di significato entrambi i membri dell'equazione.
Poniamo allora una condizione sull'incognita: la soluzione è accettabile se $x\neq 0$.
Non abbiamo invece nessuna condizione sul parametro.
Procediamo quindi con la riduzione allo stesso denominatore di ambo i membri dell'equazione
$\frac{2x+8a}{6x}=\frac{6ax-2x-2a}{6x}$; eliminiamo il denominatore che per la condizione posta è diverso da zero.
Eseguiamo i calcoli al numeratore e otteniamo $4x-6ax=-10a$ da cui la forma canonica:
$x\cdot(3a-2)=5a$.
Il coefficiente dell'incognita contiene il parametro quindi procediamo alla discussione.
Se $3a-2\neq 0$ cioè $a\neq\frac{2}{3}$ possiamo applicare il secondo principio e dividere ambo i membri per il coefficiente $3a-2$ ottenendo $x=\frac{5a}{3a-2}$. L'equazione è determinata: $I.S.=\left\{\frac{5a}{3a-2}\right\}$. A questo punto dobbiamo ricordare la condizione sull'incognita, cioè $x\neq 0$, quindi la soluzione è accettabile se
$x=\frac{5a}{3a-2}\neq 0 \quad\rightarrow\quad a\neq 0$
Se $3a-2=0$ cioè $a=\frac{2}{3}$ l'equazione diventa $0\cdot x=\frac{10}{3}$, cioè l'equazione è impossibile: $I.S.=\emptyset$.
Riassumendo si ha la tabella:

$\frac{x+a}{3x}=a-\frac{2x+2a}{6x}$ con $a\in\mathbb{R}$			
Condizioni sul parametro	**Condizioni sull'incognita**	**Insieme Soluzione**	**Equazione**
	$x\neq 0$		
$a=\frac{2}{3}$		$I.S.=\emptyset$	Impossibile
$a\neq\frac{2}{3}$		$I.S.=\left\{\frac{5a}{3a-2}\right\}$	Determinata
$a\neq\frac{2}{3}$ et $a\neq 0$		$x=\frac{5a}{3a-2}$ accettabile	

Equazioni letterali frazionarie, caso in cui il denominatore contiene sia il parametro che l'incognita

Esempio

■ $\frac{2x+b}{x}+\frac{2x+1}{b-1}=\frac{2x^2+b^2+1}{bx-x}$ con $b\in\mathbb{R}$

L'equazione è fratta; il suo denominatore contiene sia l'incognita che il parametro.

Scomponiamo in fattori i denominatori $\frac{2x+b}{x}+\frac{2x+1}{b-1}=\frac{2x^2+b^2+1}{x\cdot(b-1)}$

- determiniamo le condizioni di esistenza che coinvolgono il parametro $C.E.\ b\neq 1$;
- determiniamo le condizioni sull'incognita: soluzione accettabile se $x\neq 0$.

Riduciamo allo stesso denominatore ed eliminiamolo in quanto per le condizioni poste è diverso da zero.
L'equazione canonica è $x\cdot(2b-1)=b+1$.
Il coefficiente dell'incognita contiene il parametro quindi occorre fare la discussione:

- se $2b-1\neq 0$ cioè $b\neq\frac{1}{2}$ possiamo dividere ambo i membri per $2b-1$, otteniamo $x=\frac{b+1}{2b-1}$
  L'equazione è determinata, l'insieme delle soluzioni è $I.S.=\left\{\frac{b+1}{2b-1}\right\}$; la soluzione è accettabile se verifica la condizione di esistenza $x\neq 0$ da cui si ha $x=\frac{b+1}{2b-1}\neq 0 \rightarrow b\neq -1$, cioè se b=-1 l'equazione ha una soluzione che non è accettabile, pertanto è impossibile.
- se $2b-1=0$ cioè $b=\frac{1}{2}$ l'equazione diventa $0\cdot x=\frac{3}{2}$. L'equazione è impossibile, l'insieme delle soluzioni è vuoto: $I.S.=\emptyset$.

La tabella che segue riassume tutti i casi:

$\frac{2x+b}{x}+\frac{2x+1}{b-1}=\frac{2x^2+b^2+1}{bx-x}$ con $b\in\mathbb{R}$			
Condizioni sul parametro	**Condizioni sull'incognita**	**Insieme Soluzione**	**Equazione**
$b=1$			Priva di significato
$b\neq 1$	$x\neq 0$		
$b=\frac{1}{2}\vee b=-1$		$I.S.=\emptyset$	Impossibile
$b\neq 1\wedge b\neq\frac{1}{2}\wedge b\neq -1$		$I.S.=\left\{\frac{b+1}{2b-1}\right\}$	Determinata
$b\neq 1\wedge b\neq\frac{1}{2}\wedge b\neq -1$		$x=\frac{b+1}{2b-1}$ accettabile	

Risolvi e discuti le seguenti equazioni che presentano il parametro al denominatore

131 $\frac{x+2}{6a}+\frac{x-1}{2a^2}=\frac{1}{3a}$

$$\begin{cases} a=0 \text{ equaz. priva di significato} \\ a=-3 \quad I.S.=\emptyset \\ a\neq 0 \wedge a\neq -3 \; I.S.=\left\{\frac{3}{a+3}\right\} \end{cases}$$

132 $\frac{x-1}{b}+\frac{2x+3}{4b}=\frac{x}{4}$

$$\begin{cases} b=0 \text{ equaz. priva di significato} \\ b=6 \quad I.S.=\emptyset \\ b\neq 0 \wedge b\neq 6 \quad I.S.=\left\{\frac{1}{6-b}\right\} \end{cases}$$

133 $\frac{2x-1}{3a}+\frac{x}{3}=\frac{2}{a}$

$$\begin{cases} a=0 \text{ equaz. priva di significato} \\ a=-2 \quad I.S.=\emptyset \\ a\neq 0 \wedge a\neq -2 \quad I.S.=\left\{\frac{7}{2+a}\right\} \end{cases}$$

134 $\frac{x}{a}+\frac{2x}{2-a}=\frac{a-x+2}{2a-a^2}$

$$\begin{cases} a=0 \vee a=2 \text{ equaz. priva di significato} \\ a=-3 \quad I.S.=\emptyset \\ a\neq 0 \wedge a\neq 2 \wedge a\neq -3 \quad I.S.=\left\{\frac{a+2}{a+3}\right\} \end{cases}$$

135 $\frac{x}{a-1}+8=4a-\frac{x}{a-3}$

$$\begin{cases} a=1 \vee a=3 \text{ equaz. priva di significato} \\ a\neq 1 \wedge a\neq 3 \; I.S.=\{(a-1)(a-3)\} \end{cases}$$

136 $\frac{x-1}{a-1}+\frac{x+a}{a}=\frac{a-1}{a}$

$$\begin{cases} a=0 \vee a=1 \text{ equaz. priva di signif.} \\ a=\frac{1}{2} \quad I.S.=\emptyset \\ a\neq 0 \wedge a\neq \frac{1}{2} \wedge a\neq 1 \quad I.S.=\left\{\frac{1}{2a-1}\right\} \end{cases}$$

137 $\frac{a^2-9}{a+2}x=a-3$

$$\begin{cases} a=-2 \text{ equaz. priva di signif.} \\ a=-3 \quad I.S.=\emptyset \\ a=3 \quad I.S.=\mathbb{R} \\ a\neq -3 \wedge a\neq -2 \wedge a\neq 3 \quad I.S.=\left\{\frac{a+2}{a+3}\right\} \end{cases}$$

138 $\frac{x+2}{a^2-2a}+\frac{x}{a^2+2a}+\frac{1}{a}=\frac{2}{a^2-4}$

$$\begin{cases} a=0 \vee a=-2 \vee a=+2 \text{ priva di signif.} \\ a\neq 0 \wedge a\neq -2 \wedge a\neq +2 \quad I.S.=\left\{-\frac{a}{2}\right\} \end{cases}$$

139 $\frac{x+1}{a^2+2a+1}+\frac{2x+1}{a^2-a-2}-\frac{2x}{(a+1)(a-2)}+\frac{1}{a-2}=0$

$$\begin{cases} a=2 \vee a=-1 \text{ equaz. priva di signif.} \\ a\neq 2 \wedge a\neq -1 \quad I.S. \left\{\frac{a(a+4)}{2-a}\right\} \end{cases}$$

140 $\frac{x+1}{a-5}+\frac{2x-1}{a-2}=\frac{2}{a^2-7a+10}$

$$\begin{cases} a=5 \vee a=2 \text{ equaz. priva di signif.} \\ a=4 \quad I.S.=\emptyset \\ a\neq 5 \wedge a\neq 2 \wedge a\neq 4 \quad I.S.=\left\{\frac{1}{3(4-a)}\right\} \end{cases}$$

141 $\frac{x+2}{b-2}+\frac{2}{b^2-4b+4}+\left(\frac{1}{b-2}+\frac{x}{b-1}\right)\cdot(b-1)=0$

$$\begin{cases} b=2 \vee b=1 \text{ equaz. priva di significato} \\ b\neq 2 \wedge b\neq 1 \quad I.S. \left\{\frac{b}{2-b}\right\} \end{cases}$$

142 $\frac{x-2}{t^2+3t}+\frac{x-1}{t+3}=\frac{x-2}{t^2}+\frac{1}{t+3}$

$$\begin{cases} t=0 \vee t=-3 \text{ equaz. priva di significato} \\ t^2=3 \quad I.S.=\mathbb{R} \\ t\neq 0 \wedge t\neq -3 \wedge t^2\neq 3 \quad I.S.=\{2\} \end{cases}$$

143 $\frac{3+b^3x}{7b^2-b^3}+\frac{(2b^2+b)x+1}{b(b-7)}=\frac{3b^2x+1}{b^2}-2x$

$$\begin{cases} b=0 \vee b=7 \text{ equaz. priva di significato} \\ b\neq 0 \wedge b\neq 7 \quad I.S.=\left\{-\frac{1}{2b^2}\right\} \end{cases}$$

144 $\frac{x+m}{x+1}=1$

$$\begin{cases} m=1 \quad I.S.=\mathbb{R}-\{-1\} \\ m\neq 1 \quad I.S.=\emptyset \end{cases}$$

145 $\frac{3}{x+1}=2a-1$ $\qquad \begin{cases} a=\frac{1}{2} \quad I.S.=\emptyset \\ a\neq\frac{1}{2} \quad I.S.=\left\{-\frac{2(a-2)}{2a-1}\right\} \end{cases}$

146 $\frac{2a-x}{x-3}-\frac{ax+2}{9-3x}=0$ $\qquad \begin{cases} a=3 \vee a=\frac{7}{9} \quad I.S.=\emptyset \\ a\neq3 \wedge a\neq\frac{7}{9} \quad I.S.=\left\{\frac{2(3a+1)}{3-a}\right\} \end{cases}$

147 $\frac{t-1}{x-2}=2t$ $\qquad \begin{cases} t=0 \vee t=1 \quad I.S.=\emptyset \\ t\neq0 \wedge t\neq1 \quad I.S.=\left\{\frac{5t-1}{2t}\right\} \end{cases}$

148 $\frac{k}{x+1}=\frac{2k}{x-1}$ $\qquad \begin{cases} k=0 \quad I.S.=\mathbb{R}-\{1,-1\} \\ k\neq0 \quad I.S.=\{-3\} \end{cases}$

149 $\frac{a-1}{x+3}-\frac{a}{2-x}=\frac{ax+a^2}{x^2+x-6}$ $\qquad \begin{cases} a=1 \quad I.S.=\mathbb{R}-\{-3,2\} \\ a=3 \vee a=2 \quad I.S.=\emptyset \\ a\neq1 \wedge a\neq3 \quad I.S.=\{-a\} \end{cases}$

150 $\frac{a+1}{x+1}-\frac{2a}{x-2}=\frac{3-5a}{x^2-x-2}$ $\qquad \begin{cases} a=1 \vee a=-3 \vee a=3 \quad I.S.=\emptyset \\ a\neq-3 \wedge a\neq1 \wedge a\neq3 \quad I.S.=\left\{\frac{5-a}{1-a}\right\} \end{cases}$

151 $\frac{x-a}{x^2-1}-\frac{x+3a}{2x-x^2-1}=\frac{x+5}{x+1}-\frac{2x}{(x-1)^2}-1$ $\qquad \begin{cases} a=1 \vee a=-5 \vee a=-1 \vee a=7 \quad I.S.=\emptyset \\ a\neq-5 \wedge a\neq-1 \wedge a\neq7 \quad I.S.=\left\{\frac{2(a-1)}{a+5}\right\} \end{cases}$

152 $\frac{3}{1+3x}+\frac{a}{3x-1}=\frac{a-5x}{1-9x^2}$ $\qquad \begin{cases} a=-\frac{4}{3} \vee a=\frac{5}{9} \vee a=\frac{13}{3} \quad I.S.=\emptyset \\ a\neq-\frac{4}{3} \wedge a\neq\frac{5}{9} \wedge a\neq\frac{13}{3} \quad I.S.=\left\{\frac{3-2a}{4+3a}\right\} \end{cases}$

153 $\frac{2a}{x^2-x-2}+\frac{1}{3x^2+2x-1}=\frac{6a^2-13a-4}{3x^3-4x^2-5x+2}$ $\qquad \begin{cases} a=-\frac{1}{6} \quad I.S.=\mathbb{R}-\left\{-1,2,\frac{1}{3}\right\} \\ a=\frac{7}{3} \vee a=4 \vee a=1 \quad I.S.=\emptyset \\ a\neq-\frac{1}{6} \wedge a\neq\frac{7}{3} \wedge a\neq4 \wedge a\neq1 \quad I.S.=\{a-2\} \end{cases}$

154 $\frac{a}{x}=\frac{1}{a}$ $\qquad \begin{cases} a=0 \text{ equaz. priva di significato} \\ a\neq0 \quad I.S.=\{a^2\} \end{cases}$

155 $\frac{a}{x+a}=1+a$ $\qquad \begin{cases} a=-1 \vee a=0 \quad I.S.=\emptyset \\ a\neq-1 \wedge a\neq0 \quad I.S.=\left\{-\frac{a^2}{1+a}\right\} \end{cases}$

156 $\frac{x}{x-a}+\frac{1}{x+a}=1$ $\qquad \begin{cases} a=-1 \vee a=0 \quad I.S.=\emptyset \\ a\neq-1 \wedge a\neq0 \quad I.S.=\left\{-\frac{a(a-1)}{a+1}\right\} \end{cases}$

157 $\frac{x+a}{x-a}=\frac{x-a}{x+a}$ $\qquad \begin{cases} a=0 \quad I.S.=\mathbb{R}-\{0\} \\ a\neq0 \quad I.S.=\{0\} \end{cases}$

158 $\frac{2}{1-ax}+\frac{1}{2+ax}=0$ $\qquad \begin{cases} a=0 \quad I.S.=\emptyset \\ a\neq0 \quad I.S.=\left\{-\frac{5}{a}\right\} \end{cases}$

159 $\frac{2}{x-2}+\frac{a+1}{a-1}=0$ $\qquad \begin{cases} a=1 \text{ equaz. priva di significato} \\ a=-1 \quad I.S.=\emptyset \\ a\neq1 \wedge a\neq-1 \quad I.S.=\left\{\frac{4}{a+1}\right\} \end{cases}$

160 $\frac{1}{x+t}-\frac{1}{t+1}=\frac{tx}{tx+x+t^2+t}$

$\begin{cases} t=-1 \text{ equazione priva di significato} \\ t^2+t-1=0 \quad I.S.=\emptyset \\ t^2+t-1\neq 0 \quad I.S.=\left\{\frac{1}{t+1}\right\} \end{cases}$

161 $\frac{tx}{x-2}+\frac{t^2}{t+1}-\frac{t}{x-2}=0$

$\begin{cases} t=-1 \text{ equaz. priva di significato} \\ t=0 \quad I.S. \mathbb{R}-\{2\} \\ t=-\frac{1}{2} \vee t=-3 \quad I.S.=\emptyset \\ t\neq -3,-\frac{1}{2},-1,0 \quad I.S.=\left\{\frac{3t+1}{2t+1}\right\} \end{cases}$

162 $\frac{2x+1}{2x-1}=\frac{2a-1}{a+1}$

$\begin{cases} a=-1 \quad \textit{equaz. priva di sign.} \\ a=2 \quad I.S.=\emptyset \\ a\neq -1 \wedge a\neq 2 \quad I.S.=\left\{\frac{3a}{2(a-2)}\right\} \end{cases}$

163 $\frac{x}{2a}+\frac{x+1}{1-2a}=\frac{1}{a}$

164 $\frac{a}{x+1}=\frac{3}{x-2}$

165 $\frac{x}{x+1}+\frac{x}{x-1}=\frac{bx}{1-x^2}+\frac{a+2x^2}{x^2-1}$

166 $\frac{2x+1}{x}+\frac{2x^2-3b^2}{bx-x^2}=\frac{1}{x-b}$

167 $\frac{x-1}{x+a}=2+\frac{1-x}{x-a}$

►4. Equazioni letterali e formule inverse

Le formule di geometria, di matematica finanziaria e di fisica possono essere viste come equazioni letterali. I due principi di equivalenza delle equazioni permettono di ricavare le cosiddette formule inverse, ossia di risolvere un'equazione letterale rispetto a una delle qualsiasi lettere incognite che vi compaiono.

Esempi

- Area del triangolo $A=\frac{b\cdot h}{2}$

Questa equazione è stata risolto rispetto all'incognita A, ossia se sono note le misure della base b e dell'altezza h è possibile ottenere il valore dell'area A.
E' possibile risolvere l'equazione rispetto a un'altra lettera pensata come incognita.
Note le misure di A e di B ricaviamo h. Per il primo principio di equivalenza moltiplichiamo per 2 entrambi i membri dell'equazione $A=\frac{b\cdot h}{2}\rightarrow 2\text{A}=b\cdot h$ dividiamo per b entrambi i membri $\frac{2\text{A}}{b}=h$, ora basta invertire primo e secondo membro:
$h=\frac{2\text{A}}{b}$.

- Formula del montante $M=C(1+it)$

Depositando un capitale C viene depositato per un periodo di tempo t in anni, al quale è applicato un tasso di interesse annuo i, si ha diritto al montante M.
Risolviamo l'equazione rispetto al tasso di interesse i, ossia supponiamo di conoscere il capitale depositato C, il montante M ricevuto alla fine del periodo t e ricaviamo il tasso di interesse che ci è stato applicato.
Partendo da $M=C(1+it)$, dividiamo primo e secondo membro per C, otteniamo $\frac{M}{C}=1+it$;
sottraiamo 1 al primo e al secondo membro, otteniamo $\frac{M}{C}-1=it$; dividiamo primo e secondo membro per t, otteniamo $i=\frac{\left(\frac{M}{C}-1\right)}{t}$ che possiamo riscrivere come $i=\frac{1}{t}\cdot\left(\frac{M}{C}-1\right)$ oppure $i=\frac{M-C}{t\cdot C}$.

- Formula del moto rettilineo uniforme $s=s_0+v\cdot t$

Un corpo in una posizione s_0, viaggiando alla velocità costante *v*, raggiunge dopo un intervallo di tempo *t* la posizione *s*.
Calcoliamo v supponendo note le altre misure.
Partendo dalla formula $s=s_0+v\cdot t$ sottraiamo ad ambo i membri s_0, otteniamo $s-s_0=v\cdot t$; dividiamo primo e secondo membro per t, otteniamo $\frac{s-s_0}{t}=v$.

Ricava le formule inverse richieste

168 Interesse I maturato da un capitale C, al tasso di interesse annuo i, per un numero di anni t:

$$I = C \cdot i \cdot t$$

Ricava le formule per calcolare C = … … i = … … t = … …
Se il capitale è 12.000 €, il tasso di interesse 3,5%, il tempo è di 6 anni, calcola I.

169 Conversione da gradi Celsius C a gradi Fahrenheit F

$$C = \frac{5(F-32)}{9}$$

Ricava la formula per calcolare F = …
Calcola il valore di C quando F vale 106.
Calcola il valore di F quando C vale 12.

170 Valore attuale Va di una rendita che vale Vn dopo n anni, anticipata di t anni al tasso di interesse i:

$$V_a = V_n \cdot (1 - i \cdot t)$$

Ricava le formule per calcolare V_n = … … i = … … t = … …
Se il valore attuale è 120.000€, il tasso di interesse il 2%, calcola il valore della rendita dopo 20 anni.

171 Sconto semplice S , per un montante M, al tasso di interesse i, per un tempo t in anni:

$$S = \frac{M \cdot i \cdot t}{1 + i \cdot t}$$

Ricava le formule per calcolare M = … … i = … …
Se lo sconto semplice è 12.000€, il tempo è 12 anni, il tasso di interesse il 4,5%, calcola il montante.

172 Superficie S di un trapezio di base maggiore B, base minore b, altezza h:

$$S = \frac{1}{2} \cdot (B + b) \cdot h$$

Ricava le formule per calcolare B = … … b = … … h = … …
Se la base maggiore è 12cm, la base minore 8cm, la superficie 12cm^2, calcola l'altezza del trapezio.

173 Superficie laterale Sl di un tronco di piramide con perimetro della base maggiore 2p, perimetro della base minore 2p', apotema a (attenzione 2p e 2p' sono da considerare come un'unica incognita):

$$S_l = \frac{(2p + 2p') \cdot a}{2}$$

Ricava le formule per calcolare 2p = … … 2p' = … … a = … …
Se la superficie laterale vale 144cm^2, il perimetro della base minore 12cm e il perimetro della base maggiore 14cm, calcola l'apotema.

174 Volume V del segmento sferico a una base di raggio r e altezza h.

$$V = \pi \cdot h^2 \cdot \left(r - \frac{h}{3} \right)$$

Ricava la formula per calcolare r = … …
Se il volume misura 200cm^3 e l'altezza 10cm, calcola la misura del raggio.

175 Superficie totale S del cono di raggio di base r e apotema a.

$$S = \pi \cdot r \cdot (r + a)$$

Ricava la formula per calcolare a = … …
Se la superficie totale è 98cm^2 e il raggio 6cm, calcola la misura dell'apotema

176 Velocità v nel moto rettilineo uniforme con velocità iniziale v0, accelarazione costante a dopo un tempo t

$$v = v_0 + a \cdot t$$

Ricava le formule per calolare v_0 = … … a = … … t = … …
Se un corpo è passato in 10 secondi dalla velocità 10m/s alla velocità 24m/s qual è stata la sua ccelezione?

177 Spazio percorso s nel moto rettilineo uniformemente accelerato in un intervallo di tempo t, per un corpo che ha posizione iniziale s0, velocità iniziale v0 e accelerazione a:

$$s=s_0+v_0\cdot t+\frac{1}{2}\cdot a\cdot t^2$$

Ricava le formule per calcolare v_0 = … … a = … …

Se un corpo ha percorso 100m, partendo dalla posizione iniziale 0, accelerazione 3m/s^2, in 10 secondi, qual era la sua velocità iniziale?

178 Formula di Bernoulli relativa al moto di un fluido:

$$p+\rho\cdot g\cdot h+\frac{1}{2}\rho\cdot v^2=k$$

Ricava le formule per calcolare h = … … ρ = … …

179 Legge di Gay-Lussac per i gas:

$$V=V_0\cdot(1+\alpha\cdot t)$$

Ricava le formule per calcolare V_0 = … … t = … …

180 Equazione di stato dei gas perfetti:

$$pV=nRT$$

Ricava le formule per calcolare V = … … T = … …

181 Rendimento del ciclo di Carnot :

$$\eta=1-\frac{T_1}{T_2}$$

Ricava le formule per calcolare T_1 = … … T_2 = … …

182 Legge di Stevino

$$P_B=P_A+\rho\cdot g\cdot(z_A-z_B)$$

Ricava le formule per calcolare ρ = … … z_A = … … z_B = … …

Risolvi le seguenti equazioni rispetto alla lettera richiesta:

183 $y=\frac{2-a}{x}$ x = … … a = … …

184 $y=2-\frac{a}{x}$ x = … … a = … …

185 $y=\frac{2}{x}-a$ x = … … a = … …

186 $y=-\frac{2-a}{x}$ x = … … a = … …

187 $(m-1)x=m-3$ m = … …

188 $\frac{2}{x+2}+\frac{a-1}{a+1}=0$ a = … …

189 $(a+1)(b-1)x=0$ b = … …

190 $\frac{x}{a+b}+\frac{x-b}{a-b}=\frac{b}{a^2-b^2}$ risolvi rispetto all'incognita *a* e poi rispetto a *x*

$$R.\left[a=\frac{b(b+1)}{2x-b};\quad x=\frac{b(a+b+1)}{2a}\right]$$

191 $\frac{2x}{a+b}+\frac{bx}{a^2-b^2}-\frac{1}{a-b}=0$ risolvi rispetto ad *a* e poi rispetto a b

$$R.\left[a=\frac{b(x+1)}{2x-1};b=\frac{a(2x-1)}{x+1}\right]$$

►5. Intervalli sulla retta reale

DEFINIZIONE.
Dati due numeri reali a e b, con a < b, si chiamano **intervalli**, i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$

$(a,b)=\{x\in\mathbb{R} | a<x<b\}$ intervallo limitato aperto, a e b sono esclusi;
$[a,b]=\{x\in\mathbb{R} | a\le x\le b\}$ intervallo limitato chiuso, a e b sono inclusi;
$[a,b)=\{x\in\mathbb{R} | a\le x<b\}$ intervallo limitato chiuso a sinistra e aperto a destra, a è incluso, b è escluso;
$(a,b]=\{x\in\mathbb{R} | a<x\le b\}$ intervallo limitato aperto a sinistra e chiuso a destra, a è escluso, b è incluso;
$(a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R} | x>a\}$ intervallo superiormente illimitato aperto, a è escluso;
$[a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R} | x\ge a\}$ intervallo superiormente illimitato chiuso, a è incluso;
$(-\infty,a)=\{x\in\mathbb{R} | x<a\}$ intervallo inferiormente illimitato aperto, a è escluso;
$(-\infty,a]=\{x\in\mathbb{R} | x\le a\}$ intervallo inferiormente illimitato chiuso, a è escluso.

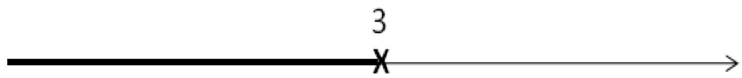
I numeri a e b si chiamano **estremi** dell'intervallo.

I numeri reali possono essere messi in corrispondenza biunivoca con i punti di una retta: ogni numero reale ha per immagine un punto della retta e viceversa ogni punto della retta è immagine di un numero reale. Di conseguenza ognuno degli intervalli sopra definiti ha per immagine una semiretta o un segmento, precisamente gli intervalli limitati corrispondono a segmenti e quelli illimitati a semirette. Vediamo con degli esempi come si rappresentano i diversi tipi di intervalli.

Esempi

- $H=\{x\in\mathbb{R} | x<3\}$ intervallo illimitato inferiormente $H=(-\infty,3)$

L'insieme H è rappresentato da tutti i punti della semiretta che precedono il punto immagine del numero 3, esclusa l'origine della semiretta. Nella figura, la semiretta dei punti che appartengono ad H è stata disegnata con una linea più spessa; per mettere in evidenza che il punto immagine di 3 non appartiene alla semiretta abbiamo messo una crocetta sul punto.



- $P=\{x\in\mathbb{R} | x\ge -5\}$ intervallo illimitato superiormente chiuso a sinistra $H=[-5,+\infty)$

Segniamo sulla retta r il punto immagine di -5; l'insieme P è rappresentato dalla semiretta di tutti i punti che seguono -5, compreso lo stesso -5. Nel disegno, la semiretta dei punti che appartengono a P è stata disegnata con una linea più spessa, per indicare che il punto -5 appartiene all'intervallo abbiamo messo un pallino pieno sul punto.



- $D=\{x\in\mathbb{R} | -2<x<6\}$ intervallo limitato aperto $D=(-2,6)$

Segniamo sulla retta reale i punti immagine degli estremi del segmento, -2 e 6. L'insieme D è rappresentato dal segmento che ha per estremi questi due punti. Nel disegno il segmento è stato disegnato con una linea più spessa, i due estremi del segmento sono esclusi, pertanto su ciascuno di essi abbiamo messo una crocetta.



- $T=\{x\in\mathbb{R} | -2<x\le 6\}$ intervallo limitato chiuso a destra $T=(-2,6]$.

Rispetto al caso precedente, il segmento che rappresenta l'insieme T è chiuso a destra, ossia è incluso nell'intervallo anche il 6, è escluso invece il punto -2.



- $S=\{x\in\mathbb{R} | -2\le x\le 6\}$ intervallo chiuso e limitato $S=[2,6]$

Il segmento che rappresenta l'insieme S contiene tutti e due i suoi estremi:

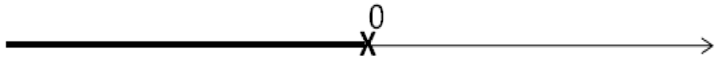


Altri particolari sottoinsiemi dei numeri reali sono

- $\mathbb{R}^{+}=\{x\in\mathbb{R}\mid x>0\}$ semiretta di origine 0 costituita da tutti i numeri positi:



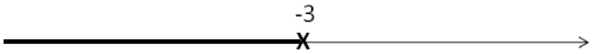
- $\mathbb{R}^{-}=\{x\in\mathbb{R}\mid x<0\}$ semiretta di origine 0 costituita da tutti i numeri reali negativi



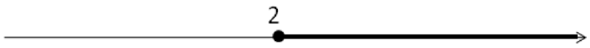
Il punto 0 non appartiene a nessuna delle due semirette; il numero zero non appartiene né a $\mathbb{R}^{+}$ né a $\mathbb{R}^{-}$
$\mathbb{R}=\mathbb{R}^{+}\cup\mathbb{R}^{-}\cup\{0\}$.

- $\mathbb{R}_0^{+}=\{x\in\mathbb{R}\mid x\geq 0\}$
- $\mathbb{R}_0^{-}=\{x\in\mathbb{R}\mid x\leq 0\}$

Per ciascuno dei seguenti grafici determina la scrittura corretta

192 

[A] $x<-3$ [B] $x>-3$ [C] $x\leq -3$ [D] $x\leq -3$

193 

[A] $x<2$ [B] $x>2$ [C] $x\leq 2$ [D] $x\leq 2$

194 

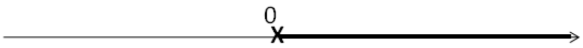
[A] $x<+2$ [B] $x>-2$ [C] $-2\leq x\leq 2$ [D] $-2<x<2$

195 

[A] $x<5\,;\,x>3$ [B] $3>x\geq 5$ [C] $3\leq x<5$ [D] $3<x\leq 5$

196 

[A] $\mathbb{R}^{-}-\{-1\}$ [B] $-1\geq x\geq 0$ [C] $-1\leq x\leq 0$ [D] $0<x<-1$

197 

[A] $x>0$ [B] $x>-\infty$ [C] $x\leq 0$ [D] $0<x\leq 0$

198 

[A] $x\geq 1\,;\,x<2$ [B] $1\leq x<2$ [C] $x\leq 1\; e\; x>2$ [D] $2\geq 1$

►6. Disequazioni numeriche

Consideriamo le seguenti proposizioni:

A) 5 è minore di 12
B) 48-90 è maggiore di 30
C) il quadrato di un numero reale è maggiore o uguale a zero
D) sommando ad un numero la sua metà si ottiene un numero minore o uguale a 1

esse possono essere tradotte in linguaggio matematico usando i simboli > (maggiore) , < (minore) , ≥ (maggiore o uguale) ; ≤ (minore o uguale) e precisamente :

A) $5<12$ B) $48-90>30$ C) $x^2 \geq 0$ D) $x+\frac{1}{2}x \leq 1$

Le formule che contengono variabili si dicono aperte; quelle che contengono solo numeri si dicono chiuse. Quindi A) e B) sono formule chiuse; C) e D) sono formule aperte.

DEFINIZIONE. Chiamiamo **disuguaglianza** una formula chiusa costruita con uno dei predicati < (essere minore) ; > (essere maggiore) ; ≤ (essere minore o uguale) ; ≥ (essere maggiore o uguale).

Di essa sappiamo subito stabilire il valore di verità, quando è stabilito l'ambiente in cui vengono enunciate.

DEFINIZIONE. Chiamiamo **disequazione** una formula aperta, definita in R e costruita con uno dei seguenti predicati: < (essere minore) ; > (essere maggiore) ; ≤ (essere minore o uguale) ; ≥ (essere maggiore o uguale).

Analogamente a quanto detto per le equazioni, chiamiamo **incognite** le variabili che compaiono nella disequazione, **primo membro** e **secondo membro** le due espressioni che compaiono a sinistra e a destra del segno di disuguaglianza.

Esempi

- In N, la formula $5>0$ è una disuguaglianza VERA
- In Z, la formula $-6>-4$ è una disuguaglianza FALSA
- La formula $5x>0$ è una disequazione; quando all'incognita sostituiamo un numero essa si trasforma in una disuguaglianza e solo allora possiamo stabilirne il valore di verità. Nel caso proposto è VERA se sostituiamo alla variabile un qualunque numero positivo, FALSA se sostituiamo zero o un numero negativo.

199 Completa la seguente tabella indicando con una crocetta il tipo di disuguaglianza o disequazione:

Proposizione	Disuguaglianza		Disequazione
	VERA	FALSA	
Il doppio di un numero reale è minore del suo triplo aumentato di 1			
La somma del quadrato di 4 con 3 è maggiore della somma del quadrato di 3 con 4			
Il quadrato della somma di 4 con 3 è minore o uguale a 49			
In $\mathbb{Z}:(5+8)-(2)^4>0$			
$-x^2>0$			
$(x+6)^2\cdot(1-9)\cdot(x+3-9)<0$			

DEFINIZIONE. L'insieme dei valori che sostituiti all'incognita trasformano la disequazione in una disuguaglianza vera, è l'**insieme soluzione (I.S.)** della disequazione.

►7. Ricerca dell'insieme soluzione di una disequazione

Alcune volte l'I.S. si può semplicemente trovare ragionando sulla forma della disequazione.

Esempi

Analizziamo le seguenti disequazioni in R:

- $3 \cdot x \geq 0$ si cercano quei valori da attribuire all'incognita che moltiplicati per 3 diano un prodotto positivo o nullo. Per le regole dei segni e per la legge di annullamento del prodotto, il numero x deve essere maggiore o uguale a 0: $I.S.=\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}=\mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$.
- $x^2+1<0$ si cercano i valori che rendono la somma del loro quadrato con 1 un numero negativo. Poiché il quadrato di un numero è sempre positivo, al più nullo se il numero è zero, aggiungendo ad esso 1, non troveremo mai un risultato negativo: $I.S.=\emptyset$.
- $-x^2 \leq 0$ il primo membro è l'opposto del quadrato di un numero; poiché il quadrato è sempre positivo o nullo, la disequazione è verificata per qualunque numero reale: $I.S.=\mathbb{R}$.
- $\frac{1}{x}<0$ il primo membro è l'inverso di un numero reale; tale operazione ha significato per qualunque numero tranne che per 0, $\frac{1}{0}$ infatti è priva di significato. La frazione $\frac{1}{x}$ è negativa per qualunque valore negativo attribuito alla incognita: $I.S.=\{x \in \mathbb{R} \mid x<0\}=\mathbb{R}^{-}$.

In questo paragrafo affronteremo disequazioni in una sola incognita, che, dopo aver svolto eventuali calcoli nei due membri, avrà l'incognita al primo grado e i cui coefficienti sono numeri reali.
La forma più semplice o **forma canonica** di una disequazione di primo grado in una sola incognita a coefficienti reali è una delle seguenti $ax>b$; $ax<b$; $ax \geq b$; $ax \leq b$ con a e b numeri reali.
Per condurre una disequazione alla forma canonica e quindi per determinare il suo I.S. si procede applicando dei principi analoghi a quelli delle equazioni.
Premettiamo la seguente

DEFINIZIONE. Due disequazioni si dicono **equivalenti** se hanno lo stesso insieme delle soluzioni.

PRIMO PRINCIPIO. Addizionando o sottraendo a ciascuno dei due membri di una disequazione uno stesso numero o una stessa espressione (definita per qualunque valore attribuito all'incognita), si ottiene una disequazione equivalente alla data.

Regola pratica: questo principio ci permette di "spostare" un addendo da un membro all'altro cambiandogli segno o di "eliminare" da entrambi i membri gli addendi uguali.

SECONDO PRINCIPIO. Moltiplicando o dividendo ciascuno dei due membri di una disequazione per uno stesso numero positivo o per una stessa espressione (definita e positiva per qualunque valore attribuito alla variabile), si ottiene una disequazione equivalente alla data.

TERZO PRINCIPIO. Moltiplicando o dividendo ciascuno dei due membri di una disequazione per uno stesso numero negativo o per una stessa espressione (definita e negativa per qualunque valore attribuito alla variabile), si ottiene una disequazione equivalente alla data ma con il verso cambiato.

Esempi

■ $4\cdot(2x-1)+5>1-2\cdot(-3x-6)$

1° passo: eseguiamo i prodotti $8x-4+5>1+6x+12$

2° passo: spostiamo tutti termini con l'incognita nel primo membro e i termini noti nel secondo membro, cambiamo i segni quando passiamo da un membro all'altro: $8x-6x>1+12+4-5$

3° passo: sommando i termini simili si ottiene la forma canonica $2x>12$

4° passo: applichiamo il secondo principio dividendo ambo i membri per il coefficiente della x. E' Fondamentale a questo punto osservare che il coefficiente è 2, che è un numero positivo, pertanto non cambia il verso della disequazione $\frac{2}{2}x>\frac{12}{2} \rightarrow x>6$. Se viceversa il coefficiente dell'incognita fosse stato un numero negativo si sarebbe dovuto cambiare il verso della disequazione.

5° passo: scriviamo l'insieme delle soluzioni $I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid x>6\}=(6,+\infty)$ e rappresentiamo graficamente l'intervallo



■ $\frac{(x+1)^2}{4}-\frac{2+3x}{2}>\frac{(x-1)^2}{4}$

Il m.c.m. è 4 numero positivo, moltiplichiamo per 4 si ha $4\cdot\left\{\frac{(x+1)^2}{4}-\frac{2+3x}{2}\right\}>\frac{4\cdot(x-1)^2}{4}$

Semplificando $(x+1)^2-2\cdot(2+3x)>(x-1)^2$

Eseguiamo i prodotti $x^2+2x+1-4-6x>x^2-2x+1$

Eliminiamo dai due membri i termini uguali x^2 e 1, trasportiamo a sinistra i monomi con l'incognita e a destra i termini noti; infine sommiamo i monomi simili:

$\cancel{x^2}+2x+1-4-6x>\cancel{x^2}-2x+1 \rightarrow 2x+2x-6x>+4 \rightarrow -2x>4$

Il coefficiente dell'incognita è negativo, applicando il terzo principio dividiamo ambo i membri per -2 e cambiamo il verso della disuguaglianza: $\frac{-2}{-2}x<\frac{4}{-2} \rightarrow x<-2$

$I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid x<-2\}=(-\infty,-2)$



Giunti alla forma $-2x>4$ potevano trasportare a destra del segno di disuguaglianza il monomio con l'incognita e a sinistra mettere il termine noto; ovviamente per il primo principio spostando questi termini cambiano segno e otteniamo $-4>2x$. Il coefficiente dell'incognita è positivo dunque applichiamo il secondo principio dividendo per 2, abbiamo $\frac{-4}{2}>\frac{2}{2}x \rightarrow -2>x$, che letta da destra a sinistra dice che i valori da attribuire ad x per soddisfare la disequazione assegnata sono tutti i numeri reali minori di -2.

Vediamo qualche esempio in cui scompare l'incognita

■ $\frac{1}{2}\cdot(x+5)-x>\frac{1}{2}\cdot(3-x)$

Il m.c.m. è 2, positivo; moltiplichiamo ambo i membri per 2; svolgiamo i calcoli:

$2\cdot\left(\frac{1}{2}(x+5)-x\right)>2\cdot\left(\frac{1}{2}(3-x)\right) \rightarrow x+5-2x>3-x \rightarrow -x+5>3-x$

La forma canonica è $0\cdot x>-2$ che si riduce alla disuguaglianza $0>-2$ vera per qualunque x reale: $I.S.=\mathbb{R}$

■ $\frac{1}{2}\cdot(x+5)-x>\frac{1}{2}\cdot(3-x)$

Svolgiamo i calcoli ed eliminiamo i monomi simili: $x^2+4x+4-4x-4<x^2-1 \rightarrow 0\cdot x<-1$ che è la disuguaglianza $0<-1$ falsa per qualunque x reale: $I.S.=\emptyset$

200 Rappresenta graficamente l'insieme delle soluzioni delle seguenti disequazioni

$x-2>0 \quad x+5>0 \quad x-4>0 \quad x-5\geq 0 \quad x+3\leq 0 \quad x>0 \quad x\geq 0 \quad -1\leq x \quad 3>x$

Trova l'Insieme Soluzione delle seguenti disequazioni

201 $3-x>x$ $\quad I.S.=\left\{x<\frac{3}{2}\right\}$ $\quad 2x>3$ $\quad I.S.=\left\{x>\frac{3}{2}\right\}$

202 $3x\leq 4$ $\quad I.S.=\left\{x\leq\frac{4}{3}\right\}$ $\quad 5x\geq -4$ $\quad I.S.=\left\{x\geq -\frac{4}{5}\right\}$

203 $x^2+x^4+10>0$ $\quad I.S.=\mathbb{R}$ $\quad x^2+x^4+100<0$ $\quad I.S.=\emptyset$

204 $-x+3>0$ $\quad I.S.=\{x<3\}$ $\quad -x-3\leq 0$ $\quad I.S.=\{x\geq -3\}$

205 $3+2x\geq 3x+2$ $\quad I.S.=\{x\leq 1\}$ $\quad 5x-4\geq 6x-4$ $\quad I.S.=\{x\leq 0\}$

206 $-3x+2\geq -x-8$ $\quad I.S.=\{x\leq 5\}$ $\quad 4x+4\geq 2(2x+8)$ $\quad I.S.=\emptyset$

207 $4x+4\geq 2(2x+1)$ $\quad I.S.=\mathbb{R}$ $\quad 4x+4\geq 2(2x+2)$ $\quad I.S.=\mathbb{R}$

208 $4x+4<2(2x+3)$ $\quad I.S.=\emptyset$ $\quad 4x+4>2(2x+2)$ $\quad I.S.=\emptyset$

209 $4x+4<2(2x+2)$ $\quad I.S.=\emptyset$ $\quad x^2+4>3$ $\quad I.S.=\mathbb{R}$

210 $x^2+3<-1$ $\quad I.S.=\emptyset$ $\quad 4x+4\geq 3\left(x+\frac{4}{3}\right)$ $\quad I.S.=\{x\geq 0\}$

211 $-3x>0$ $\quad I.S.=\{x<0\}$ $\quad -3x\leq 0$ $\quad I.S.=\{x\geq 0\}$

212 $-3x+5\geq 0$ $\quad I.S.=\left\{x\leq\frac{5}{3}\right\}$ $\quad -3x-8\geq 0$ $\quad I.S.=\left\{x\leq -\frac{8}{3}\right\}$

213 $-3x-8\geq 2$ $\quad I.S.=\left\{x\leq -\frac{10}{3}\right\}$ $\quad -\frac{4}{3}x\geq 1$ $\quad I.S.=\left\{x\leq -\frac{3}{4}\right\}$

214 $-\frac{4}{3}x\geq 0$ $\quad I.S.=\{x\leq 0\}$ $\quad -\frac{4}{3}x\geq\frac{2}{3}$ $\quad I.S.=\left\{x\leq -\frac{1}{2}\right\}$

215 $-\frac{2}{3}x\leq\frac{1}{9}$ $\quad I.S.=\left\{x\geq -\frac{1}{6}\right\}$ $\quad -\frac{2}{3}x\leq 9$ $\quad I.S.=\left\{x\geq -\frac{27}{2}\right\}$

216 $\frac{x+5}{2}>-\frac{1}{5}$ $\quad x>-\frac{27}{5}$ $\quad \frac{1}{2}-\left(\frac{x}{2}-5\right)^2\leq\frac{(x-3)^2}{4}$ $\quad I.S.=\mathbb{R}$

217 $x+\frac{1}{2}<\frac{(x+3)}{3}-1$ $\quad I.S.=\left\{x<-\frac{3}{4}\right\}$ $\quad \frac{(x+5)}{3}+3+2\frac{(x-1)}{3}\leq x+4$ $\quad I.S.=\mathbb{R}$

218 $(x+3)^2\geq(x-2)(x+2)$ $\quad I.S.=\left\{x\geq -\frac{13}{6}\right\}$ $\quad \frac{3}{2}x+\frac{1}{4}<5\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}\right)$ $\quad I.S.=\left\{x>\frac{3}{2}\right\}$

219 $1-(2x-4)^2>-x\cdot(4x+1)+2$ $\quad I.S.=\{x>1\}$ $\quad (x+1)^2\geq(x-1)^2$ $\quad I.S.=\{x\geq 0\}$

220 $\frac{3}{2}\cdot(x+1)-\frac{1}{3}\cdot(1-x)<x+2$ $\quad I.S.=\{x\in\mathbb{R}\mid x<1\}=(-\infty,1)$

221 $\frac{x+0{,}25}{2}<1{,}75+0{,}25x$ $\quad I.S.=\left\{x<\frac{13}{2}\right\}$

222 $\frac{1}{2}\left(3x-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3}(1+x)(1-x)+3\left(\frac{1}{3}x-1\right)^2\geq 0$ $\quad I.S.=\mathbb{R}$

223 $3\frac{(x+1)}{2}-\frac{x+1}{3}-\frac{1}{9}>-5x+\frac{1}{2}$ $\quad I.S.=\left\{x>-\frac{10}{111}\right\}$

224 $\left(\frac{x}{2}-1\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)+x-\frac{1}{2}>x\frac{(x-1)}{4}+\frac{5x-6}{4}$ $\quad I.S.=\emptyset$

225 $\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}\left(x+\frac{1}{3}\right)>\frac{x-\frac{1}{2}}{3}+\frac{x-\frac{1}{3}}{2}$ $\quad I.S.=\mathbb{R}$

►8. Problemi con le disequazioni

Problema

Tariffe telefoniche

Sto analizzando due proposte di compagnie telefoniche per poi stipulare il contratto più conveniente per le mie esigenze. La compagnia T_1 prevede una spesa fissa di 5 centesimi di scatto alla risposta da sommare alla spesa di 1 centesimo per ogni minuto di telefonata. La compagnia T_2 non prevede spesa per lo scatto alla risposta, ma per ogni minuto di telefonata la spesa è di 2 centesimi. Dopo quanti minuti di telefonata la seconda tariffa è più conveniente della prima?

Indichiamo con x la durata in minuti di una telefonata e con t_1 e t_2 rispettivamente la spesa con la prima e la seconda compagnia:

$t_1=(5+1\cdot x)$ centesimi $\qquad$ $t_2=(2\cdot x)$ centesimi

t_2 sarà più conveniente di t_1 se $2\cdot x<5+x$

Il problema è formalizzato con una disequazione nell'incognita x, di primo grado. Dobbiamo trovare I.S.

Applicando il primo principio si ottiene: $2\cdot x-x<5 \ \rightarrow \ x<5 \ (min)$

Conclusione: se le mie telefonate durano meno di 5 minuti allora mi conviene il contratto con T_2 , altrimenti se faccio telefonate più lunghe di 5 minuti mi conviene T_1 . Le due tariffe sono uguali se la telefonata dura esattamente 5 minuti.

Problema

L'abbonamento

Su un tragitto ferroviario, il biglietto costa 8,25 euro. L'abbonamento mensile costa 67,30 euro. Qual è il numero minimo di viaggi che occorre effettuare in un mese perché l'abbonamento sia più conveniente?

Indichiamo con x il numero di viaggi. Il costo del biglietto di x viaggi è $8,25\cdot x$. L'abbonamento è più conveniente quando $8,25\cdot x>67,30$ da cui $x>\frac{67,30}{8,25}$ e quindi x>8,16. In conclusione se si fanno 8 viaggi in un mese conviene acquistare i biglietti singoli, da 9 viaggi in poi conviene l'abbonamento.

Risolvi i seguenti problemi con una disequazione

226 Sommando un numero con il doppio del suo successivo si deve ottenere un numero maggiore di 17. Quali numeri verificano questa condizione [x>5]

227 Sommando due numeri pari consecutivi si deve ottenere un numero che non supera la metà del numero più grande. Quali valori può assumere il primo numero pari? $[x \leq -2/3]$

228 Il noleggio di una automobile costa 55,00 € al giorno, più 0,085 € per ogni chilometro percorso. Qual è il massimo di chilometri da percorrere giornalmente, per spendere non più di 80,00 € al giorno? [massimo 294 km]

229 In una fabbrica, per produrre una certa merce, si ha una spesa fissa settimanale di 413 €, ed un costo di produzione di 2,00 € per ogni kg di merce. Sapendo che la merce viene venduta a 4,00 € al kg, determinare la quantità minima da produrre alla settimana perché l'impresa non sia in perdita.

230 Per telefonare in alcuni paesi esteri, una compagnia telefonica propone due alternative di contratto:

a) 1,20 € per il primo minuto di conversazione, 0,90 € per ogni minuto successivo;

b) 1,00 € per ogni minuto di conversazione.

Quanti minuti deve durare una telefonata perché convenga la seconda alternativa? [meno di 3 minuti]

231 Il prezzo di un abbonamento mensile ferroviario è di 125,00 €. Sapendo che il prezzo di un singolo biglietto sulla stessa tratta è di 9,50 €, trovare il numero minimo di viaggi per cui l'abbonamento mensile risulta conveniente, e rappresentare graficamente la soluzione. [14]

232 Al circolo tennis i soci pagano 12 € a ora di gioco, i non soci pagano 15€. Sapendo che la tessera annuale costa 150€, dopo quante partite all'anno conviene fare la tessera di socio?

233 In montagna l'abbonamento per due settimane allo skipass costa 220€ mentre il biglietto giornaliero costa 20€. Andando a sciare ogni giorno, dopo quanti giorni conviene fare l'abbonamento? [x>11]

234 Marco ha preso alle prime tre prove di matematica i seguenti voti: 5; 5,5; 4,5. Quanto deve prendere alla quarta e ultima prova per avere 6 di media? [9]

235 Per produrre un tipo di frullatore un'azienda ha dei costi fissi per 12.000€ a settimana e riesce a pro-durre 850 frullatori a settimana, ognuno dei quali ha un costo di produzione pari a 34€. L'azienda concor-rente riesce a vendere un frullatore analogo a 79€. A quanto devono essere venduti i frullatori in modo che l'azienda abbia un utile e che il prezzo di vendita non sia superiore a quello del prodotto concorrente?

236 Per noleggiare un'auto una compagnia propone un'auto di tipo citycar al costo di 0,20 € per km per-corso e una quota fissa giornaliera di 15,00 €, un'auto di tipo economy al costo di 0,15 € per km e una quota fissa giornaliera di 20,00€. Dovendo noleggiare l'auto per 3 giorni quanti km occorre fare perché sia più conveniente l'auto di tipo economy? [più di 300 km]

237 Alle 9.00 di mattina sono in autostrada e devo raggiungere una città che dista 740 km entro le 17.00 poiché ho un appuntamento di lavoro. Prevedendo una sosta di mezzora per mangiare un panino, a quale velocità devo viaggiare per arrivare in orario?

238 Quanto deve essere lungo il lato di un triangolo equilatero il cui perimetro deve superare di 900cm il perimetro di un triangolo equilatero che ha il lato di 10cm? [x>310cm]

239 I lati di un triangolo sono tali che il secondo è doppio del primo e il terzo è più lungo del secondo di 3cm. Se il perimetro deve essere compreso tra 10cm e 20cm, tra quali valori può variare il lato più piccolo? $\left[\frac{7}{5} cm < x < \frac{17}{5} cm\right]$

240 In un triangolo isoscele l'angolo alla base deve essere minore della metà dell'angolo al vertice. Tra quali valori deve essere compresa la misura dell'angolo alla base? $[0° < \alpha < 45°]$

241 Un trapezio rettangolo l'altezza che è il triplo della base minore, mentre la base maggiore è 5 volte la base minore. Se il perimetro del trapezio non deve superare i 100m, quali valori può assumere la lun-ghezza dell'altezza del trapezio? $\left[h \leq \frac{150}{7} m\right]$

242 Un rettangolo ha le dimensioni una doppia dell'altra. Si sa che il perimetro non deve superare 600m e che l'area non deve essere inferiore a 200m2. Tra quali valori possono variare le dimensioni del rettangolo? [Il lato minore tra 10m e 100m, il lato maggiore tra 20m e 200m]

►9. Sistemi di disequazioni

In alcune situazioni occorre risolvere contemporaneamente più disequazioni. Vediamo alcuni problemi.

Problema

Il doppio di un numero reale positivo diminuito di 1 non supera la sua metà aumentata di 2. Qual è il numero?

Incognita del problema è il numero reale che indichiamo con x. Di esso sappiamo che deve essere positivo, quindi $x>0$ e che deve verificare la condizione $2x-1\le\frac{1}{2}x+2$. Le due disequazioni devono verificarsi contemporaneamente.

Il problema può essere formalizzato con un **sistema di disequazioni:** $\begin{cases}x>0\\2x-1\le\frac{1}{2}x+2\end{cases}$.

Risolvere un sistema di disequazioni significa trovare l'insieme dei numeri reali che sono soluzioni comuni alle due disequazioni, cioè che le verificano entrambe.

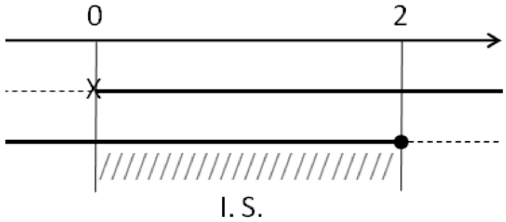
Se indichiamo con $I.S._1$ e $I.S._2$ rispettivamente gli insiemi soluzione della prima e della seconda disequazione, l'insieme soluzione del sistema è dato dall'intersezione $I.S.=I.S._1\cap I.S._2$.

Risolviamo separatamente le due disequazioni per determinare i due insiemi delle soluzioni.

D1: $x>0 \rightarrow I.S._1=\{x\in\mathbb{R}\mid x>0\}$

D2: $4x-2\le x+4 \rightarrow 3x\le 6 \rightarrow I.S._2=\{x\in\mathbb{R}\mid x\le 2\}$

Dobbiamo ora determinare $I.S.=I.S._1\cap I.S._2$.

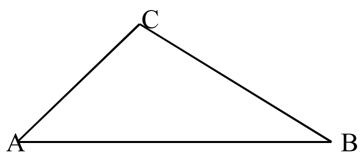


Questa ricerca può essere facilitata rappresentando graficamente i due intervalli in uno stesso schema. Disegniamo l'asse dei numeri reali r e su esso indichiamo i numeri che entrano in gioco, lo 0 e il 2. Disegniamo una prima linea dove rappresentiamo con una linea spessa I.S.$_1$, disegniamo una seconda linea dove rappresentiamo con una linea più spessa I.S.2.

Su una terza linea rappresentiamo l'insieme degli elementi comuni a I.S.$_1$ e I.S.$_2$, che è appunto l' insieme delle soluzioni del sistema di disequazioni. Non ci rimane che descrivere l'intervallo delle soluzioni in forma insiemistica $I.S.=\{x\in\mathbb{R}\mid 0<x\le 2\}=(0,2]$.

Problema

In un triangolo il lato maggiore misura 13m, gli altri due lati differiscono tra di loro di 2m. Come si deve scegliere il lato minore affinché il perimetro non superi 100m?



Dati: $\overline{AB}=13\text{m}$, $\overline{BC}-\overline{AC}=2\text{m}$

Riferendoci alla figura, AC è il lato minore; indichiamo con x la sua misura.

Obiettivo: determinare x in modo che $2p\le 100$

Soluzione:

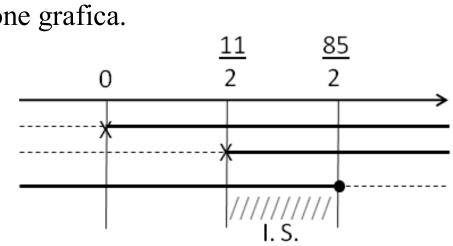
$\overline{AC}=x$; $\overline{BC}=2+x$; $\overline{AB}=13$ con $x>0$

L'obiettivo in linguaggio matematico si scrive: $x+(2+x)+13\le 100$

Per la "disuguaglianza triangolare" si deve avere $13<x+(2+x)$. Il problema è formalizzato dal sistema:

$\begin{cases}x>0\\x+(x+2)+13\le 100\\13<x+(x+2)\end{cases}$ risolvendo ciascuna disequazione si ottiene $\begin{cases}x>0\\x\le\frac{85}{2}\\x>\frac{11}{2}\end{cases}$;

determiniamo l'insieme soluzione aiutandoci con una rappresentazione grafica.



Risposta: affinché il perimetro non superi 100m la misura in metri del lato minore deve essere un numero dell'insieme

$I.S.=\left\{x\in\mathbb{R}\mid\frac{11}{2}<x\le\frac{85}{2}\right\}$

Risolviamo delle disequazioni più articolate nel calcolo algebrico.

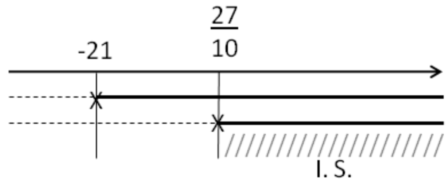
Esempi

■ $\begin{cases} x > \dfrac{2x-11}{8} + \dfrac{19-2x}{4} \\ \dfrac{1}{5}(x+1) > \dfrac{x}{3} - \dfrac{15+2x}{9} \end{cases}$

Risolviamo separatamente le due disequazioni:

$d_1:\ 8x > 2x-11+38-4x \ \rightarrow\ 10x > 27 \ \rightarrow\ x > \dfrac{27}{10} \ \rightarrow\ I.S._1 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \dfrac{27}{10}\right\}$

$d_2:\ 9x+9 > 15x-75-10x \ \rightarrow\ 4x > -84 \ \rightarrow\ x > -21 \ \rightarrow\ I.S._2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -21\}$



Rappresentiamo graficamente le soluzioni e determiniamo $I.S. = I.S._1 \cap I.S._2$

$I.S. = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \dfrac{27}{10}\right\}$

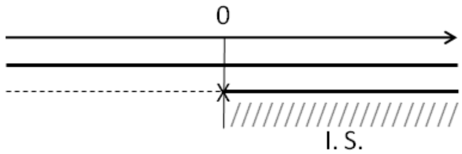
■ $\begin{cases} 2\cdot(x+1)+(-2)^2\cdot x > 3\cdot(2x-3) \\ \dfrac{(x-3)^2}{4} - \dfrac{(2x-1)^2}{16} < \dfrac{35}{16} \end{cases}$

Risolviamo separatamente le due disequazioni:

$D_1:\ 2x+2+4x > 6x-9 \ \rightarrow\ 0x > -11 \ \rightarrow\ I.S._1 = \mathbb{R}$

$D_2:\ 4x^2+36-24x-4x^2-1+4x-35 < 0 \ \rightarrow\ -20x < 0 \ \rightarrow\ x > 0 \ \rightarrow\ I.S._2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

Determiniamo $I.S. = I.S._1 \cap I.S._2$



$I.S. = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

■ $\begin{cases} (x-2)\cdot(x+3) \geq x+(x-1)\cdot(x+1) \\ (x-1)^3 \leq x^2\cdot(x-3)+2\left(-\dfrac{1}{2}x+1\right) \end{cases}$

Risolviamo separatamente le disequazioni: $D_1:\ x^2-2x+3x-6 > x+x^2-1 \ \rightarrow\ 0x \geq 5 \ \rightarrow\ I.S._1 = \emptyset$

Poiché la prima equazione non ha soluzioni non avrà soluzioni nemmeno il sistema. E' superfluo quindi risolvere la seconda disequazione. La risolviamo per esercizio.

$D_2:\ x^3-3x^2+3x-1 \leq x^3-3x^2-x+2 \ \rightarrow\ 4x \leq 3 \ \rightarrow\ x \leq \dfrac{3}{4} \ \rightarrow\ I.S._2 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \dfrac{3}{4}\right\}$

$I.S. = I.S._1 \cap I.S._2 = \emptyset \cap I.S._2 = \emptyset$

■ $\begin{cases} \dfrac{1}{3}\cdot\left(x-\dfrac{1}{2}\right)-\dfrac{1}{2}\cdot\left(x-\dfrac{1}{3}\right) \leq \dfrac{1}{6} \\ x+1 \leq \dfrac{2x-1}{3}+\dfrac{1-2x}{4} \end{cases}$

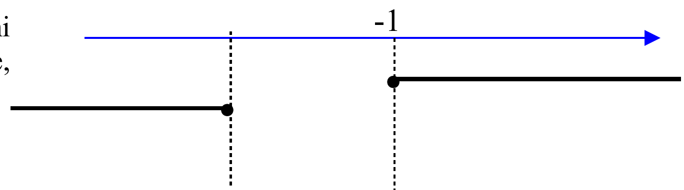
Risolviamo separatamente le due disequazioni:

$D_1:\ \dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{2}x \leq \dfrac{1}{6} \ \rightarrow\ 2x-3x \leq 1 \ \rightarrow\ x \geq -1 \ \rightarrow\ I.S._1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$

$D_2:\ 12x+12 \leq 8x-4+3-6x \ \rightarrow\ 10x \leq -13 \ \rightarrow\ x \leq -\dfrac{13}{10} \ \rightarrow\ I.S._2 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\dfrac{13}{10}\right\}$

Rappresentiamo le soluzioni e determiniamo $I.S. = I.S._1 \cap I.S._2$.

Il grafico mette in evidenza che i due insiemi soluzione non hanno elementi in comune, pertanto $I.S. = \emptyset$



243 Sulla retta reale rappresenta l'insieme soluzione S_1 dell'equazione:
$\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\cdot(5x+3)=2+\frac{2}{3}\cdot(x+1)$ e l'insieme soluzione S_2 della disequazione:
$\frac{1}{2}-2\cdot\left(\frac{1-x}{4}\right)\geq 3-\frac{6-2x}{3}-\frac{x}{2}$. È vero che $S_1 \subset S_2$?

244 Determina i numeri reali che verificano il sistema: $\begin{cases} x^2 \leq 0 \\ 2-3x \geq 0 \end{cases}$ [x = 0]

245 L'insieme soluzione del sistema: $\begin{cases} (x+3)^3-(x+3)\cdot(9x-2)>x^3+27 \\ \frac{x+5}{3}+3+\frac{2\cdot(x-1)}{3}<x+1 \end{cases}$ è:

A) $\{x \in \mathbb{R} \mid x>3\}$ B) $\{x \in \mathbb{R} \mid x>-3\}$ C) $\{x \in \mathbb{R} \mid x<-3\}$ D) $I.S.=\emptyset$ E) $\{x \in \mathbb{R} \mid x<3\}$

246 Attribuire il valore di verità alle seguenti proposizioni

a) Il quadrato di un numero reale è sempre positivo V F

b) L'insieme complementare di $A=\{x \in \mathbb{R} \mid x>-8\}$ *è* $B=\{x \in \mathbb{R} \mid x<-8\}$ V F

c) Il monomio $-6x^3y^2$ assume valore positivo per tutte le coppie dell'insieme $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ V F

d) Nell'insieme $\mathbb{Z}$ degli interi relativi il sistema $\begin{cases} x+1>0 \\ 8x<0 \end{cases}$ non ha soluzione V F

e) L'intervallo $\left[-1,-\frac{1}{2}\right)$ rappresenta l'I.S. del sistema $\begin{cases} 1+2x<0 \\ \frac{x+3}{2}\leq x+1 \end{cases}$ V F

Risolvi i seguenti sistemi di disequazioni

247 $\begin{cases} 3-x>x \\ 2x>3 \end{cases}$ $\emptyset$ $\begin{cases} 3x\le 4 \\ 5x\ge -4 \end{cases}$ $-\frac{4}{5}\le x\le \frac{4}{3}$

248 $\begin{cases} 2x>3 \\ 3x\le 4 \end{cases}$ $\emptyset$ $\begin{cases} 3x-5<2 \\ x+7<-2x \end{cases}$ $x<-\frac{7}{3}$

249 $\begin{cases} 3-x\ge x-3 \\ -x+3\ge 0 \end{cases}$ $x\le 3$ $\begin{cases} -x-3\le 3 \\ 3+2x\ge 3x+2 \end{cases}$ $-6\le x\le 1$

250 $\begin{cases} 2x-1>2x \\ 3x+3\le 3 \end{cases}$ $\emptyset$ $\begin{cases} 2x+2<2x+3 \\ 2(x+3)>2x+5 \end{cases}$ $\mathbb{R}$

251 $\begin{cases} -3x>0 \\ -3x+5\ge 0 \\ -3x\ge -2x \end{cases}$ $x<0$ $\begin{cases} 3+2x>3x+2 \\ 5x-4\le 6x-4 \\ -3x+2\ge -x-8 \end{cases}$ $0\le x<1$

252 $\begin{cases} -\frac{4}{3}x\ge \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3}x\le \frac{1}{9} \end{cases}$ $\emptyset$ $\begin{cases} 4x+4\ge 3\cdot\left(x+\frac{4}{3}\right) \\ 4x+4\ge 2\cdot(2x+2) \end{cases}$ $x\ge 0$

253 $\begin{cases} 3(x-1)<2(x+1) \\ x-\frac{1}{2}+\frac{x+1}{2}>0 \end{cases}$ $0<x<5$ $\begin{cases} x+\frac{1}{2}<\frac{1}{3}(x+3)-1 \\ (x+3)^2\ge (x-2)(x+2) \end{cases}$ $-\frac{13}{6}\le x<-\frac{3}{4}$

254 $\begin{cases} \frac{1}{2}-(x+5)^2\le \frac{(x-3)^2}{4} \\ \frac{x+5}{3}+3+2\cdot\frac{x-1}{3}\le x+4 \end{cases}$ $\mathbb{R}$ $\begin{cases} \frac{2x+3}{3}>x-1 \\ \frac{x-4}{5}<\frac{2x+1}{3} \end{cases}$ $-\frac{17}{7}<x<6$

255 $\begin{cases} 2\left(x-\frac{1}{3}\right)+x>3x-2 \\ \frac{x}{3}-\frac{1}{2}\ge \frac{x}{4}-\frac{x}{6} \end{cases}$ $x\ge 2$

256 $\begin{cases} \frac{3}{2}x+\frac{1}{4}<5\cdot\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}\right) \\ \frac{1}{2}\cdot\left(3x-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3}(1+x)(1-x)+3\left(\frac{1}{3}x-1\right)^2\ge 0 \end{cases}$ $x>\frac{3}{2}$

257 $\begin{cases} 3\left(x-\frac{4}{3}\right)+\frac{2-x}{3}+x-\frac{x-1}{3}>0 \\ \left[1-\frac{1}{6}(2x+1)\right]+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2<(x+1)^2+\frac{1}{3}(1+2x) \end{cases}$ $x>\frac{9}{10}$

258 $\begin{cases} \left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)>\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 \\ 2\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)<\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 \end{cases}$ $x>\frac{1}{2}$

►10. Disequazioni polinomiali di grado superiore al primo

Problema

Vogliamo determinare i valori di x che rendono il polinomio $p=(3x-7)(2-x)$ positivo.
Il problema chiede di determinare l'insieme delle soluzione della disequazione di secondo grado $(3x-7)(2-x)>0$. La disequazione si presenta nella forma di prodotto di due fattori di primo grado e proprio la sua forma di prodotto ci faciliterà la risposta al quesito.
Sappiamo che nell'insieme dei numeri relativi il segno del prodotto di due fattori segue la regola dei segni visualizzata dalla tabella a lato: "il segno di un prodotto è positivo se i due fattori sono concordi". Questo fatto si traduce nei due metodi risolutivi del problema proposto.

×	+	−
+	+	−
−	−	+

Metodo 1: impostiamo due sistemi di disequazioni, formalizzando l'osservazione precedente

$$\begin{cases}3x-7>0\\2-x>0\end{cases}\vee\begin{cases}3x-7<0\\2-x<0\end{cases}$$

Risolvendo i due sistemi e unendo le loro soluzioni otteniamo l'insieme delle soluzioni della disequazione originaria: $I.S.=I.S._1\cup I.S._2$

$$IS_1:\begin{cases}3x-7>0\\2-x>0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x>\frac{7}{3}\\x<2\end{cases}\rightarrow IS_1=\emptyset \quad IS_2:\begin{cases}3x-7<0\\2-x<0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x<\frac{7}{3}\\x>2\end{cases}\rightarrow IS_2=\left\{x\in\mathbb{R}\mid 2<x<\frac{7}{3}\right\}$$

quindi $I.S.=I.S._1\cup I.S._2=\left\{x\in\mathbb{R}\mid 2<x<\frac{7}{3}\right\}$

Mediante il metodo appena esposto risolvi le seguenti disequazioni

259 $(x+3)\cdot\left(\frac{1}{5}x+\frac{3}{2}\right)<0$ $\quad\left(-\frac{6}{11}+2x\right)\cdot\left(-x+\frac{9}{2}\right)$

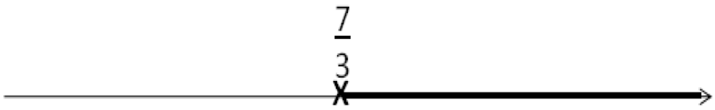
260 $\left(x+\frac{3}{2}\right)\cdot\left(5x+\frac{1}{5}\right)<0$ $\quad\left(-\frac{1}{10}x+2\right)\cdot(-3x+9)\geq 0$

Il metodo illustrato nel caso precedente si complica se il prodotto ha più di due fattori. Prova infatti ad applicarlo alla seguente disequazione

261 $(x-3)\cdot(2x-9)\cdot(4-5x)>0$

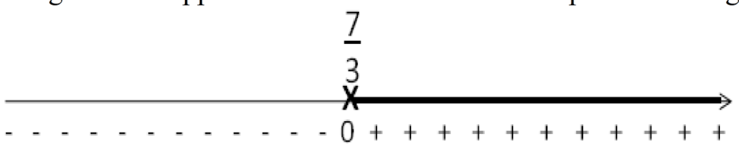
Metodo 2: Torniamo alla disequazione iniziale $(3x-7)(2-x)>0$ e applichiamo un altro metodo.
Osserviamo che quando risolviamo la disequazione $3x-7>0$ determiniamo l'insieme dei valori che attribuiti alla variabile rendono il polinomio $p=3x-7$ positivo, precisamente sono i valori $x>\frac{7}{3}$

Rappresentiamo l'I.S. con una semiretta in grassetto come in figura



In realtà, nel grafico sono contenute tutte le informazioni sul segno del polinomio:

- la semiretta in grassetto rappresenta i valori che rendono il polinomio positivo;
- il valore x = 2 è quello che annulla il polinomio;
- la semiretta non in grassetto rappresenta i valori che rendono il polinomio negativo.



Esempio

■ $(3x-7)\cdot(2-x)>0$

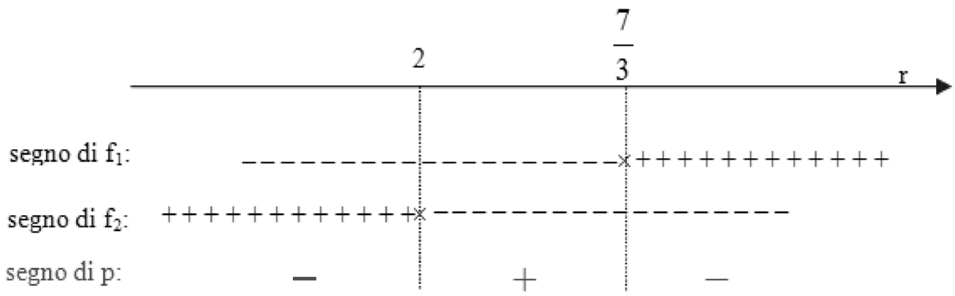
La disequazione equivale a determinare i valori che attribuiti alla variabile x rendono positivo il polinomio $p=(3x-7)\cdot(2-x)$.

Studiamo separatamente il segno dei due fattori:

F_1: $3x-7>0 \rightarrow x>\frac{7}{3}$

F_2: $2-x>0 \rightarrow x<2$

Per risolvere la disequazione iniziale ci è di particolare aiuto un grafico che sintetizzi la situazione. Applicando poi la regola dei segni otteniamo il segno del polinomio $p=(3x-7)\cdot(2-x)$.



Ricordiamo che la disequazione che stiamo risolvendo $(3x-7)\cdot(2-x)>0$ è verificata quando il polinomio $p=(3x-7)\cdot(2-x)$ è positivo, cioè nell'intervallo in cui abbiamo ottenuto il segno "+".

Possiamo concludere $I.S.=\left\{x\in\mathbb{R} \mid 2<x<\frac{7}{3}\right\}$.

■ $(x-3)\cdot(2x-9)\cdot(4-5x)>0$

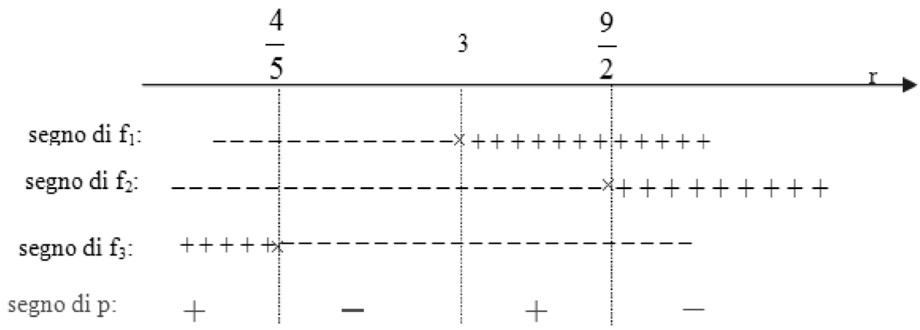
Determiniamo il segno di ciascuno dei suoi tre fattori:

$F_1: x-3>0 \rightarrow x>3$

$F_2: 2x-9>0 \rightarrow x>\frac{9}{2}$

$F_3: 4-5x>0 \rightarrow x<\frac{4}{5}$

Costruiamo la tabella dei segni:



La disequazione è verificata negli intervalli dove è presente il segno "+"

$I.S.=\left\{x\in\mathbb{R} \mid x<\frac{4}{5} \vee 3<x<\frac{9}{2}\right\}$.

Esempio

■ $4x^3+4x^2 \leq 1+x$

La disequazione è di terzo grado; trasportiamo al primo membro tutti i monomi:

$4x^3+4x^2-1-x \leq 0$

Possiamo risolverla se riusciamo a scomporre in fattori di primo grado il polinomio al primo membro: ù

$4x^3+4x^2-1-x \leq 0 \ \rightarrow \ 4x^2(x+1)-(x+1) \leq 0 \ \rightarrow \ (x+1)(2x-1)(2x+1) \leq 0$

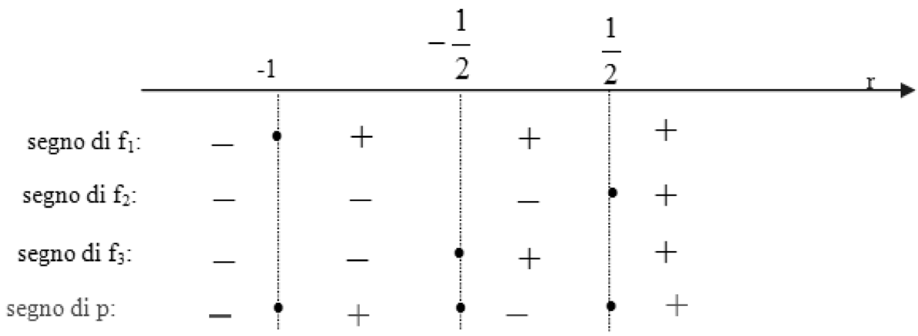
Studiamo ora il segno di ciascun fattore, tenendo conto che sono richiesti anche i valori che annullano ogni singolo fattore (legge di annullamento del prodotto):

$F_1 : x+1 \geq 0 \ \rightarrow \ x \geq -1$

$F_2 : 2x-1 \geq 0 \ \rightarrow \ x \geq \frac{1}{2}$

$F_3 : 2x+1 \geq 0 \ \rightarrow \ x \geq -\frac{1}{2}$

Possiamo ora costruire la tabella dei segni



Ricordiamo che la disequazione di partenza $4x^3+4x^2 \leq 1+x$ è verificata dove compare il segno “-”:

$I.S. = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \ \ oppure \ -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \right\}$

Procedura per determinare I.S. Di una disequazione polinomiale di grado superiore al primo
- scrivere la disequazione nella forma p≤0, p≥0, p<0, p>0;
- scomporre in fattori irriducibili il polinomio;
- determinare il segno di ciascun fattore, ponendolo sempre maggiore di zero, o maggiore uguale a zero a seconda della richiesta del problema;
- si costruisce la tabella dei segni, segnando con un punto ingrossato gli zeri del polinomio;
- si determinano gli intervalli in cui il polinomio assume il segno richiesto

Trovare l'Insieme Soluzione delle seguenti disequazioni

262 $(x+2)(3-x)\le 0$ $\quad x\le -2\vee x\ge 3$

263 $x(x-2)>0$ $\quad x<0\vee x>2$

264 $(3x+2)(2-3x)<0$ $\quad x<-\frac{2}{3}\vee x>\frac{2}{3}$

265 $-3x(2-x)(3-x)\ge 0$ $\quad x\ge 0\vee 2\le x\le 3$

266 $(x+1)(1-x)\left(\frac{1}{2}x-2\right)\ge 0$ $\quad x\le 4$

267 $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)<0$ $\quad 1<x<2\vee 3<x<4$

268 $x^2-16\le 0$ $\quad -4\le x\le 4$

269 $4x^2-2x<0$ $\quad 0<x<\frac{1}{2}$

270 $x^4-81\ge 0$ $\quad x\le -3\vee x\ge 3$

271 $x^2+17x+16\le 0$ $\quad -16\le x\le -1$

272 $16-x^4\le 0$ $\quad x\le -2\vee x\ge 2$

273 $x^2+2x+1<0$ $\quad \emptyset$

274 $x^2+6x+9\ge 0$ $\quad \mathbb{R}$

275 $x^2-5x+6<0$ $\quad 2<x<3$

276 $x^2+3x-4\le 0$ $\quad -4\le x\le 1$

277 $x^3>x^2$ $\quad x>1$

278 $x^2(2x^2-x)-(2x^2-x)<0$ $\quad -1<x<0\vee \frac{1}{2}<x<1$

279 $x^2-2x+1+x(x^2-2x+1)<0$ $\quad x<-1$

280 $x^3-2x^2-x+2\ge 0$ $\quad -1\le x\le 1\vee x\ge 2$

281 $x^4+4x^3+3x^2>0$ $\quad x<-3\vee x>-1\wedge x\ne 0$

282 $(6x^2-24x)(x^2-6x+9)<0$ $\quad 0<x<4\wedge x\ne 3$

283 $(x^3-8)(x+2)<(2-x)(x^3+8)$ $\quad -2<x<2$

284 $(2a+1)(a^4-2a^2+1)<0$ $\quad a<-\frac{1}{2}\wedge a\ne -1$

285 $x^3-6x^2+11>1-3x$ $\quad -1<x<2\vee x>5$

286 $x^6-x^2+x^5-6x^4-x+6<0$ $\quad -3<x<-1\vee 1<x<2$

287 Determinare i valori che attribuiti alla variabile y rendono positivi entrambi i polinomi seguenti
$p_1=y^4-13y^2+36;\quad p_2=y^3-y^2-4y+4$ $\quad -2<y<1\vee y>3$

288 Determinare i valori di a che rendono $p=a^2+1$ minore di 5. $-2<a<2$

Determina I.S. dei seguenti sistemi di disequazioni:

289 $\begin{cases}x^2-9\ge 0\\ x^2-7x+10<0\end{cases}$ $\quad 3\le x<5$ $\qquad \begin{cases}x^2+3x-12\ge 0\\ 12x^2+12x+3>0\end{cases}$ $\quad x\le -6\vee x\ge 3$

290 $\begin{cases}49a^2-1\ge 0\\ 9a^2<1\\ 1-a>0\end{cases}$ $\quad -\frac{1}{3}<a\le -\frac{1}{7}\vee \frac{1}{7}\le a<\frac{1}{3}$

291 $\begin{cases}16x^4-1<0\\ 16x^3+8x^2\ge 0\end{cases}$ $\quad -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$

292 $\begin{cases}2x^2-13x+6<0\\ (2x^2-5x-3)(1-3x)>0\\ x^2+7>1\end{cases}$ $\quad -6<x<-\frac{1}{2}$

►11. Disequazioni frazionarie

Un'espressione contenente operazioni tra frazioni algebriche ha come risultato una frazione algebrica. Con la condizione di esistenza che il denominatore della frazione sia diversa da zero la ricerca del segno di una frazione algebrica viene effettuata con la stessa procedura seguita per il prodotto di due o più fattori.

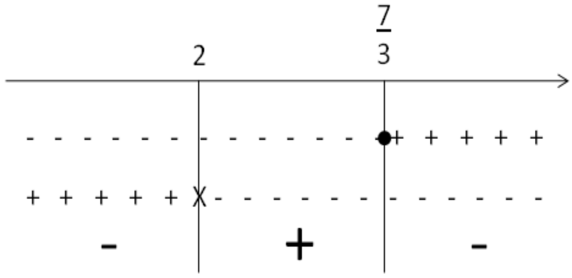
Esempio

■ $\frac{3x-7}{2-x} \geq 0$

Poniamo innanzi tutto la C.E. $2-x \neq 0$ cioè $x \neq 2$ e procediamo studiando il segno del numeratore e del denominatore. Terremo conto della C.E. Ponendo il denominatore semplicemente maggiore di zero e non maggiore uguale.

$N \geq 0 \ \rightarrow \ 3x-7 \geq 0 \ \rightarrow \ x \geq \frac{7}{3}$

$D > 0 \ \rightarrow \ 2-x > 0 \ \rightarrow \ x < 2$



Analogamente a quanto fatto per il prodotto, dalla tabella dei segni otteniamo $I.S. = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq \frac{7}{3} \right\}$ in cui vediamo già compresa la C.E. che inizialmente avevamo posto.

Procedura per determinare I.S. di una disequazione frazionaria
- applicare il primo principio e trasportare tutti i termini al primo membro;
- eseguire i calcoli dell'espressione al primo membro per arrivare a una disequazione nella forma

$$\left[\frac{N(x)}{D(x)} > 0\right] \textbf{ oppure } \left[\frac{N(x)}{D(x)} \geq 0\right] \textbf{ oppure } \left[\frac{N(x)}{D(x)} < 0\right] \textbf{ oppure } \left[\frac{N(x)}{D(x)} \leq 0\right]$$

- studiare il segno del numeratore e del denominatore, ponendo N(x)>0 (oppure N(x)≥0 a secondo della richiesta) e D(x)>0;
- costruire la tabella dei segni, segnando con un punto in grassetto gli zeri del numeratore;
- determinare gli intervalli in cui il polinomio assume il segno richiesto.

Esempio

■ $\frac{x-1}{2x+2} + \frac{2x+1}{4x-2} > \frac{4x^2(2x+1)+1}{8x^3+8x^2-2x-2}$

Trasportiamo tutti i termini al primo membro $\frac{x-1}{2x+2} + \frac{2x+1}{4x-2} - \frac{4x^2(2x+1)+1}{8x^3+8x^2-2x-2} > 0$

Scomponiamo in fattori i denominatori, determiniamo il minimo comune multiplo e sommiamo le frazioni per arrivare alla forma $\frac{N(x)}{D(x)} > 0$:

$$\frac{x-1}{2(x+1)} + \frac{2x+1}{2(2x-1)} - \frac{4x^2(2x+1)+1}{2(x+1)(2x-1)(2x+1)} > 0$$

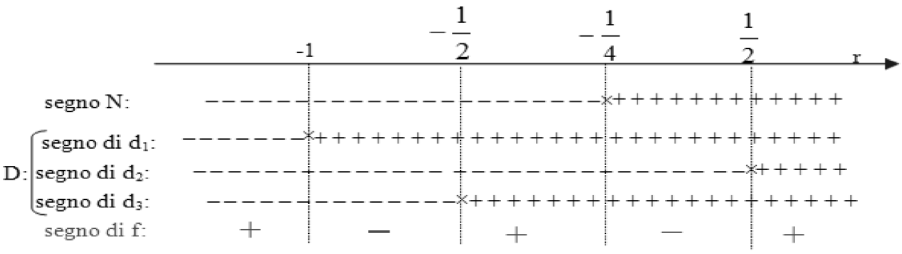
$$\frac{(x-1)(2x-1)(2x+1)+(2x+1)(2x+1)(x+1)-4x^2(2x+1)+1}{2(x+1)(2x-1)(2x+1)} > 0$$

$$\frac{4x+1}{2(x+1)(2x-1)(2x+1)} > 0 \quad (*)$$

Studiamo separatamente il segno di tutti i fattori che compaiono nella frazione, sia quelli al numeratore sia quelli al denominatore e costruiamo la tabella dei segni:

$N > 0 \rightarrow 4x+1 > 0 \rightarrow x > -\frac{1}{4}$

$$D > 0 \begin{cases} x+1 > 0 \rightarrow x > -1 \\ 2x-1 > 0 \rightarrow x > \frac{1}{2} \\ 2x+1 > 0 \rightarrow x > -\frac{1}{2} \end{cases}$$



Non abbiamo posto le C.E. in quanto già rispettate dalle disequazioni del denominatore.

Prendiamo gli intervalli in cui il segno della frazione è positivo come richiesto dalla disequazione (*):

$$I.S.=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x<-1\vee-\frac{1}{2}<x<-\frac{1}{4}\vee x>\frac{1}{2}\right\}$$

Esempio

■ $\frac{x}{2}-\frac{2}{3}\cdot\frac{2x-3}{x-1}+\frac{10x-3}{6x-6}\leq\frac{3}{2}\cdot\frac{x^2+2}{3x-2}$

Trasportiamo tutti i termini al primo membro : $\frac{x}{2}-\frac{2}{3}\cdot\frac{2x-3}{x-1}+\frac{10x-3}{6x-6}-\frac{3}{2}\cdot\frac{x^2+2}{3x-2}\leq 0$

Eseguiamo le operazioni per semplificare la frazione e ridurla alla forma $\frac{N(x)}{D(x)}\leq 0$:

$$\frac{x}{2}-\frac{4x-6}{3(x-1)}+\frac{10x-3}{6(x-1)}-\frac{3x^2+6}{2(3x-2)}-\frac{1}{3(x-1)(3x-2)}\leq 0$$

$$\frac{3x(x-1)(3x-2)-2(4x-6)(3x-2)+(10x-3)(3x-2)-3(3x^2+6)(x-1)-2}{6(x-1)(3x-2)}\leq 0$$

$$\frac{11x-2}{6(x-1)(3x-2)}\leq 0 \quad (*)$$

Studiamo il segno del numeratore e dei fattori del denominatore

$N\geq 0 \rightarrow 11x-2\geq 0 \rightarrow x\geq\frac{2}{11}$

$D>0\rightarrow\begin{cases}d_1>0\rightarrow x-1>0\rightarrow x>1\\ d_2>0\rightarrow 3x-2>0\rightarrow x>\frac{2}{3}\end{cases}$

		$\frac{2}{11}$		$\frac{2}{3}$		1		r
segno N:	−	•	+		+		+	
D segno d_1:	−		−		−	×	+	
D segno d_2:	−		−	×	+		+	
segno f:	−		+		−		+	

Non abbiamo posto le C.E. in quanto già rispettate dalle disequazioni del denominatore.
Prendiamo gli intervalli in cui il segno della frazione è positivo o nullo come dalla disequazione (*):

$$I.S.=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x\leq\frac{2}{11}\vee\frac{2}{3}<x<1\right\}$$

293 Studia il segno della frazione $f=\frac{x^3+11x^2+35x+25}{x^2-25}$.

Traccia di svolgimento
Scomponi in fattori numeratore e denominatore, otterrai

$$f=\frac{(x+5)^2(x+1)}{(x+5)(x-5)}$$

Poniamo le C.E. e semplifica la frazione: … … … …
Studia separatamente il segno di tutti i fattori che vi compaiono. Verifica che la tabella dei segni sia:

		-5		-1		5		r
N: segno n_1:	−	×	+		+		+	
N: segno n_2:	−		−	•	+		+	
segno D:	−		−		−	×	+	
segno f:	−		+		−		+	

Risposta
La frazione assegnata, con la $C.E.\ x\neq-5\ e\ x\neq 5$, si annulla se $x=-1$; è positiva nell'insieme $I^+=\{x\in\mathbb{R}\mid -5<x<-1\vee x>5\}$, è negativa in $I^-=\{x\in\mathbb{R}\mid x<-5\vee -1<x<5\}$.

Determinate I.S. delle seguenti disequazioni fratte:

294 $\frac{x-2}{3x-9}>0$ $\quad x<2 \vee x>3$ $\qquad \frac{3x+12}{(x-4)(6-3x)}\geqslant 0$ $\quad x\leq -4 \vee 2<x<4$

295 $\frac{x+2}{x-1}<2$ $\quad x<1 \vee x>4$ $\qquad \frac{4-3x}{6-5x}\geqslant -3$ $\quad x<\frac{6}{5} \vee x\geq \frac{11}{9}$

296 $\frac{x+8}{x-2}\geq 0$ $\quad x\leq -8 \vee x>2$ $\qquad \frac{3x+4}{x^2+1}\geq 2$ $\quad -\frac{1}{2}\leq x\leq 2$

297 $\frac{4}{x+4}+\frac{2}{x-3}\leqslant 0$ $\quad x<-4 \ \vee \ \frac{2}{3}\leq x<3$ $\qquad \frac{7}{x+3}-\frac{6}{x+9}\geqslant 0$ $\quad -45\leq x<-9 \ \vee \ x>-3$

298 $\frac{3}{2-x}\leqslant \frac{1}{x-4}$ $\quad 2<x\leq \frac{7}{2} \ \vee \ x>4$ $\qquad \frac{2}{x-2}>\frac{2x-2}{(x-2)(x+3)}$ $\quad x<-3 \ \vee \ x>2$

299 $\frac{x-3}{x^2-4x+4}-1<\frac{3x-3}{6-3x}$ $\qquad x<2 \vee 2<x<\frac{5}{2}$

300 $\frac{2}{4x-16}<\frac{2-6x}{x^2-8x+16}$ $\qquad I.S.=\left\{x\in \mathbb{R} \mid x<\frac{8}{13}\right\}$

301 $\frac{5}{2x+6}\geqslant \frac{5x+4}{x^2+6x+9}$ $\qquad I.S.=\left\{x\in \mathbb{R} \mid x<-3 \ \vee \ -3<x\leq \frac{7}{5}\right\}$

302 $\frac{(x+3)(10x-5)}{x-2}<0$ $\qquad I.S.=\left\{x\in \mathbb{R} \mid x<-3 \ \vee \ \frac{1}{2}<x<2\right\}$

303 $\frac{x}{x+1}-\frac{1}{x^3+1}\leq 0$ $\qquad -1<x\leq 1$

304 $\frac{4-3x}{x-2}<\frac{3x+1}{x-2}$ $\qquad x<\frac{1}{2} \vee x>2$

305 $\frac{5x-4}{3x-12}\geq \frac{x-4}{4-x}$ $\qquad x\leq 2 \vee x>4$

306 $\frac{2-x}{5x-15}\leq \frac{5x-1}{2x-6}$ $\qquad x\leq \frac{1}{3} \vee x>3$

307 $\frac{(3x-12)(6-x)}{(24-8x)(36-18x)}\leqslant 0$ $\qquad x<2 \ \vee \ 3<x\leq 4 \ \vee \ x\geq 6$

308 $\frac{(x-2)(5-2x)}{(5x-15)(24-6x)}\geqslant 0$ $\qquad x\leq 2 \ \vee \ \frac{5}{2}\leq x<3 \ \vee \ x>4$

309 $\frac{(x-2)(x+4)(x+1)}{(x-1)(3x-9)(10-2x)}\leqslant 0$ $\qquad x\leq -4 \vee -1\leq x<1 \vee 2\leq x<3 \vee x>5$

310 $\frac{(5-x)(3x+6)(x+3)}{(4-2x)(x-6)x}\leqslant 0$ $\qquad -3\leq x\leq -2 \vee \ 0<x<2 \vee \ 5\leq x<6$

311 $\frac{(x-5)(3x-6)(x-3)}{(4-2x)(x+6)x}\leqslant 0$ $\qquad x<-6 \vee \ 0<x\leq 3 \vee \ x\geq 5 \ con \ x\neq 2$

312 $\frac{(x-3)(x+2)(15+5x)}{x^2-5x+4}\geqslant 0$ $\qquad -3\leq x\leq -2 \vee \ 1<x\leq 3 \vee \ x>4$

313 $\frac{(x-4)^2(x+3)}{x^2+5x+6}\geqslant 0$ $\qquad I.S.=\{x\in \mathbb{R} \mid x>-2\}$

314 $\frac{x}{1-x^2}>\frac{1}{2x+2}-\frac{2}{4x-4}$ $\qquad I.S.=\{x\in \mathbb{R} \mid x<-1\}$

315 $\frac{3-x}{x-2}<\frac{x-1}{x+3}+\frac{2}{x^2+x-6}$ $\qquad x<-3 \vee -1<x<2 \vee x>\frac{5}{2}$

316 $\frac{2}{x+2}-\frac{1}{x+1}\geq \frac{3}{2x+2}$ $\qquad I.S.=\{x\in \mathbb{R} \mid x\leq -6 \ \vee \ -2<x<-1\}$

317 $\frac{3}{2x-1}\leq \frac{2x^2}{2x^2-x}-\frac{x+1}{x}$ $\qquad I.S.=\left\{x\in \mathbb{R} \mid x<0 \ \vee \ \frac{1}{4}\leq x<\frac{1}{2}\right\}$

318 $\frac{2x^2}{2x^2-x}>1$ $\quad I.S.=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,x<\frac{1}{2}\;con\;x\neq 0\right\}$

319 $\frac{2x}{2x-1}+\frac{x+2}{2x+1}>\frac{3}{2}$ $\quad I.S.=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{10}\;\vee\;x>\frac{1}{2}\right\}$

320 $\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+12}\le 1$ $\quad x<4\wedge x\neq 3$

321 $\frac{\frac{2}{x+1}}{x^2-1}<0$ $\quad x<-1\vee -1<x<1$

322 $\frac{x}{x+1}-\frac{4-x}{x+2}\ge\frac{2x+1}{x^2+3x+2}$ $\quad x<-2\vee x\ge\frac{5}{2}$

323 $\frac{3}{2x^2-4x-6}-\frac{x-2}{3x+3}<\frac{x-1}{2x-6}$ $\quad x<-1\vee 0<x<2\vee x>3$

324 $\frac{1}{2-2x}\cdot\left(\frac{x(x-2)}{x-1}-\frac{3}{3-3x}\right)>-1$ $\quad x<1\vee x>1$

325 $-\frac{2}{27-3x^2}-\frac{x+1}{2x-6}+\frac{3-2x}{6x-18}<-\frac{3}{x^2-9}+4\frac{x-3}{18-2x^2}$ $\quad x<-3\vee x>3$

326 $\frac{2}{x^2-3x+2}-\frac{x}{x-2}<\frac{x-1}{x-1}-\frac{1}{3x-x^2-2}+\frac{2-x}{4x-4}$ $\quad x<0\vee 1<x<\frac{12}{7}\vee x>2$

327 $\frac{(x-2)(x+4)(x^2+5x+6)}{(x^2-9)(-4-7x^2)(x^2-6x+8)(x^2+4)}<0$ $\quad x<-4\vee -2<x<2\vee 2<x<3\vee x>4$

328 Dopo aver ridotto ai minimi termini la frazione $f=\frac{3x^4-2x^3+3x^2-2x}{6x^2-x-7}$, completa

$f>0$ per $x<-1$ oppure ………………………………..

$f=0$ per …………………………………………………

$f<0$ per …………………………………………………

329 Determinate il segno delle frazioni, dopo averle ridotte ai minimi termini:

$f_1=\frac{1-a^2}{2+3a}$; $\quad f_2=\frac{a^3-5a^2-3+7a}{9-6a+a^2}$ $\quad f_3=\frac{11m-m^2+26a}{(39-3m)(m^2+4m+4)}$

Determinare I.S. dei seguenti sistemi di disequazioni:

330 $\begin{cases}\left(1-\frac{1}{x}\right)+3\left(\frac{2}{x}+1\right)>\frac{13}{2}\\ \frac{7+x}{2x}>\frac{2-x}{1-2x}\end{cases}$ $\quad I.S.=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,0<x<\frac{7}{17}\;\vee\;\frac{1}{2}<x<2\right\}$

331 $\begin{cases}\frac{x^2-2x-3}{2x^2-x-1}\ge 0\\ \frac{4x-1-3x^2}{x^2-4}\le 0\end{cases}$ $\quad I.S.=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,x<-2\;\vee\;\frac{1}{3}\le x<1\;\vee\;x\ge 3\right\}$

332 $\begin{cases}x^2-3x+2\le 0\\ \frac{6}{2+x}-\frac{x+2}{x-2}>\frac{x^2}{4-x^2}\end{cases}$ $\quad I.S.=\{x\in\mathbb{R}\,|\,1\le x<2\}$

333 $\begin{cases}x+1\le -2x^2\\ 3x-1<2\left(x-\frac{1}{2}\right)\end{cases}$ $\quad I.S.=\emptyset$

334 $\begin{cases} \dfrac{2-x}{3x^2+x} \geq 0 \\ x^2-x-6 \geq 0 \\ x^2-4 \leq 0 \end{cases}$ $\qquad I.S.=\{x \in \mathbb{R} \mid x=-2\}$

335 $\begin{cases} \dfrac{x^2-4x+4}{9-x^2} > 0 \\ x^2-3x \leq 0 \end{cases}$ $\qquad I.S.=\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 3 \;\; con \;\; x \neq 2\}$

336 $\begin{cases} \dfrac{1}{x-2}+\dfrac{3}{x+2} < 0 \\ \dfrac{2-x}{5x-15} \leq \dfrac{5x-1}{2x-6} \end{cases}$ $\qquad x<-2$

337 $\begin{cases} \dfrac{4}{8-4x}-\dfrac{6}{2x-4} < 0 \\ \dfrac{x}{x-2}+\dfrac{2}{x^3-8} > 1 \end{cases}$ $\qquad x>2$

338 $\begin{cases} \left(1+\dfrac{2}{x-2}\right)\left(1-\dfrac{2}{x-2}\right) < \dfrac{x-4}{2-x} \\ \left(\dfrac{2-x}{x^2-6x+9}+\dfrac{2+x}{x^2-9}\right)\cdot\dfrac{x^3-27}{2x} > 0 \end{cases}$ $\qquad 1<x<3 \wedge x \neq 2$

339 Motivare la verità o la falsità delle seguenti proposizioni riferite alle frazioni:

$f_1=\dfrac{a^3-81a}{81-a^2}$ $\qquad f_2=\dfrac{7a^2+7}{3+3a^4+6a^2}$ $\qquad f_3=\dfrac{20a-50a^2-2}{4a-20a^2}$

$f_4=\dfrac{a^4}{2a^4+a^2}$ $\qquad f_5=\dfrac{1-4a^2}{2-8a+8a^2}$ $\qquad f_6=\dfrac{2a^2+a^3+a}{2a^2-a^3-a}$

a) f_1 per qualunque valore positivo della variabile è negativa — V F
b) f_2 è definita per qualunque valore attribuito alla variabile — V F
c) f_3 è positiva nell'insieme $I.S.=\left\{a \in \mathbb{R} \mid a<0 \vee a>\dfrac{1}{5}\right\}$ — V F
d) f_4 è positiva per qualunque valore reale attribuito alla variabile — V F
e) nell'intervallo $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right[$ f_5 non si annulla — V F
a) f_6 è negativa per qualunque valore dell'insieme $K=\mathbb{R}-\{-1,0,1\}$ — V F

►12. Equazione lineare in due incognite

Problema

Determinare due numeri naturali la cui somma sia 18.
L'ambiente del problema è l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali. Indicati con x e y i due numeri richiesti dal quesito, il problema si formalizza con l'equazione $x+y=18$, equazione in due incognite, di primo grado.

> DEFINIZIONI. Una equazione di primo grado in due incognite si chiama **equazione lineare**.

Procediamo per determinare l'Insieme Soluzione del problema proposto:
L'obiettivo è trovare $x\in\mathbb{N}$ *e* $y\in\mathbb{N}$ *tali che* $x+y=18$ oppure $(x;y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ *tali che* $x+y=18$
Le coppie di numeri naturali che sono soluzioni dell'equazione sono facilmente determinabili e sono tutte quelle riportate nella tabella:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
y	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

L'Insieme Soluzione del problema posto è dunque formato dalle 19 coppie di numeri naturali sopra elencate.
Riformuliamo il problema cercando coppie di numeri razionali la cui somma sia 18.
In simboli scriviamo $x\in\mathbb{Q}$ *e* $y\in\mathbb{Q}$ *tali che* $x+y=18$ oppure $(x;y)\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ *tali che* $x+y=18$
Possiamo subito dire che tutte le coppie precedenti sono soluzione del problema, ma ce ne sono infinite altre, ad esempio la coppia $(-7;+25)$ è soluzione del problema perché sostituendo a x il valore -7 e a y il valore $+25$ si ha $(-7)+(+25)=18$. Dal procedimento si capisce che anche la coppia $(+25;-7)$ è soluzione del problema perché $(+25)+(-7)=18$.
Se attribuiamo un valore arbitrario a x, l'altro elemento della coppia soluzione si può ottenere sottraendo da 18 il valore di x: $y=18-x$.
Completa tu

- se $x=-3$ allora y= 18-(-3) = … …, dunque la coppia (… ...; … ...) è soluzione dell'equazione;
- se $x=\frac{3}{2}$ allora y = … … … … …, la coppia (… …; … …) è soluzione dell'equazione;
- se x = … ... allora y = … … … …, la coppia (… …; … …) è soluzione dell'equazione;
- se x = … ... allora y = … … … …, la coppia (… …; … …) è soluzione dell'equazione.

Quindi, se l'ambiente del problema è l'insieme $\mathbb{Q}$, troviamo infinite coppie di numeri razionali che soddisfano il problema.

E ancora, se formuliamo il problema nell'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$, troveremo tutte le infinite coppie soluzione del problema: basta assegnare all'incognita x valori reali arbitrari e determinare di conseguenza il corrispondente valore di $y=18-x$.
Se $x=\sqrt{2}$ → $y=18-\sqrt{2}$ e la coppia $(\sqrt{2};\ 18-\sqrt{2})$ è soluzione dell'equazione
Completa tu:

- se $x=-2\sqrt{3}+1$ allora y = … … … ... … … … … … …
- se $x=18+\frac{3\sqrt{5}}{2}$ allora y = … … … … … … … … … …

> DEFINIZIONE. Si chiama **Insieme Soluzione** (**I.S.**) di un'equazione di primo grado in due incognite, l'**insieme delle coppie ordinate di numeri reali** che sostituiti rispettivamente a x e a y rendono vera l'uguaglianza.

Completa la tabelle delle coppie di soluzioni dell'equazione indicata

340 $x+2y-1=0$

x		-1	0		$\frac{1}{2}$			2,25	
y	0			-1		$\frac{3}{4}$	2		1,5

341 $3x-2y=5$

x		0	1		$\frac{1}{6}$			$-\sqrt{2}$	0,25
y	0			-1		$\frac{3}{4}$	$\sqrt{2}$		

342 $3x-2\sqrt{2}\,y=0$

x		0			$\frac{1}{6}$		$\sqrt{2}$
y	0		1	-1		$\sqrt{2}$	

►13. Rappresentazione di un'equazione lineare sul piano cartesiano

Esempio

Determinare l'insieme soluzione dell'equazione $3y-x+1=0$ *con* $x\in\mathbb{R}$ *e* $y\in\mathbb{R}$.

Osserviamo che l'equazione assegnata ha due incognite ed è di primo grado; l'insieme soluzione sarà formato dalle infinite coppie ordinate $(x\,;\,y)$ di numeri reali tali che $3y-x+1=0$.

Possiamo verificare che la coppia $(1\,;0)$ è soluzione dell'equazione, ma come facciamo a determinare tutte le coppie che soddisfano quella equazione?

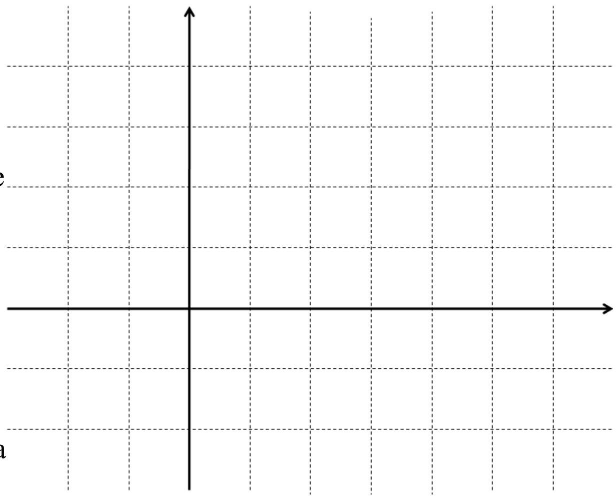
Fissiamo l'attenzione sull'incognita y, pensiamo l'equazione come un'equazione nella sola y, ricaviamo y come abbiamo fatto nelle equazioni di primo grado ad una sola incognita, applicando i principi di equivalenza delle equazioni:

$$3y-x+1=0 \;\rightarrow\; 3y=x-1 \;\rightarrow\; \frac{3y}{3}=\frac{x-1}{3} \;\rightarrow\; y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$$

Ora al variare di x in $\mathbb{R}$, si ottengono tutte le infinite soluzioni dell'equazione assegnata.

Prova a determinarne alcune:

x	y	coppia
0	… … …	(0; …)
1	… … …	(1; …)
-1	… … …	(-1; …)



In verità non possiamo trovare tutte le infinite coppie che risolvono quella equazione, ma possiamo darne una rappresentazione grafica.

La formula $y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$ rappresenta una funzione lineare; riportiamo le coppie trovate in un riferimento cartesiano ortogonale e tracciamo la retta che rappresenta la funzione.

Una qualunque equazione lineare $a x+b y+c=0$ ammette infinite soluzioni, costituite da coppie ordinate di numeri reali; esse sono le coordinate cartesiane dei punti della retta grafico della funzione $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

La formula $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ si chiama **equazione esplicita della retta**.

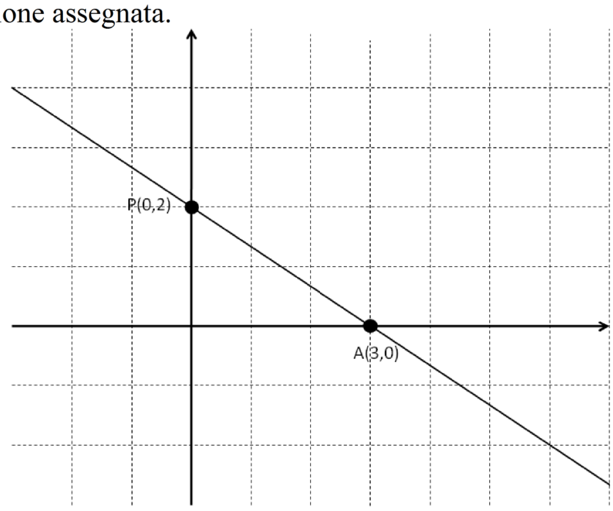
Esempio

Risolvi graficamente l'equazione $y+\frac{2}{3}x-2=0 \; con \; x \in \mathbb{R} \; e \; y \in \mathbb{R}$

L'equazione assegnata è in due incognite, di primo grado, è cioè una equazione lineare. Nel riferimento cartesiano ortogonale essa rappresenta una retta.

Troviamo l'equazione esplicita della retta: $y+\frac{2}{3}x-2=0 \; \rightarrow \; y=-\frac{2}{3}x+2$

Individuiamo l'ordinata del punto di intersezione della retta con l'asse y: $q=2$ quindi $P(0;2)$ è un punto della retta.
Troviamo un altro punto appartenente alla retta: se x=3 allora y=0, quindi $A(3;0)$ è un punto della retta.
Disegniamo la retta nel piano cartesiano: le coppie (x;y), coordinate dei punti della retta tracciata, sono le infinite soluzioni dell'equazione assegnata.



Risolvi graficamente le seguenti equazioni in due incognite, seguendo i passi sopra descritti:

343 $2x-2y+3=0$ $\quad -\frac{1}{5}x-\frac{5}{2}y+1=0$

344 $x+2y+\frac{7}{4}=0$ $\quad -2y+3=0$

345 $-2x+4y-1=0$ $\quad 2y+\frac{2}{3}x+6=0$

346 $\sqrt{2}x+\sqrt{6}y=0$ $\quad \sqrt{3}y+\sqrt{6}=-x$

*Stabilisci quali coppie appartengono all'**I**nsieme **S**oluzione dell'equazione.*

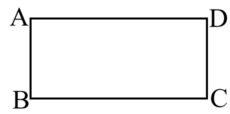
347 $5x+7y-1=0$ $\quad \left(-\frac{7}{5};0\right), \left(-\frac{1}{5};-1\right), \left(0;\frac{1}{7}\right), \left(\frac{2}{5};-\frac{1}{7}\right)$

348 $-x+\frac{3}{4}y-\frac{4}{3}=0$ $\quad (0;-1), \left(\frac{1}{12};\frac{17}{9}\right), \left(-\frac{4}{3};0\right), (-3;4)$

349 $-x-y+\sqrt{2}=0$ $\quad (\sqrt{2};0), (0;-\sqrt{2}), (1+\sqrt{2};-1), (1;-1-\sqrt{2})$

►14. Definizione di sistema di equazioni

Problema



Nel rettangolo ABCD, la somma del doppio di AB con la metà di BC è di 98m; aumentando AB di 3m e BC di 2m il perimetro del rettangolo diventa di 180m. Determinare l'area in m² del rettangolo.

Dati: Obiettivo: Area

$2\overline{AB}+\frac{1}{2}\overline{BC}=98\ m.$

$2(\overline{AB}+3\ m+\overline{BC}+2\ m)=180\ m.$

Soluzione:

Per determinare l'area del rettangolo dobbiamo moltiplicare le misure delle sue dimensioni $Area=\overline{AB}\cdot\overline{BC}$ che però non conosciamo; il problema ha quindi due incognite.

Analizzando i dati possiamo osservare che ci sono fornite due informazioni che legano le grandezze incognite. Se poniamo $\overline{AB}=x$ e $\overline{BC}=y$ otteniamo le due equazioni

$$2x+\frac{1}{2}y=98 \qquad 2(x+3+y+2)=180$$

che dovranno risultare soddisfatte per una stessa coppia di numeri reali.

DEFINIZIONE. Si definisce **sistema di equazioni** l'insieme di più equazioni, in due o più incognite, che devono essere verificate contemporaneamente. La scrittura formale si ottiene associando le equazioni mediante una parentesi graffa.

Analizzeremo in particolare i sistemi in due equazioni e due incognite.

DEFINIZIONI

L'Insieme Soluzione (I.S.) di un sistema di equazioni in due incognite è formato da tutte le coppie di numeri reali che rendono vere tutte le equazioni contemporaneamente.

Si chiama **grado di un sistema** il prodotto dei gradi delle equazioni che lo compongono. In particolare, se le equazioni che lo compongono sono di primo grado, il sistema si chiama **sistema lineare**.

La **forma normale o canonica** di un sistema lineare è: $\begin{cases} ax+by=c \\ a_1x+b_1y=c_1 \end{cases}$ con a, b, c, a_1, b_1, c_1 numeri reali.

Il problema proposto si formalizza dunque con il sistema: $\begin{cases} 2x+\frac{1}{2}y=98 \\ 2(x+3+y+2)=180 \end{cases}$ composto da due equazioni in due incognite di primo grado e pertanto il suo grado è 1 ed è un sistema lineare. La sua forma canonica si ottiene sviluppando i calcoli nella seconda equazione, si ottiene $\begin{cases} 2x+\frac{1}{2}y=98 \\ 2x+2y=170 \end{cases}$

►15. Procedimento per ottenere la forma canonica di un sistema

La **forma canonica** di un sistema lineare di due equazioni in due incognite è, come abbiamo visto,
$\begin{cases} a x+b y=c \\ a_1 x+b_1 y=c_1 \end{cases}$ con a, b, c, a_1, b_1, c_1 numeri reali.

Esempi

■ Scrivere in forma canonica il sistema: $\begin{cases} 4 x^2-(y+2 x)^2=x+1-y(4 x+y-1) \\ \frac{x-2}{2}+\frac{y+3}{3}=0 \end{cases}$

Eseguiamo i calcoli nella prima equazione e riduciamo allo stesso denominatore la seconda equazione:
$\begin{cases} 4 x^2-y^2-4 x^2-4 xy=x+1-4 xy-y^2+y \\ 3 x-6+2 y+6=0 \end{cases}$

Per mezzo del primo principio di equivalenza delle equazioni portiamo le incognite al primo membro e sommiamo i termini simili:
$\begin{cases} x+y=-1 \\ 3 x+2 y=0 \end{cases}$ che è la forma canonica cercata.

►16. Metodo di sostituzione

Risolvere il sistema significa determinare tutte le coppie di numeri reali che soddisfano contemporaneamente le due equazioni.
Analizziamo i diversi metodi che permettono di ottenere l'**I**nsieme **S**oluzione, cominciamo dal **metodo di sostituzione**.

Esempio

■ $\begin{cases} -3 x+y=2 \\ 5 x-2 y=7 \end{cases}$.

Il sistema si presenta già in forma canonica. Il metodo di sostituzione si svolge nei seguenti passi:

- 1° passo: scegliamo una delle due equazioni e una delle due incognite da cui partire. Applicando i principi d'equivalenza delle equazioni, ricaviamo questa incognita.

Nel nostro esempio, partiamo dalla prima equazione e ricaviamo l'incognita y
$\begin{cases} -3x+y=2 \\ 5x-2y=7 \end{cases}$ da cui $\begin{cases} y=2+3 x \\ 5 x-2 y=7 \end{cases}$

- 2° passo: sostituiamo nella seconda equazione, al posto dell'incognita trovata, l'espressione a cui è uguale.

Nel nostro esempio abbiamo $\begin{cases} y=2+3x \\ 5x-2y=7 \end{cases}$ da cui $\begin{cases} y=2+3 x \\ 5 x-2(2+3 x)=7 \end{cases}$

- 3° passo: svolgiamo i calcoli nella seconda equazione.

Nel nostro esempio abbiamo $\begin{cases} y=2+3 x \\ 5 x-4-6 x=7 \end{cases}$

- 4° passo: risolviamo la seconda equazione, che ora è un'equazione di primo grado in una sola variabile.

Nel nostro esempio, ricaviamo x dalla seconda equazione $\begin{cases} y=2+3 x \\ 5 x-4-6 x=7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=2+3 x \\ -x=7+4 \rightarrow x=-11 \end{cases}$

- 5° passo: sostituiamo nella prima equazione il valore numerico dell'incognita trovata, avremo un'equazione di primo grado nell'altra incognita. Risolviamo quest'ultima equazione.

Nel nostro esempio $\begin{cases} y=2+3x \\ -x=7+4 \Rightarrow x=-11 \end{cases}$ da cui $\begin{cases} x=-11 \\ y=-31 \end{cases}$

- 6° passo: possiamo ora scrivere l'insieme soluzione.

Nel nostro esempio $I.S.=\{(-11;-31)\}$
In conclusione, il sistema è **determinato**, la coppia ordinata $(-11;-31)$ verifica contemporaneamente le due equazioni del sistema.

- $$\begin{cases} \frac{1}{2}(x-1)+3\left(y+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6} \\ y\left(1+\frac{2}{5}\right)-2=\frac{4}{5}-\frac{x-1}{5} \end{cases}$$

Il sistema non si presenta nella forma canonica.

Svolgiamo i calcoli e portiamo il sistema in forma canonica: $\begin{cases} 3x+18y=-2 \\ x+7y=15 \end{cases}$

Ricaviamo x dalla seconda equazione $\begin{cases} 3x+18y=-2 \\ x=15-7y \end{cases}$

Abbiamo fatto questa scelta perché possiamo ottenere il valore di x con facilità e senza frazioni:

Sostituiamo nella prima equazione al posto di x l'espressione trovata: $\begin{cases} 3\cdot(15-7y)+18y=-2 \\ x=15-7y \end{cases}$

Risolviamo la prima equazione che è di primo grado nella sola incognita y: $\begin{cases} -3y=-47 \quad \rightarrow y=\frac{47}{3} \\ x=15-7y \quad \rightarrow \quad x=\frac{284}{3} \end{cases}$

Sostituiamo il valore di y nella seconda equazione: $\begin{cases} x=\frac{284}{3} \\ y=\frac{47}{3} \end{cases}$

Possiamo scrivere l'insieme delle soluzioni: $I.S.=\left\{\left(\frac{284}{3};\frac{47}{3}\right)\right\}$

In conclusione, il sistema è **determinato;** la coppia ordinata $\left(\frac{284}{3};\frac{47}{3}\right)$ verifica le due equazioni del sistema.

- $$\begin{cases} \frac{1}{y}=2\left(\frac{x}{y}-\frac{1}{2}\right) \\ \frac{5x+4y+19}{x}=-2 \end{cases}$$

Il sistema è fratto poiché in ciascuna equazione compare l'incognita al denominatore; per poter applicare il secondo principio di equivalenza delle equazioni eliminando i denominatori, dobbiamo porre la **C**ondizioni di **E**sistenza e individuare il **D**ominio del sistema assegnato, cioè l'insieme in cui si troverà

$C.E.\ y\neq 0$ e $x\neq 0$ per cui $D=\mathbb{R}_0\times\mathbb{R}_0$

Portiamo a forma canonica applicando i principi di equivalenza delle equazioni:

$$\begin{cases} \frac{1}{y}=2\left(\frac{x}{y}-\frac{1}{2}\right) \\ \frac{5x+4y+19}{x}=-2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{y}=\frac{2x}{y}-1 \\ 5x+4y+19=-2x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x-y=1 \\ 7x+4y=-19 \end{cases}$$

Applichiamo il metodo di sostituzione:

$$\begin{cases} 2x-y=1 \\ 7x+4y=-19 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=2x-1 \\ 7x+4y=-19 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=2x-1 \\ 7x+4(2x-1)=-19 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=2x-1 \\ 15x=-15 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=2(-1)-1 \\ x=-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=-3 \\ x=-1 \end{cases}$$

La soluzione è compatibile con le condizioni di esistenza.

Risolvi i seguenti sistemi con il metodo di sostituzione

350 $\begin{cases} x=1 \\ x+y=1 \end{cases}$ *R.* $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$ $\begin{cases} y=-2 \\ 2x-y+2=0 \end{cases}$

351 $\begin{cases} y=x \\ 2x-y+2=0 \end{cases}$ *R.* $\begin{cases} x=-2 \\ y=-2 \end{cases}$ $\begin{cases} y=-x+1 \\ 2x+3y+4=0 \end{cases}$

352 $\begin{cases} 2x+y=1 \\ 2x-y=-1 \end{cases}$ *R.* $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} 2y=2 \\ x+y=1 \end{cases}$ *R.* $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$

353 $\begin{cases} 3x-y=7 \\ x+2y=14 \end{cases}$ *R.* $\begin{cases} x=4 \\ y=5 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x-2y=1 \\ 4y-6x=-2 \end{cases}$ R. indeterminato

354 $\begin{cases} 3x+y=2 \\ x+2y=-1 \end{cases}$ *R.* $(1,-1)$ $\begin{cases} x+4y-1=3 \\ \frac{x}{2}+\frac{y}{3}+1=-\frac{x}{6}-1 \end{cases}$ *R.* $\begin{cases} x=-4 \\ y=2 \end{cases}$

355 $\begin{cases} 2x-3y=2 \\ 6x-9y=6 \end{cases}$ R. impossibile $\begin{cases} x+2y=14 \\ 3x-y=7 \end{cases}$ *R.* $\begin{cases} x=4 \\ y=5 \end{cases}$

356 $\begin{cases} x+2y=1 \\ -2x-4y=2 \end{cases}$ R. impossibile $\begin{cases} 2x-y=3 \\ -6x+3y=-9 \end{cases}$ R. indeterminato

357 $\begin{cases} \frac{x-4y}{3}=x-5y \\ x-2=6y+4 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=-66 \\ y=-12 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{y^2-4x+2}{5}=\frac{2y^2-x}{10}-1 \\ x=-2y+8 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$

358 $\begin{cases} 3x-\frac{3}{4}(2y-1)=\frac{13}{4}(x+1) \\ \frac{x+1}{4}-\frac{y}{2}=\frac{1+y}{2}-\frac{1}{4} \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{x}{3}-\frac{y}{2}=0 \\ \frac{y-x-1}{2}+x-y+1=\frac{1}{2} \end{cases}$ R. (0;0)

359 $\begin{cases} y-\frac{x}{3}+\frac{3}{4}=0 \\ \frac{2x+1}{1-x}+\frac{2+y}{y-1}=-1 \end{cases}$ R. $\left(-\frac{3}{20};-\frac{4}{5}\right)$ $\begin{cases} x+y=2 \\ 3\left(\frac{x}{6}+3y\right)=4 \end{cases}$ R. $\left(\frac{28}{17};\frac{6}{17}\right)$

360 $\begin{cases} \frac{1}{2}y-\frac{1}{6}x=5-\frac{6x+10}{4} \\ 2(x-2)-3x=40-6\left(y-\frac{1}{3}\right) \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{2y}{3}+x+1=0 \\ \frac{y+1}{2}+\frac{x-1}{3}+1=0 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$

361 $\begin{cases} (x-2)^2+y=(x+1)(x-y)+(3-y)(2-x) \\ \frac{x}{4}-2y=2 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=-4 \\ y=-\frac{3}{2} \end{cases}$

362 $\begin{cases} y-\frac{3-2x}{3}=\frac{x-y}{3}+1 \\ \frac{x+1}{2}+\frac{5}{4}=y+\frac{2-3x}{4} \end{cases}$ R. $\left(\frac{1}{6};\frac{35}{24}\right)$

363 $\begin{cases} x+y+1=0 \\ x-y+k=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x-2y-3=0 \\ kx+(k+1)y+1=0 \end{cases}$

364 Risolvere il sistema che formalizza il problema del paragrafo 3: $\begin{cases} 2x+\frac{1}{2}y=98 \\ 2x+3y=170 \end{cases}$, concludere il problema determinando l'area del rettangolo.

365 Determinare due numeri reali x e y tali che il triplo della loro somma sia uguale al doppio del primo aumentato di 10 e il doppio del primo sia uguale al prodotto del secondo con 5.

►17. Metodo del confronto

Esempio

■ $\begin{cases}-3x+y=2\\5x-2y=7\end{cases}$

- 1° passo: ricaviamo da entrambe le equazioni la stessa incognita.

Nel nostro esempio ricaviamo la y contemporaneamente da entrambe le equazioni: $\begin{cases}y=2+3x\\y=\dfrac{5x-7}{2}\end{cases}$

- 2° passo: poiché il primo membro di entrambe le equazioni è lo stesso, possiamo uguagliare anche i secondi membri, ottenendo un'equazione in una solo incognita.

Nel nostro esempio $2+3x=\dfrac{5x-7}{2}$

- 3° passo: si risolve l'equazione trovata e si determina il valore di una delle due incognite

Nel nostro esempio $4+6x=5x-7 \rightarrow x=-11$

- 4° passo: si sostituisce il valore trovato dell'incognita in una delle due equazioni e ricaviamo l'altra incognita.

Nel nostro esempio $\begin{cases}x=-11\\y=2+3x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=-11\\y=-31\end{cases}$

- 5° passo: possiamo ora scrivere l'insieme soluzione.

Nel nostro esempio: $I.S.=\{(-11;-31)\}$.

In conclusione, il sistema è determinato, la coppia ordinata (-11;-31) verifica contemporaneamente le due equazioni del sistema.

Applica il metodo del confronto per risolvere i seguenti sistemi

366 $\begin{cases}x+y=0\\-x+y=0\end{cases}$ *R.* $\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$ $\begin{cases}3x+y=5\\x+2y=0\end{cases}$ *R.* $\begin{cases}x=2\\y=-1\end{cases}$

367 $\begin{cases}x=2\\x+y=3\end{cases}$ R. $(2;1)$ $\begin{cases}x=-1\\2x-y=1\end{cases}$ R. $(-1;-3)$

368 $\begin{cases}y=2x-1\\y=2x\end{cases}$ R. $\emptyset$ $\begin{cases}x-2y=1\\2x-y=7\end{cases}$

369 $\begin{cases}x+y=2\\-x-y=2\end{cases}$ R. $\emptyset$ $\begin{cases}2x-y=4\\x-\dfrac{1}{2}y=2\end{cases}$ R. $\mathbb{R}^+$

370 $\begin{cases}y-\dfrac{3x-4}{2}=1-\dfrac{y}{4}\\2y-2x=-\dfrac{4}{3}\end{cases}$ *R.* $\left(\dfrac{2}{3};0\right)$ $\begin{cases}\dfrac{2}{3}x-y+\dfrac{1}{3}=0\\x-\dfrac{2}{3}y+\dfrac{1}{3}=0\end{cases}$ R. $\left(-\dfrac{1}{5};\dfrac{1}{5}\right)$

371 $\begin{cases}\dfrac{1}{2}y-\dfrac{1}{6}x=5-\dfrac{6x+10}{8}\\8(x-2)+3x=40-6\left(y-\dfrac{1}{6}\right)\end{cases}$ *R.* $\begin{cases}x=3\\y=4\end{cases}$ $\begin{cases}x=\dfrac{y-4}{3}+1\\y=\dfrac{x+3}{3}\end{cases}$ *R.* $\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}$

372 $\begin{cases}x-y+k=0\\x+y=k-1\end{cases}$

373 In un triangolo isoscele la somma della base con il doppio del lato è 168m e la differenza tra la metà della base e 1/13 del lato è 28m. Indicata con x la misura della base e con y quella del lato, risolvete con il metodo del confronto il sistema lineare che formalizza il problema. Determinate l'area del triangolo.

►18. Metodo di riduzione

Il metodo di riduzione si basa sulla seguente osservazione: se un sistema è formato dalle equazioni $A=B$ e $C=D$ possiamo dedurre da queste la nuova equazione $A+C=B+D$

$$\begin{cases} A=B \\ C=D \end{cases} \rightarrow \quad A+C=B+D$$

L'equazione ottenuta potrebbe presentarsi in una sola incognita e quindi potrebbe essere facile trovare il valore di quella incognita.

Esempi

■ $\begin{cases} 3x-5y=1 \\ 2x+5y=-4 \end{cases}$

Sommando membro a membro le due equazioni otteniamo $(3x-5y)+(2x+5y)=1-4$

I termini in y si eliminano perché opposti, sommando i monomi simili si ha $5x=-3 \rightarrow x=-\frac{3}{5}$.

Questo metodo, applicato semplicemente sommando membro a membro le equazioni, funziona solo se i coefficienti di una delle due incognite sono opposti. Solo in questo caso sommando le equazioni una delle due incognite 'sparisce'. Tuttavia con qualche accorgimento è possibile applicarlo in ogni caso.
Sfruttiamo il secondo principio di equivalenza delle equazioni che ci permette di moltiplicare ambo i membri di un'equazione per uno stesso numero diverso da zero. In questo modo possiamo sempre trasformare le due equazioni affinché l'incognita x appaia con coefficienti opposti nella prima e nella seconda equazione.

■ $\begin{cases} 3x-5y=1 \\ 5x-4y=-4 \end{cases}$

Nel nostro esempio possiamo moltiplicare la prima equazione per 5 e la seconda per –3, otteniamo:

$\begin{matrix} +5 \\ -3 \end{matrix}\begin{cases} 3x-5y=1 \\ 5x-4y=-4 \end{cases}$ da cui $\begin{cases} 15x-25y=5 \\ -15x+12y=12 \end{cases}$; sommando membro a membro abbiamo

$(15x-25y)+(-15x+12y)=5+12 \quad \rightarrow \quad -13y=17 \quad \rightarrow \quad y=-\frac{17}{13}$

Dopo aver determinato il valore di una incognita possiamo sostituirlo in una qulasiasi equazione del sistema e determinare il valore dell'altra incognita.

Nel nostro esempio moltiplichiamo come segue: $\begin{matrix} +4 \\ -5 \end{matrix}\begin{cases} 3x-5y=1 \\ 5x-4y=-4 \end{cases}$ da cui $\begin{cases} 12x-20y=4 \\ -25x+20y=20 \end{cases}$

Sommando le due equazioni otteniamo $-13x=24 \rightarrow x=-\frac{24}{13}$.

Abbiamo così determinato la coppia soluzione del sistema $\left(-\frac{24}{13};-\frac{17}{13}\right)$.

Generalizzazione del metodo di riduzione

Assegnato il sistema lineare $\begin{cases} ax+by=c \\ a_1x+b_1y=c_1 \end{cases}$ con a, b, c, a_1, b_1, c_1 numeri reali.

1° passo: per eliminare y moltiplichiamo la prima per b_1 e la seconda per $-b$: $\begin{cases} ab_1x+bb_1y=cb_1 \\ -a_1bx-bb_1y=-bc_1 \end{cases}$

2° passo: sommiamo le due equazioni: $ab_1x-a_1bx=cb_1-bc_1 \rightarrow (ab_1-a_1b)x=cb_1-bc_1$

3° passo: ricaviamo l'incognita x: $x=\frac{cb_1-bc_1}{ab_1-a_1b}$ $con\ ab_1-a_1b\neq 0$

4° passo: per eliminare x moltiplichiamo la prima per $-a_1$ e la seconda per a: $\begin{cases} -aa_1x+ba_1y=-a_1c \\ aa_1x+ab_1y=ac_1 \end{cases}$

5° passo: sommiamo le due equazion $-a_1by+ab_1y=-a_1c+ac_1 \rightarrow (ab_1-a_1b)y=ac_1-a_1c$

6° passo: ricaviamo l'incognita y: $y=\frac{ac_1-a_1c}{ab_1-a_1b}$ $con\ ab_1-a_1b\neq 0$

La soluzione è $\left(\frac{cb_1-bc_1}{ab_1-a_1b};\frac{ac_1-a_1c}{ab_1-a_1b}\right)$ $con\ ab_1-a_1b\neq 0$.

Risolvere i seguenti sistemi con il metodo di riduzione

374 $\begin{cases} x+y=0 \\ -x+y=0 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

375 $\begin{cases} 2x+y=1 \\ 2x-y=-1 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$

376 $\begin{cases} 2x+y=1+y \\ 4x+y=2 \end{cases}$ R. $\left(\frac{1}{2}; y=0\right)$

377 $\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=-1 \end{cases}$ R. $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

378 $\begin{cases} x-y=0 \\ -2x+3y=1 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

379 $\begin{cases} 2x=3-x \\ 2x+y=3 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

380 $\begin{cases} \frac{2}{3}x+\frac{2}{3}y=3 \\ \frac{3}{2}x-\frac{3}{2}y=2 \end{cases}$ R. $\left(\frac{35}{12}; \frac{19}{12}\right)$

381 $\begin{cases} 5y+2x=1 \\ 3x+2y+2=0 \end{cases}$ R. $\left(-\frac{36}{37}; \frac{17}{37}\right)$

382 $\begin{cases} -3x+y=2 \\ 5x-2y=7 \end{cases}$ R. $(-11; -31)$

383 $\begin{cases} 2x=3-x \\ 2x+y=3 \end{cases}$ R. $\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right)$

384 $\begin{cases} \frac{4}{3}x-\frac{4y-x}{2}+\frac{35}{12}-\frac{x+y}{4}=0 \\ \frac{3(x+y)}{2}-\frac{1}{2}(5x-y)=\frac{1}{3}(11-4x+y) \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$

385 $\begin{cases} x+ay+a=0 \\ 2x-ay+a=0 \end{cases}$

386 $\begin{cases} 2ax+2y-1=0 \\ ax+y=3 \end{cases}$

387 Il segmento AB misura 80cm; il punto P lo divide in due parti tali che il quadruplo della parte minore uguagli il triplo della differenza fra la maggiore e il triplo della minore. Determinare $\overline{AP}$ e $\overline{PB}$, formalizzando il problema con un sistema lineare che risolverete con il metodo di riduzione.



►19. Metodo di Cramer

DEFINIZIONE. Si chiama **matrice del sistema lineare** di due equazioni in due incognite la tabella $\begin{bmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{bmatrix}$ in cui sono sistemati i coefficienti delle incognite del sistema posto in forma canonica; si chiama **determinante della matrice** il numero reale $D=\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}=a\cdot b_1-b\cdot a_1$ ad essa associato.

Dalla generalizzazione del metodo di riduzione

$$\left(\frac{c\,b_1-b\,c_1}{a\,b_1-a_1\,b};\frac{a\,c_1-a_1\,c}{a\,b_1-a_1\,b}\right)\ con\ \ a\,b_1-a_1\,b\neq 0$$

possiamo dedurre che:

Un **sistema lineare** è **determinato**, ammette cioè una sola coppia soluzione **se il determinante della matrice del sistema è diverso da zero**.

388 Stabilire se il sistema $\begin{cases}(x-1)(x+1)-3(x-2)=2(x-y+3)+x^2 \\ x(x+y-3)+y(4-x)=x^2-4x+y\end{cases}$ è determinato.

389 Verificare che il determinante della matrice del sistema $\begin{cases}\frac{3}{2}x-\frac{7}{4}y=10^5 \\ 6x-7y=5^{10}\end{cases}$ è nullo.

La regola di Cramer, dal nome del matematico svizzero Gabriel Cramer (1704-1752), ci permette di stabilire la coppia soluzione di un sistema lineare di due equazioni in due incognite, costruendo e calcolando tre determinanti:

- D il determinante della matrice del sistema: $D=\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}=a\cdot b_1-b\cdot a_1$
- D_x il determinante $D_x=\begin{vmatrix} c & b \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix}=c\cdot b_1-b\cdot c_1$ della matrice ottenuta sostituendo in D agli elementi della prima colonna i termini noti. Osserviamo che questo numero è il numeratore della frazione (*)
- D_y il determinante $D_y=\begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}=a\cdot c_1-c\cdot a_1$ della matrice ottenuta sostituendo in D agli elementi della seconda colonna i termini noti. Osserviamo che questo numero è il numeratore della frazione (**)

Con la condizione $D\neq 0$ il sistema è determinato e la coppia soluzione è

$$x=\frac{D_x}{D};\quad y=\frac{D_y}{D}$$

<u>Esempio</u>

■ $\begin{cases}2x+3y=4 \\ 4x-3y=2\end{cases}$

Calcoliamo i determinanti

$D=\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}=a\cdot b_1-b\cdot a_1 \rightarrow D=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}=2\cdot(-3)-3\cdot 4=-6-12=-18$

Poiché $D\neq 0$ il sistema è determinato

$D_x=\begin{vmatrix} c & b \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix}=c\cdot b_1-b\cdot c_1 \rightarrow D_x=\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=4\cdot(-3)-3\cdot 2=-12-6=-18$

$D_y=\begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}=a\cdot c_1-c\cdot a_1 \rightarrow D_y=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=2\cdot 2-4\cdot 4=4-16=-12$

$x=\frac{D_x}{D}=\frac{-18}{-18}=1$

$y=\frac{D_y}{D}=\frac{-12}{-18}=\frac{2}{3}$.

Risolvere con la regola di Cramer i seguenti sistemi

390 $\begin{cases} x-3y=2 \\ x-2y=2 \end{cases}$ R. (2;0)

391 $\begin{cases} 2x+2y=3 \\ 3x-3y=2 \end{cases}$ *R.* $\left(\frac{13}{12};\frac{5}{12}\right)$

392 $\begin{cases} 5y+2x=1 \\ 3x+2y+2=0 \end{cases}$ *R.* $\left(-\frac{12}{11};\frac{7}{11}\right)$

393 $\begin{cases} 5x+2y=-1 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$ *R.* $\left(0;-\frac{1}{2}\right)$

394 $\begin{cases} \frac{1}{2}y-\frac{2}{3}y=2 \\ \frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y=1 \end{cases}$ *R.* $(21,-12)$

395 $\begin{cases} \frac{y}{5}-\frac{x}{2}=10 \\ \frac{x}{3}+\frac{y}{2}=5 \end{cases}$ R. $\left(-\frac{240}{19};\frac{350}{19}\right)$

396 $\begin{cases} 2(x-2y)+3x-2(y+1)=0 \\ x-2(x-3y)-5y=6(x-1) \end{cases}$ *R.* $\left(\frac{34}{37};\frac{16}{37}\right)$

397 $\begin{cases} 4-2x=\frac{3}{2}(y-1) \\ \frac{2x+3y}{2}=\frac{7+2x}{2} \end{cases}$ *R.* $\left(1;\frac{7}{3}\right)$

398 $\begin{cases} 3x+y=-3 \\ -2x+3y=-2 \end{cases}$ R. $(-1;0)$

399 $\begin{cases} 6x-2y=5 \\ x+\frac{1}{2}y=0 \end{cases}$ R. $\left(\frac{1}{2};-1\right)$

400 $\begin{cases} 10x-20y=-11 \\ x+y-1=0 \end{cases}$ R. $\left(\frac{3}{10};\frac{7}{10}\right)$

401 $\begin{cases} 2x-3y+1=0 \\ 4x+6y=0 \end{cases}$ R. $\left(-\frac{1}{4};\frac{1}{6}\right)$

402 $\begin{cases} x+2y=1 \\ 2x+4y=1 \end{cases}$ R. $\emptyset$

403 $\begin{cases} 3x+2y=4 \\ \frac{3}{2}x+y=2 \end{cases}$ R. $\mathbb{R}^+$

404 $\begin{cases} ax+ay=3a^2 \\ x-2y=-3a \end{cases}$ R. $(a;2a)$

405 $\begin{cases} 3x-2y=8k \\ x-y=3k \end{cases}$ R. $(2k;-k)$

406 Risolvi col metodo di Cramer il sistema $\begin{cases} 25x-3y=18 \\ \frac{3(y+6)}{5}=5x \end{cases}$. Cosa osservi?

►20. Classificazione dei sistemi rispetto alle soluzioni

Dato un sistema in forma canonica $\begin{cases} a\,x+b\,y=c \\ a_1\,x+b_1\,y=c_1 \end{cases}$ ricordando che:

$$D=\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}=a\cdot b_1-b\cdot a_1 \quad D_x=\begin{vmatrix} c & b \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix}=c\cdot b_1-b\cdot c_1 \quad D_y=\begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}=a\cdot c_1-c\cdot a_1$$

- Se D≠0 il sistema è **determinato**, esiste una sola coppia soluzione $x=\frac{D_x}{D}$; $y=\frac{D_y}{D}$
- Se D=0 si possono verificare due casi:
  - 1° caso: se $D_x=0$ e $D_y=0$ il sistema è **indeterminato**, tutte le coppie di numeri reali verificano entrambe le equazioni, $I.S.=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ **;**
  - 2° caso: se $D_x\neq0$ e $D_y\neq0$ il sistema è **impossibile**, non esiste alcuna coppia che soddisfa entrambi le equazioni e $I.S.=\emptyset$

<u>Esempi</u>

■ $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ 4x-3y=2 \end{cases}$

$D=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}=2\cdot(-3)-3\cdot(-3)=-6-9=-15\neq0$ il sistema è determinato.

■ $\begin{cases} 8x-6y=2 \\ 4x-3y=1 \end{cases}$

$D=\begin{vmatrix} 8 & -6 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}=8\cdot(-3)-4\cdot(-6)=-24+24=0$ il sistema è indeterminato o impossibile.

$D_x=\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=2\cdot(-3)-(-6)\cdot1=-6+6=0 \quad D_y=\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=8\cdot1-2\cdot4=8-8=0$

Il sistema è indeterminato.

■ $\begin{cases} 8x-6y=1 \\ 4x-3y=2 \end{cases}$

$D=\begin{vmatrix} 8 & -6 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}=8\cdot(-3)-4\cdot(-6)=-24+24=0$ il sistema è indeterminato o impossibile.

$D_x=\begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=1\cdot(-3)-(-6)\cdot2=-3+12=+9 \quad D_y=\begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=8\cdot2-1\cdot4=16-4=12$

Il sistema è impossibile.

Osserviamo che se D=0 si ha $a\cdot b_1-b\cdot a_1=0 \rightarrow a\cdot b_1=b\cdot a_1 \rightarrow \frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}$. Ciò significa che, se i coefficienti delle incognite della prima equazione sono proporzionali ai coefficienti delle incognite della seconda equazione allora il sistema è indeterminato o impossibile.

In particolare, se poi $D_x=0$ si ha $c\cdot b_1-b\cdot c_1=0 \rightarrow c\cdot b_1=b\cdot c_1 \rightarrow \frac{c}{c_1}=\frac{b}{b_1}$. Quindi se anche i termini noti delle due equazioni sono nella stessa proporzione, cioè se $\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}$ il sistema è indeterminato.

Se invece $D_x\neq0$, cioè $\frac{c}{c_1}\neq\frac{b}{b_1}$ il sistema è impossibile.

Per ciascuno dei seguenti sistemi stabilisci se è determinato, indeterminato, impossibile.

407 $\begin{cases} x-2y=3 \\ 4x-8y=12 \end{cases}$

408 $\begin{cases} x-2y=3 \\ 2x-4y=5 \end{cases}$

409 $\begin{cases} x-2y=3 \\ 2x-6y=12 \end{cases}$

410 $\begin{cases} \frac{1}{2}x-\frac{3}{2}y=-2 \\ \frac{5}{4}x-\frac{15}{4}y=-\frac{5}{2} \end{cases}$

411 $\begin{cases} \frac{1}{7}x-\frac{4}{5}y=0 \\ \frac{5}{4}x-7y=\frac{19}{2} \end{cases}$

412 $\begin{cases} 2x+y=1 \\ 2x-y=-1 \end{cases}$

413 $\begin{cases} -40x+12y=-3 \\ 17x-2y=100 \end{cases}$

414 $\begin{cases} x-y=3 \\ -x+y=1 \end{cases}$

415 $\begin{cases} -x+3y=-\frac{8}{15} \\ 5x-15y=\frac{2^3}{3} \end{cases}$

416 $\begin{cases} \frac{x}{2}=-\frac{y}{2}+1 \\ x+y=2 \end{cases}$

417 La somma di due numeri reali è 16 e il doppio del primo aumentato di 4 uguaglia la differenza tra 5 e il doppio del secondo. Stabilisci, dopo aver formalizzato il problema con un sistema lineare, se è possibile determinare i due numeri.

418 Stabilisci per quale valore di a il sistema $\begin{cases} ax+y=-2 \\ -3x+2y=0 \end{cases}$ è determinato. Se $a=-\frac{3}{2}$ il sistema è indeterminato o impossibile?

419 Perché se $a=\frac{1}{3}$ il sistema $\begin{cases} x+ay=2a \\ 3x+y=2 \end{cases}$ è indeterminato?

420 $\begin{cases} 2x-3ky=2k \\ x-ky=2k \end{cases}$ per quale valore di k il sistema è impossibile?

421 $\begin{cases} (k-2)x+3y=6 \\ (k-1)x+4y=8 \end{cases}$ per quale valore di k il sistema è indeterminato?

►21. Il metodo grafico

Il problema della ricerca dell'Insieme Soluzione di un'equazione lineare ci ha condotto ad un proficuo collegamento tra concetti algebrici e concetti geometrici; in particolare abbiamo visto che:

Concetto algebrico	Concetto geometrico
Coppia ordinata di numeri reali	Punto del piano dotato di riferimento cartesiano
Equazione lineare	Retta
Coppia soluzione dell'equazione $ax+by+c=0$	Punto della retta di equazione $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

Vedremo ora come sia possibile sfruttare questi collegamenti per risolvere un sistema lineare di due equazioni in due incognite.

Problema

Determina due numeri reali di cui si sa che la loro somma è 6 e il doppio del primo aumentato della metà del secondo è ancora 6.

Indichiamo con x e y i due numeri incogniti; il problema si formalizza con due equazioni:

$$x+y=6 \quad \text{e} \quad 2x+\frac{1}{2}y=6$$

Dobbiamo individuare una coppia di numeri reali che sia soluzione dell'una e dell'altra equazione.

Il punto di vista algebrico:

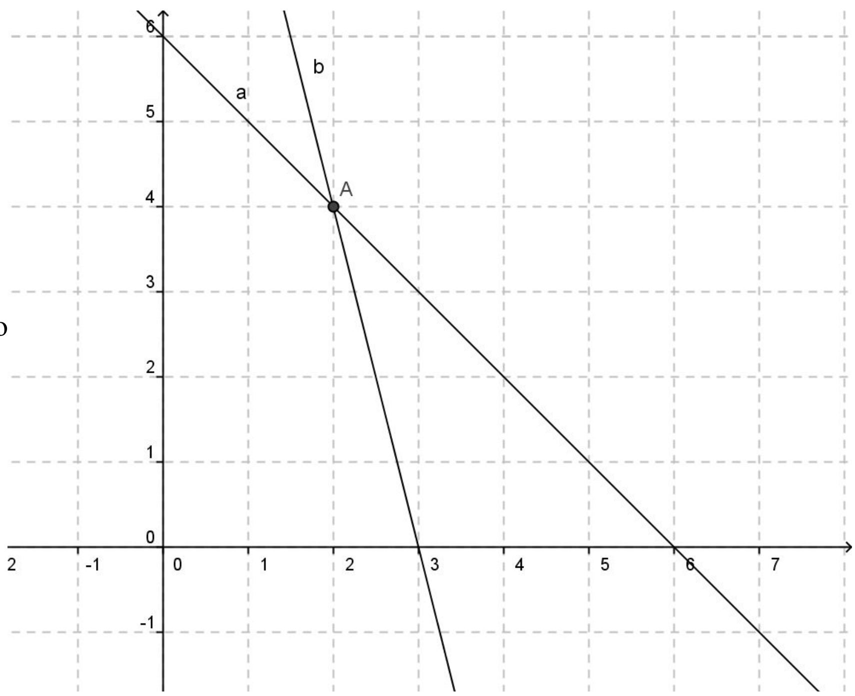
La coppia di numeri reali x e y che risolve il problema è quella che risolve il sistema $\begin{cases} x+y=6 \\ 2x+\frac{1}{2}y=6 \end{cases}$.

Applicando uno qualunque dei metodi algebrici esposti si ottiene x=2 e y=4.

Il punto di vista geometrico:

Il problema si può spostare in ambiente geometrico: la coppia soluzione rappresenta un punto che appartiene sia alla retta rappresentata dalla prima equazione sia alla retta rappresentata dalla seconda equazione, quindi il punto di intersezione delle due rette.

Si rappresenta nel riferimento cartesiano ortogonale il sistema:



La retta *a* è quella di equazione $x+y=6$, che passa per i punti (6,0) e (0,6).

La retta *b* è quella di equazione $2x+\frac{1}{2}y=6$, che passa per i punti (3,0) e (0,12).

Il punto A(2,4) è il punto di intersezione delle due rette, le sue coordinate formano la coppia soluzione del sistema e di conseguenza sono i due numeri che stiamo cercando nel problema.

Esempio

■ $\begin{cases} 2x-3y=7 \\ x+y+6=5(x-y+1) \end{cases}$

Il punto di vista algebrico:

Portiamo in forma canonica il sistema, otteniamo:

$\begin{cases} 2x-3y=7 \\ x+y+6=5(x-y+1) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x-3y=7 \\ x+y+6=5x-5y+5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x-3y=7 \\ -4x+6y=-1 \end{cases}$

Si può notare che il sistema ha i coefficienti delle incognite in proporzione: $\frac{a}{a_1}=\frac{2}{-4}=-\frac{1}{2}$;

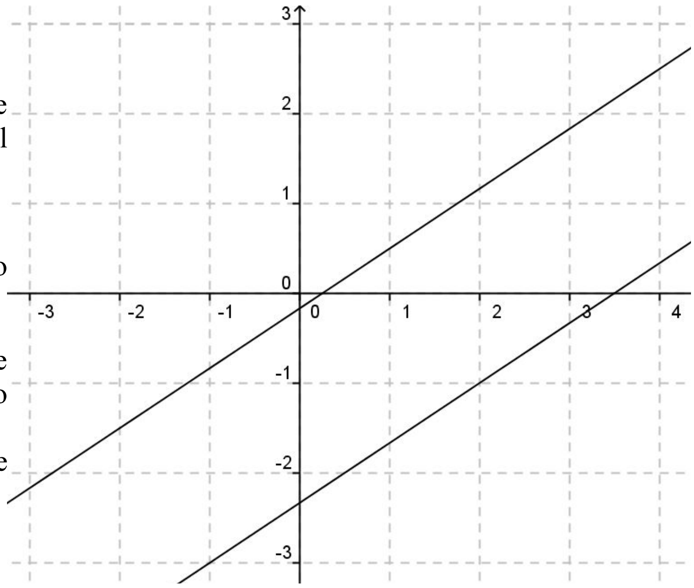
$\frac{b}{b_1}=\frac{-3}{+6}=-\frac{1}{2}$, mentre i termini noti non sono nella stessa proporzione $\frac{c}{c_1}=\frac{7}{-1}$ quindi il sistema è impossibile: $I.S.=\emptyset$.

Il punto di vista geometrico

Determiniamo le equazioni esplicite delle rette rappresentate dalle due equazioni lineari del sistema assegnato. Si ha:

$\begin{cases} y=\frac{2}{3}x-\frac{7}{3} \\ y=\frac{2}{3}x-1 \end{cases}$ le due rette hanno lo stesso coefficiente angolare, il coefficiente della x e quindi hanno la stessa inclinazione, pertanto sono parallele.

Non hanno quindi nessun punto di intersezione $r_1 \cap r_2=\emptyset$, il sistema è impossibile $I.S.=\emptyset$.



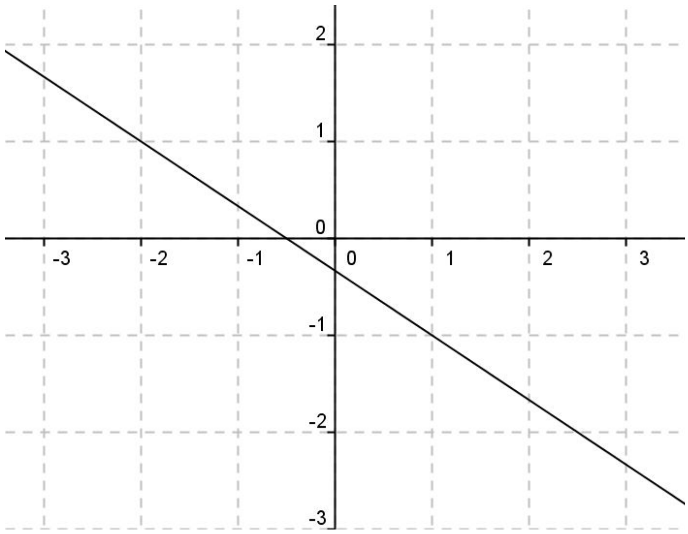
■ $\begin{cases} 2x+3y+1=0 \\ y+\frac{1}{3}=-\frac{2}{3}x \end{cases}$

Il punto di vista algebrico:

Scriviamo in forma canonica il sistema $\begin{cases} 2x+3y=-1 \\ 2x+3y=-1 \end{cases}$. Osserviamo che sono due equazioni identiche, pertanto il rapporto tra i coefficienti delle incognite e il rapporto tra i termini noti è sempre 1. Il sistema è indeterminato. D'altra parte, se le due equazioni sono identiche significa che tutte le infinite coppie (x, y) che rendono vera la prima equazione, verificano anche la seconda: $I.S.=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Il punto di vista geometrico:

Rappresentiamo nel riferimento cartesiano ortogonale le due rette aventi come equazioni le equazioni del sistema. E' semplice rendersi conto che le due rette coincidono: tutti i punti di una coincidono con tutti i punti dell’altra; $r_1 \cap r_2=r_1=r_2$.



Risolvi graficamente i sistemi, in base al disegno verifica se le rette sono incidenti, parallele o coincidenti e quindi se il sistema è determinato, impossibile o indeterminato:

422 $\begin{cases} y=2x-1 \\ y=2x+1 \end{cases}$ R. rette parallele, sistema impossibile

423 $\begin{cases} y=2x-2 \\ y=3x+1 \end{cases}$ R. (-3;-8)

424 $\begin{cases} y=x-1 \\ 2y=2x-2 \end{cases}$ R. rette identiche, sistema indeterminato

425 $\begin{cases} 2x-y=2 \\ 2y-x=2 \end{cases}$ R(2;2)

426 $\begin{cases} \frac{x}{3}=-\frac{y}{3}+1 \\ x+y=2 \end{cases}$ R. rette parallele, sistema impossibile

427 $\begin{cases} 3x+y=-3 \\ -2x+3y=-2 \end{cases}$ R. $(-1;0)$

428 $\begin{cases} x-3y=2 \\ x-2y=2 \end{cases}$ R. (2;0)

429 $\begin{cases} 3x+y=-3 \\ -2x+3y=-2 \end{cases}$ R. $(-1;0)$

430 $\begin{cases} 5x+2y=-1 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$ $R.\ \left(0;-\frac{1}{2}\right)$

431 $\begin{cases} 2x=3-x \\ 2x+y=3 \end{cases}$ R.(1;1)

432 $\begin{cases} 2x=2-y \\ 2x-y=1 \end{cases}$ $R.\left(\frac{3}{4};\frac{1}{2}\right)$

433 *Vero / Falso*

Risolvere graficamente un sistema lineare significa trovare il punto di intersezione di due rette	V	F
Un sistema lineare, determinato ha una sola coppia soluzione	V	F
Un sistema lineare è impossibile quando le due rette coincidono	V	F

434 Completa:

se $r_1 \cap r_2 = r_1 = r_2$ allora il sistema è ………………………………

se $r_1 \cap r_2 = P$ allora il sistema è ………………………………

se $r_1 \cap r_2 = \emptyset$ allora il sistema è ………………………………

Risolvi i seguenti sistemi con più metodi ed eventualmente controlla la soluzione graficamente

435 $\begin{cases}2x+y=1\\2x-y=-1\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}$ $\begin{cases}2x=1+3y\\-y-2x=3\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=-1\\y=-1\end{cases}$

436 $\begin{cases}-x+2y=1\\3x-y=3\end{cases}$ R. $\left(\frac{7}{5};\frac{6}{5}\right)$ $\begin{cases}5x-y=2\\2x+3y=-1\end{cases}$ R. $\left(\frac{5}{17};-\frac{9}{17}\right)$

437 $\begin{cases}x+2y=3\\3x-y=2\end{cases}$ R. $(1;1)$ $\begin{cases}2x-y=1\\x+2y=2\end{cases}$ R. $\left(\frac{4}{5};\frac{3}{5}\right)$

438 $\begin{cases}5x+3y=2\\3x-2y=1\end{cases}$ R. $\left(\frac{7}{19};\frac{1}{19}\right)$ $\begin{cases}7x-2y=4\\8x-6y=9\end{cases}$ R. $\left(\frac{3}{13};-\frac{31}{26}\right)$

439 $\begin{cases}3x-2y=4\\2x+3y=5\end{cases}$ R. $\left(\frac{22}{13};\frac{7}{13}\right)$ $\begin{cases}3x-y=7\\x-2y=5\end{cases}$ R. $\left(\frac{9}{5};-\frac{8}{5}\right)$

440 $\begin{cases}3x-2y=2\\2y-2x=-\frac{4}{3}\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=\frac{2}{3}\\y=0\end{cases}$ $\begin{cases}5x-2x=7\\-x-2y=-\frac{1}{2}\end{cases}$ R. $\left(\frac{7}{3};-\frac{11}{12}\right)$

441 $\begin{cases}\frac{2}{3}x-2y=-\frac{1}{6}\\-y-\frac{2}{3}y=\frac{3}{2}\end{cases}$ R. $\left(-\frac{59}{20};-\frac{9}{10}\right)$ $\begin{cases}\frac{1}{3}x-\frac{3}{2}y+1=0\\9y-2x-6=0\end{cases}$ indeterminato

442 $\begin{cases}-\frac{1}{3}x+\frac{3}{2}y-1=0\\3x-\frac{1}{5}y+\frac{3}{2}=0\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=-\frac{123}{266}\\y=\frac{75}{133}\end{cases}$ $\begin{cases}-\frac{2}{3}y+3x=y\\x-\frac{1}{2}y+3=0\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=-30\\y=-54\end{cases}$

443 $\begin{cases}5y+\frac{3}{2}x=-2\\3x+10y-3=0\end{cases}$ impossibile $\begin{cases}\frac{1}{2}x-3y=\frac{1}{2}\\3(y-2)+x=0\end{cases}$ R. $\left(\frac{13}{3};\frac{5}{9}\right)$

444 $\begin{cases}2x+y=0\\x-2y=-5\end{cases}$ R. $(-1;2)$ $\begin{cases}x+y=-1\\x-y=5\end{cases}$ R. $(2;-3)$

445 $\begin{cases}2x+2y=6\\x-2y=-3\end{cases}$ R. $(3;3)$ $\begin{cases}2x-y=3\\x-2y=0\end{cases}$ R. $(2;1)$

446 $\begin{cases}\frac{1}{3}x+3y+2=0\\2x-\frac{1}{2}y=\frac{11}{2}\end{cases}$ R. $(3;-1)$ $\begin{cases}\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y=1\\\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y=1\end{cases}$ R. $(1;1)$

447 $\begin{cases}2x-y=0\\4x+\frac{1}{2}y=\frac{5}{2}\end{cases}$ R. $\left(\frac{1}{2};1\right)$ $\begin{cases}2x+\frac{1}{2}y=\frac{3}{10}\\7x+23y=6\end{cases}$ R. $\left(-\frac{1}{5};\frac{1}{5}\right)$

448 $\begin{cases}2x+y-3=0\\4x+2y+6=0\end{cases}$ R. $\mathbb{R}^+$ $\begin{cases}2x-y=-1\\x+\frac{1}{2}y=-\frac{1}{2}\end{cases}$ R. $\left(-\frac{1}{2};0\right)$

449 $\begin{cases}\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y=1\\3x-2y=3\end{cases}$ R. $\emptyset$ $\begin{cases}8x-\frac{29}{10}y=7\\5x-\frac{2}{3}y=12\end{cases}$ R. $\left(\frac{8}{5};-2\right)$

450 $\begin{cases}\frac{1}{2}(x-3)-y=\frac{3}{2}(y-1)\\\frac{3}{2}(y-2)+x=6\left(x+\frac{1}{3}\right)\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=-\frac{50}{47}\\y=-\frac{10}{47}\end{cases}$ $\begin{cases}\frac{x+4y}{6}-3=0\\\frac{x}{2}-\frac{y}{4}=0\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=2\\y=4\end{cases}$

451 $\begin{cases} 3(x-4)=-\dfrac{4y}{5} \\ 7(x+y)+8\left(x-\dfrac{3y}{8}-2\right)=0 \end{cases}$ indeterminato

452 $\begin{cases} \dfrac{2}{5}(y-x-1)=\dfrac{y-x}{3}-\dfrac{2}{5} \\ (x-y)^2-x(x-2y)=x+y(y-1) \end{cases}$

453 $\begin{cases} 2x-3(x-y)=-1+3y \\ \dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{3}y=-\dfrac{1}{6} \end{cases}$ *R.* $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$

454 $\begin{cases} (y+2)(y-3)-(y-2)^2+(x+1)^2=(x+3)(x-3)-\dfrac{1}{2} \\ \left(y-\dfrac{1}{2}\right)\left(y+\dfrac{1}{4}\right)-(y-1)^2+2x+3=\dfrac{3}{4} \end{cases}$ *R.* $\begin{cases} x=-1 \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

455 $\begin{cases} \dfrac{\dfrac{x}{2}-y+5}{\dfrac{4}{3}-\dfrac{5}{6}}=x-\dfrac{\dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}}{2} \\ -x-\dfrac{\dfrac{y}{3}-x}{2}=1 \end{cases}$ *R.* $\begin{cases} x=-\dfrac{92}{27} \\ y=\dfrac{38}{9} \end{cases}$

456 $\begin{cases} x^2+\dfrac{y}{4}-3x=\dfrac{(2x+1)^2}{4}-\dfrac{y}{2} \\ (y-1)^2=-8x+y^2 \end{cases}$ *R.* $\begin{cases} x=\dfrac{1}{8} \\ y=1 \end{cases}$

457 $\begin{cases} \dfrac{\dfrac{x+1}{2}-y}{2}=y-20x \\ x-\dfrac{y}{4}=\dfrac{x-y}{6} \end{cases}$ *R.* $\begin{cases} x=-\dfrac{1}{21} \\ y=-\dfrac{10}{21} \end{cases}$

458 $\begin{cases} \dfrac{4y-\dfrac{5}{2}x+\dfrac{3}{2}}{\dfrac{5}{6}}=x-2y \\ x=3y \end{cases}$ *R.* $\begin{cases} x=\dfrac{27}{26} \\ y=\dfrac{9}{26} \end{cases}$

►22. Sistemi fratti

Nel seguente sistema $\begin{cases} \dfrac{2}{x+1}-\dfrac{3}{y-2}=\dfrac{2x-5y+4}{xy+y-2-2x} \\ 3y+2(x-y-1)=5x-8(-x-2y+1) \end{cases}$ di due equazioni in due incognite, la prima equazione presenta le incognite anche al denominatore.

DEFINIZIONE. Si chiama **sistema fratto o frazionario** il sistema in cui almeno in una delle equazioni che lo compongono compare l'incognita al denominatore.

Poiché risolvere un sistema significa determinare tutte le coppie ordinate che verificano entrambe le equazioni, nel sistema fratto dovremo innanzi tutto definire il Dominio o Insieme di Definizione nel quale individuare le coppie soluzioni.

DEFINIZIONE. Si chiama **Dominio** (**D**) o **Insieme di Definizione** (**I.D.**) del sistema fratto, l'insieme delle coppie ordinate che rendono diverso da zero i denominatori che compaiono nelle equazioni.

Esempi

■ $\begin{cases} \dfrac{2}{x+1}-\dfrac{3}{y-2}=\dfrac{2x-5y+4}{xy+y-2-2x} \\ 3y+2(x-y-1)=5x-8(-x-2y+1) \end{cases}$

1° passo: scomponiamo i denominatori nella prima equazione per determinare il m.c.m.

$\begin{cases} \dfrac{2}{x+1}-\dfrac{3}{y-2}=\dfrac{2x-5y+4}{(x+1)(y-2)} \\ 3y+2(x-y-1)=5x-8(-x-2y+1) \end{cases} \rightarrow \quad m.c.m.=(x+1)(y-2)$

2° passo: poniamo le **C**ondizioni di **E**sistenza da cui determineremo il **D**ominio del sistema:

$C.E.\ x\neq -1 \ e \ y\neq 2 \ \rightarrow \ D=I.S.=\{(x;y)\in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x\neq -1 \ e \ y\neq 2\}$.

3° passo: riduciamo allo stesso denominatore la prima equazione, svolgiamo i calcoli nella seconda per ottenere la forma canonica: $\begin{cases} -5x+7y=11 \\ 11x+15y=6 \end{cases}$

4° passo: risolviamo il sistema e otteniamo la coppia soluzione $\left(-\dfrac{123}{152};\dfrac{151}{152}\right)$ che è accettabile.

■ $\begin{cases} \dfrac{3x+y-1}{x}=3 \\ \dfrac{2x+3y}{y-1}=7 \end{cases}$

1°passo: per la prima equazione si ha $m.c.m.=x$; per la seconda $m.c.m.=y-1$

2° passo: poniamo le **C**ondizioni di **E**sistenza da cui determineremo il **D**ominio:

$C.E.\ x\neq 0 \ e \ y\neq 1 \ \rightarrow \ D=I.S.=\{(x;y)\in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x\neq 0 \ e \ y\neq 1\}$

3° passo: riduciamo allo stesso denominatore sia la prima che la seconda equazione: $\begin{cases} 3x+y-1=3x \\ 2x+3y=7y-7 \end{cases}$

4° passo: determiniamo la forma canonica: $\begin{cases} y-1=0 \\ 2x-4y=-7 \end{cases}$

5° passo: determiniamo con un qualunque metodo la coppia soluzione: $\left(-\dfrac{3}{2};1\right)$ che non accettabile poiché contraddice la C.E. e quindi non appartiene al dominio. Il sistema assegnato è quindi impossibile $I.S.=\emptyset$.

Verifica l'insieme soluzione dei seguenti sistemi

459 $\begin{cases} \dfrac{4y+x}{5x}=1 \\ \dfrac{x+y}{2x-y}=2 \end{cases}$ indeterminato $\qquad \begin{cases} y=\dfrac{4x-9}{12} \\ \dfrac{y+2}{y-1}+\dfrac{1+2x}{1-x}+1=0 \end{cases}$ R. $\left(-\dfrac{9}{8},-\dfrac{9}{8}\right)$

460 $\begin{cases} 2+\dfrac{3y}{x}=\dfrac{1}{x} \\ \dfrac{3x}{y}-1=\dfrac{-2}{y} \end{cases}$ *R.* $\begin{cases} x=-\dfrac{5}{11} \\ y=\dfrac{7}{11} \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} \dfrac{y}{2x-1}=-1 \\ \dfrac{2x}{y-1}=1 \end{cases}$ impossibile

461 $\begin{cases} \dfrac{3x}{y}-\dfrac{7}{y}=1 \\ \dfrac{2y}{x}+\dfrac{5}{x}=1 \end{cases}$ *R.* $\begin{cases} x=\dfrac{9}{5} \\ y=-\dfrac{8}{5} \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} \dfrac{2x}{3y}-\dfrac{1}{3y}=1 \\ \dfrac{3}{y+2x}=-1 \end{cases}$ *R.* $\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$

462 $\begin{cases} \dfrac{x}{9y}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3y} \\ \dfrac{9y}{2x}-1-\dfrac{3}{x}=0 \end{cases}$ impossibile $\qquad \begin{cases} \dfrac{x}{2-\dfrac{y}{2}-2}=1 \\ \dfrac{x-y}{x+\dfrac{3}{2}y-1}=1 \end{cases}$ *R.* $\begin{cases} x=-\dfrac{1}{5} \\ y=\dfrac{2}{5} \end{cases}$

463 $\begin{cases} \dfrac{\dfrac{x}{2}+\dfrac{2y}{3}-\dfrac{1}{6}}{x+y-2}=6 \\ x+y=1 \end{cases}$ *R.* $\begin{cases} x=39 \\ y=-38 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} \dfrac{x-2y}{4}=\dfrac{\dfrac{x-y}{2}+2x}{4} \\ \dfrac{x}{\dfrac{y}{3}+1}=1 \end{cases}$ *R.* $\begin{cases} x=\dfrac{3}{4} \\ y=-\dfrac{3}{4} \end{cases}$

464 $\begin{cases} \dfrac{x+3y-1}{x-y}=\dfrac{1}{y-x} \\ x=2y-10 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=-6 \\ y=2 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} \dfrac{2}{x-2}-\dfrac{3}{y+3}=1 \\ \dfrac{5}{y+3}=\dfrac{6}{2-x}-4 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=-2 \\ y=-5 \end{cases}$

465 $\begin{cases} y-\dfrac{x}{3}+\dfrac{3}{4}=0 \\ \dfrac{2x+1}{1-x}+\dfrac{2+y}{y-1}=-1 \end{cases}$ *R.* $\begin{cases} x=-\dfrac{9}{8} \\ y=-\dfrac{9}{8} \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x+y=2 \\ y\left(\dfrac{x}{y}+3\right)=4 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

466 $\begin{cases} \dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{2}=0 \\ \dfrac{y(y-x-1)}{y+1}+x-y+1=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ R. impossibile

467 $\begin{cases} \dfrac{3x-7y+1}{4x^2-9y^2}=\dfrac{4}{18y^2-8x^2} \\ \dfrac{4(1-3x)^2}{2}-y=\dfrac{(12x-5)(6x-y)}{4}+3xy+2 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=-\dfrac{3}{17} \\ y=\dfrac{6}{17} \end{cases}$

468 $\begin{cases} \dfrac{2x-3y}{x-2y}-\dfrac{3y-1}{x+5y}=\dfrac{2(x^2+2xy)-(3y-2)^2}{x^2+3xy-10y^2} \\ x+y=-19 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=-18 \\ y=-1 \end{cases}$

469 $\begin{cases} \dfrac{x-3}{x-3y+1}+\dfrac{xy-y}{x-3y-1}=\dfrac{x^2-3xy+x^2y-3xy^2+3y^2}{x^2+9y^2-6xy-1} \\ \dfrac{x-3}{5y-1}-\dfrac{y-3}{1+5y}=\dfrac{x+5y^2-5xy+2}{1-25y^2} \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=\dfrac{7}{4} \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

470 $\begin{cases} \dfrac{x-2y}{x^2-xy-2y^2}-\dfrac{1}{y}=2 \\ \dfrac{4}{y}-\dfrac{5}{x+y}=-9 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$

471 $\begin{cases} 2x-y-11=0 \\ \dfrac{y+1}{x-1}+\dfrac{3-y}{5x-5}-\dfrac{2}{3}=0 \end{cases}$

472 $\begin{cases} \dfrac{x+1}{x}=\dfrac{y+2}{y-2} \\ \dfrac{3x-1}{3x-2}=\dfrac{1+y}{y-2} \end{cases}$

473 $\begin{cases} \dfrac{2}{5x-y}=\dfrac{-3}{5y-x} \\ \dfrac{1}{4x-3y}=\dfrac{2x+y-1}{3y-4x} \end{cases}$

474 $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{3}}{x-\sqrt{2}}+\dfrac{2\sqrt{2}}{y-\sqrt{3}}=0 \\ \dfrac{1}{x-\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{6}}{2(y+2\sqrt{2})}=0 \end{cases}$

475 $\begin{cases} \dfrac{x-y+1}{x+y-1}=2 \\ \dfrac{x+y+1}{x-y-1}=-2 \end{cases}$

476 $\begin{cases} \dfrac{2}{x-2}=\dfrac{3}{y-3} \\ \dfrac{1}{y+3}=\dfrac{-1}{2-x} \end{cases}$

►23. Sistemi letterali

DEFINIZIONE. Si chiama **sistema letterale** il sistema in cui oltre alle incognite, solitamente indicate con x e y, compaiono altre lettere dette parametri.

Distinguiamo tre casi distinti di discussione

A. Le equazioni sono lineari e il parametro si trova solo al numeratore

Esempio

■ $\begin{cases} 2ax-(a-1)y=0 \\ -2x+3y=a \end{cases}$

E' un sistema letterale in quanto, reso in forma canonica, presenta un parametro nei suoi coefficienti. Esso è lineare, pertanto la coppia soluzione, se esiste, dipenderà dal valore del parametro.
Per **discussione del sistema letterale** s'intende l'analisi e la ricerca dei valori che attribuiti al parametro rendono il sistema determinato (in tal caso si determina la soluzione) ma anche scartare i valori del parametro per cui il sistema è impossibile o indeterminato.
Per discutere il sistema usiamo il metodo di Cramer.

- 1° passo: calcoliamo il determinante del sistema: $D=\begin{vmatrix} 2a & -(a-1) \\ -2 & 3 \end{vmatrix}=4a+2$
- 2° passo: determiniamo il valore del parametro che rende D diverso da zero:
  $4a+2\neq 0 \rightarrow a\neq 0-\frac{1}{2}$. Se $a\neq -\frac{1}{2}$ il sistema è determinato.
- 3° passo: calcoliamo i determinanti D_x e D_y per trovare la coppia soluzione
  $D_x=\begin{vmatrix} 0 & -(a-1) \\ a & 3 \end{vmatrix}=a\cdot(a-1)$ $D_y=\begin{vmatrix} 2a & 0 \\ -2 & a \end{vmatrix}=2a^2$ $\rightarrow$ $x=\frac{a\cdot(a-1)}{4a+2}$; $y=\frac{2a^2}{4a+2}$
- 4° passo: Il determinante è nullo se $a=-\frac{1}{2}$ **;** poiché per questo valore di a i determinanti D_x e D_y sono diversi da zero si ha che per $a=-\frac{1}{2}$ il sistema è impossibile.

Riassumendo si ha:

Condizioni sul parametro	Insieme Soluzione	Sistema
$a\neq -\frac{1}{2}$	$I.S=\left\{\left(\frac{a\cdot(a-1)}{4a+2};\frac{2a^2}{4a+2}\right)\right\}$	determinato
$a=-\frac{1}{2}$	$I.S.=\emptyset$	impossibile

B. Il parametro compare al denominatore in almeno una equazione del sistema

Esempio

■ $\begin{cases} \frac{y+a}{3}-\frac{a-x}{a-1}=a \\ \frac{x+2a}{a}-3=\frac{y}{2}-a \end{cases}$

Il sistema non è fratto pur presentando termini frazionari nelle sue equazioni; la presenza del parametro al denominatore ci obbliga ad escludere dall'insieme R quei valori che annullano il denominatore.
Se $a=1$ oppure $a=0$ ciascuna equazione del sistema è priva di significato, pertanto lo è anche il sistema.
Con le condizioni di esistenza $C.E.\ a\neq 1\ e\ a\neq 0$ possiamo ridurre allo stesso denominatore ciascuna equazione e condurre il sistema alla forma canonica: $\begin{cases} 3x+(a-1)y=2a^2+a \\ 2x-ay=2a-2a^2 \end{cases}$

- 1° passo: calcoliamo il determinante del sistema: $D=\begin{vmatrix} 3 & (a-1) \\ 2 & -a \end{vmatrix}=2-5a$

- 2° passo: determiniamo il valore del parametro che rende D diverso da zero: $2-5a\neq 0 \rightarrow a\neq \frac{2}{5}$

  Se $a\neq \frac{2}{5}$ il sistema è determinato.
- 3° passo: calcoliamo i determinanti D_x e D_y per trovare la coppia soluzione

$$D_x=\begin{vmatrix} 2a^2+a & -(a-1) \\ 2a-2a^2 & 3 \end{vmatrix}=a\cdot(2a-5),\quad D_y=\begin{vmatrix} 3 & 2a^2+a \\ 2 & 2a-2a^2 \end{vmatrix}=2a\cdot(2-5a)$$

$$x=\frac{a\cdot(2-5a)}{2-5a};\ y=\frac{2a\cdot(2-5a)}{2-5a}\quad \text{e semplificando}\quad (a\,;\,2a)$$

- 4° passo: Il determinante è nullo se $a=\frac{2}{5}$ **;** poiché anche i determinanti D_x e D_y si annullano si ha

  Se $a=\frac{2}{5}$ il sistema è indeterminato.

Riassumendo si ha:

Condizioni sul parametro	Insieme Soluzione	Sistema
$a=0 \vee a=1$		privo di significato
$a\neq \frac{2}{5}$ **e** $a\neq 1$ e $a\neq 0$	$I.S=\{(a\,;\,2a)\}$	determinato
$a=\frac{2}{5}$	$I.S.=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$	indeterminato

C. Il sistema è frazionario

Esempio

■ $\begin{cases} \dfrac{y-a}{x}=\dfrac{2}{a} \\ x+y=1 \end{cases}$

Il sistema letterale è fratto e nel denominatore oltre al parametro compare l'incognita x:
Se $a=0$ la prima equazione, e di conseguenza tutto il sistema, è privo di significato; per poter procedere alla ricerca dell'**I**nsieme **S**oluzione poniamo sul parametro la condizione di esistenza $C.E.\ a\neq 0$. (*)
Essendo fratto dobbiamo anche stabilire il Dominio del sistema $D=\{(x\,;\,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\mid x\neq 0\}$ (**)

- 1° passo: portiamo nella forma canonica: $\begin{cases} -2x+a\,y=a^2 \\ x+y=1 \end{cases}$ $con\ a\neq 0\ e\ x\neq 0$
- 2° passo: calcoliamo il determinante del sistema: $D=\begin{vmatrix} -2 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-2-a=-(2+a)$
- 3° passo: determiniamo il valore del parametro che rende D diverso da zero: $-2-a\neq 0\rightarrow a\neq -2$
  Se $a\neq -2$ il sistema è determinato.
- 4° passo: calcoliamo i determinanti D_x e D_y per trovare la coppia soluzione
  $D_x=\begin{vmatrix} a^2 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=a\cdot(a-1)\quad D_y=\begin{vmatrix} -2 & a^2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-2-a^2=-(2+a^2)\quad \rightarrow\quad x=-\frac{a\cdot(a-1)}{2+a};\ y=\frac{a^2+2}{2+a}$

  è la coppia soluzione accettabile se $x=-\frac{a\cdot(a-1)}{2+a}\neq 0$ per quanto stabilito in (**); essendo $a\neq 0$ per la (*) la coppia soluzione è accettabile se $a\neq 1$.
- 5° passo: il determinante D è nullo se $a=-2$; essendo i determinanti D_x e D_y diversi da zero si ha:
  se $a=-2$ il sistema è impossibile.

Riassumendo si ha:

Condizioni sul parametro	Condizioni sulle incognite	Insieme Soluzione	Sistema
	$x\neq 0$		
$a=0$			privo di significato
$a\neq -2\ e\ a\neq 0$		$I.S=\left\{\left(-\frac{a\cdot(a-1)}{2+a};\frac{a^2+2}{2+a}\right)\right\}$	determinato
$a\neq -2\ e\ a\neq 0\ e\ a\neq 1$		accettabile	
$a=-2$			impossibile

477 Risolvere e discutere il sistema: $\begin{cases} x+ay=2a \\ \frac{x}{2a}+y=\frac{3}{2} \end{cases}$; per quali valori di *a* la coppia soluzione è formata da numeri reali positivi? [R. a>0]

478 Perché se il sistema $\begin{cases} 3x-2y=0 \\ \frac{2x-y}{x+1}=\frac{1}{a} \end{cases}$ è determinato la coppia soluzione è accettabile?

479 Nel sistema $\begin{cases} \frac{a-x}{a^2+a}+\frac{y-2a}{a+1}=-1 \\ 2y=x \end{cases}$ è vero che la coppia soluzione è formata da numeri reali positivi se $a>2$?

480 Spiegate perché non esiste alcun valore di *a* per cui la coppia (0;2) appartenga a I.S. del sistema: $\begin{cases} 3x-2y=0 \\ \frac{2x-y}{x+1}=\frac{1}{a} \end{cases}$

481 Nel sistema $\begin{cases} \frac{y}{x}-\frac{y-a}{3}=\frac{1-y}{3} \\ a(x+2)+y=1 \end{cases}$ determinate i valori da attribuire al parametro a affinché la coppia soluzione accettabile sia formata da numeri reali positivi. $\left[R. -\frac{1}{2}<a<\frac{1}{2}\right]$

482 $\begin{cases} x+ay=2a \\ \frac{x}{2a}+y=\frac{3}{2} \end{cases}$ R. $a\neq 0 \rightarrow (a;1)$

483 $\begin{cases} \frac{x^3-8}{x-2}=x^2-3x+y-2 \\ \frac{x^2-4xy+3y^2}{3y-x}=k \end{cases}$ R. *Il sistema è determinato per* $k\neq 14, k\neq\frac{6}{7}$ *e le soluzioni sono* $\begin{cases} x=\frac{k-6}{4} \\ y=\frac{5k-6}{4} \end{cases}$ *; se* $k=14 \vee k=\frac{6}{7}$ *il sistema è impossibile.*

484 $\begin{cases} kx-y=2 \\ x+6ky=0 \end{cases}$ R. *Il sistema è determinato per ogni k e le soluzioni sono* $\begin{cases} x=\frac{12k}{6k^2+1} \\ y=-\frac{2}{6k^2+1} \end{cases}$

485 $\begin{cases} kx-8y=4 \\ 2x-4ky=3 \end{cases}$ R. *Se* $k\neq -2, k\neq 2$ *il sistema è determinato e le soluzioni sono* $\begin{cases} x=\frac{4k-6}{k^2-4} \\ y=\frac{8-3k}{4(k^2-4)} \end{cases}$ *; se* $k=-2$ *v* $k=2$ *il sistema è impossibile*

486 $\begin{cases} 4x-k^2y=k \\ kx-4ky=-3k \end{cases}$ R. *Se* $k\neq -4, k\neq 4, k\neq 0$ *il sistema è determinato e le soluzioni sono* $\begin{cases} x=\dfrac{3k^2+4k}{16-k^2} \\ y=\dfrac{k+12}{16-k^2} \end{cases}$ *; se* $k=-4$ *v* $k=4$ *il sistema è impossibile; se* $k=0$ *il sistema è indeterminato e le soluzioni sono del tipo* $\begin{cases} x=0 \\ y=t \end{cases}$ *con t reale.*

487 $\begin{cases} kx-4ky=-6 \\ kx-k^2y=0 \end{cases}$ R. *Se* $k\neq 0, k\neq 4$ *il sistema è determinato e le soluzioni sono* $\begin{cases} x=\dfrac{6}{4-k} \\ y=\dfrac{6}{k(4-k)} \end{cases}$ *; se* $k=0$ *v* $k=4$ *il sistema è impossibile.*

488 $\begin{cases} (k-1)x+(1-k)y=0 \\ (2-2k)x+y=-1 \end{cases}$ R. S*e* $k\neq 1, k\neq \dfrac{3}{2}$ *il sistema è determinato e le soluzioni sono* $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2k-3} \\ y=\dfrac{1}{2k-3} \end{cases}$ *; se* $k=\dfrac{3}{2}$ *il sistema è impossibile; se* $k=1$ *il sistema è indeterminato e le soluzioni sono del tipo* $\begin{cases} x=t \\ y=-1 \end{cases}$.

►24. Sistemi lineari di tre equazioni in tre incognite

Problema

Determinare tre numeri reali x, y, z (nell'ordine) tali che il doppio del primo uguagli l'opposto del secondo, la differenza tra il primo e il triplo del terzo sia nulla e la somma del secondo con il terzo supera il primo di 4 unità.

Formalizziamo le condizioni espresse nel testo attraverso equazioni lineari:

- il doppio del primo uguagli l'opposto del secondo $\rightarrow 2x=-y$
- la differenza tra il primo e il triplo del secondo sia nulla $\rightarrow x-3z=0$
- la somma del secondo con il terzo supera il primo di 4 unità $\rightarrow y+z=x+4$

Le tre condizioni devono essere vere contemporaneamente, quindi i tre numeri sono la terna soluzione del sistema di primo grado $\begin{cases}2x=-y\\x-3z=0\\y+z=x+4\end{cases}$ di tre equazioni in tre incognite.

Puoi ricavare la y dalla prima equazione e sostituire nelle altre due $\begin{cases}y=-2x\\x-3z=0\\-2x+z=x+4\end{cases}$ da cui $\begin{cases}y=-2x\\x-3z=0\\-3x+z=4\end{cases}$

Dalla seconda equazione ricaviamo x in funzione di z $\begin{cases}y=-2x\\x=3z\\-3x+z=4\end{cases}$

Sostituiamo il valore di x nell'ultima equazione $\begin{cases}y=-2x\\x=3z\\-3(3z)+z=4\end{cases}$

Risolviamo l'ultima equazione che è di primo grado in una sola incognita $\begin{cases}y=-2x\\x=3z\\z=-\frac{4}{8}=-\frac{1}{2}\end{cases}$

Sostituiamo il valore ottenuto di z nella seconda equazione $\begin{cases}y=-2x\\x=3\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}\\z=-\frac{4}{9}\end{cases}$

Infine sostituiamo il valore ottenuto di x nella prima equazione $\begin{cases}y=3\\z=-\frac{1}{2}\\x=-\frac{3}{2}\end{cases}$

■ $\begin{cases}3x+y-z=7\\x+3y+z=5\\x+y-3z=3\end{cases}$

Procediamo con il metodo di riduzione. Sommiamo le prime due equazioni: $4x+4y=12$

Moltiplichiamo la seconda equazione per 3 e sommiamo con la terza:

$3(x+3y+z)+x+y=3\cdot5+3=4x+10y=18$

Costruiamo il sistema di queste due equazioni nelle sole due incognite x e y: $\begin{cases}4x+4y=12\\4x+10y=18\end{cases}$

Moltiplichiamo la seconda equazione per –1 e sommiamo le due equazioni:

$\begin{cases}4x+4y=12\\-4x-10y=-18\end{cases} \rightarrow \begin{cases}4x+4y=12\\-4x-10y+4x+4y=-18+12\end{cases} \rightarrow \begin{cases}4x+4y=12\\-6y=-6 \rightarrow y=1\end{cases} \rightarrow \begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$

Sostituendo nella prima equazione del sistema ricaviamo la terza incognita: $\begin{cases}x=2\\y=1\\z=0\end{cases}$;

la terna soluzione del sistema assegnato è $(2;1;0)$.

Determinare la terna di soluzione dei seguenti sistemi

489 $\begin{cases} x-2y+z=1 \\ x-y=2 \\ x+3y-2z=0 \end{cases}$ R.(0; -2; 3) $\begin{cases} x+y+z=4 \\ x-3y+6z=1 \\ x-y-z=2 \end{cases}$ R. $\left(3;\frac{8}{9};\frac{1}{9}\right)$

490 $\begin{cases} x+2y-3z=6-3y \\ 2x-y+4z=x \\ 3x-z=y+2 \end{cases}$ R.(1; 1;0) $\begin{cases} 2x-y+3z=1 \\ x-2y+z=5 \\ x+2z=3 \end{cases}$ R:(-21, -7, 12)

491 $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ y-4z=0 \\ x-2y+z=2 \end{cases}$ R. $\left(\frac{3}{2};-\frac{2}{7};-\frac{1}{14}\right)$ $\begin{cases} x-3y+6z=1 \\ x+y+z=5 \\ x+2z=3 \end{cases}$ R.(-5; 6; 4)

492 $\begin{cases} x-4y+6z=2 \\ x+4y-z=2 \\ x+3y-2z=2 \end{cases}$ R.(2; 0; 0) $\begin{cases} 4x-y-2z=1 \\ 3x+2y-z=4 \\ x+y+2z=4 \end{cases}$ R.(1; 1; 1)

493 $\begin{cases} x-3y=3 \\ x+y+z=-1 \\ 2x-z=0 \end{cases}$ R.(0; -1; 0) $\begin{cases} 2x-y+3z=1 \\ x-6y+8z=2 \\ 3x-4y+8z=2 \end{cases}$ R. $\left(\frac{2}{3};-\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)$

494 $\begin{cases} 4x-6y-7z=-1 \\ x+y-z=1 \\ 3x+2y+6z=1 \end{cases}$ $\left(\frac{9}{31};\frac{17}{31};-\frac{5}{31}\right)$ $\begin{cases} 4x-3y+z=4 \\ x+4y-3z=2 \\ y-7z=0 \end{cases}$ R. $\left(\frac{7}{6};\frac{7}{30};\frac{1}{30}\right)$

495 $\begin{cases} 3x-6y+2z=1 \\ x-4y+6z=5 \\ x-y+4z=10 \end{cases}$ R.(5; 3; 2) $\begin{cases} 4x-y-7z=-12 \\ x+3y+z=-4 \\ 2x-y+6z=5 \end{cases}$ $\left(-\frac{60}{43};-\frac{53}{43};\frac{47}{43}\right)$

496 $\begin{cases} 2x+y-5z=2 \\ x+y-7z=-2 \\ x+y+2z=1 \end{cases}$ $\left(\frac{10}{3};-3;\frac{1}{3}\right)$ $\begin{cases} 3x-y+z=-1 \\ x-y-z=3 \\ x+y+2z=1 \end{cases}$ R.(6; 11; -8)

497 $\begin{cases} x-4y+2z=7 \\ -3x-2y+3z=0 \\ x-2y+z=1 \end{cases}$ $\left(-5;-\frac{33}{4};-\frac{21}{2}\right)$ $\begin{cases} -2x-2y+3z=4 \\ 2x-y+3z=0 \\ 2x+y=1 \end{cases}$ $\left(-\frac{5}{2};6;\frac{11}{3}\right)$

498 Quale condizione deve soddisfare il parametro *a* affinché il sistema $\begin{cases} x+y+z=\frac{a^2+1}{a} \\ ay-z=a^2 \\ y+ax=a+1+a^2z \end{cases}$ non sia privo di significato? Determina la terna soluzione assegnando ad a il valore 2.

499 Determina il dominio del sistema e stabilisci se la terna soluzione è accettabile:

$$\begin{cases} \frac{5}{1-x}+\frac{3}{y+2}=\frac{2x}{xy-2+2x-y} \\ \frac{x+1-3(y-1)}{xyz}=\frac{1}{xy}-\frac{2}{yz}-\frac{3}{xz} \\ x+2y+z=0 \end{cases}$$

500 Verifica se il sistema è indeterminato $\begin{cases} x+y=1 \\ y-z=5 \\ x+z+2=0 \end{cases}$

501 Determina il volume del parallelepipedo retto avente per base un rettangolo, sapendo che le dimensioni della base e l'altezza hanno come misura (rispetto al cm) i valori di x, y, z ottenuti risolvendo il sistema $\begin{cases} 3x+1=2y+3z \\ 6x+y+2z=7 \\ 9(x-1)+3y+4z=0 \end{cases}$

►25. Sistemi da risolvere con sostituzioni delle variabili

Alcuni sistemi possono essere ricondotti a sistemi lineare per mezzo di sostituzioni nelle variabili.

■ $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}=3 \\ \dfrac{2}{x}-\dfrac{4}{y}=-1 \end{cases}$

Con la seguente sostituzione di varibili (*) $\begin{cases} u=\dfrac{1}{x} \\ v=\dfrac{1}{y} \end{cases}$ il sistema diventa $\begin{cases} u+2v=3 \\ 2u-4v=-1 \end{cases}$.

Per risolverlo possiamo moltiplicare per 2 la prima equazione $\begin{cases} 2u+4v=6 \\ 2u-4v=-1 \end{cases}$

Sommando membro a membro abbiamo $4u=5$ dalla quale possiamo determinare $u=\dfrac{5}{4}$.

Per ricavare l'incognita v moltiplichiamo la prima equazione per -2, otteniamo $\begin{cases} -2u-4v=-6 \\ 2u-4v=-1 \end{cases}$

Sommando membro a membro abbiamo $-8v=-7$ da cui $v=\dfrac{7}{8}$.

Avendo trovato i valori delle incognite *u* e *v* possiamo ricavare x e y sostituire i valori trovati in (*):

$\begin{cases} \dfrac{5}{4}=\dfrac{1}{x} \\ \dfrac{7}{8}=\dfrac{1}{y} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{4}{5} \\ y=\dfrac{8}{7} \end{cases}$.

Risolvi i seguenti sistemi per mezzo di opportune sostituzioni delle variabili

502 $\begin{cases} \frac{1}{2x}+\frac{1}{y}=-4 \\ \frac{2}{3x}+\frac{2}{y}=1 \end{cases}$ sostituire $u=\frac{1}{x};\ v=\frac{1}{y}$ R. $\left(-\frac{1}{27};\frac{2}{19}\right)$

503 $\begin{cases} \frac{5}{2x}-\frac{2}{y}=2 \\ \frac{1}{x}+\frac{2}{y}=1 \end{cases}$ R. $\left(\frac{7}{6};14\right)$

504 $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{2}{y}=3 \\ \frac{1}{x}+\frac{3}{y}=4 \end{cases}$ R. $(1;1)$

505 $\begin{cases} \frac{2}{x}+\frac{4}{y}=-3 \\ \frac{2}{x}-\frac{3}{y}=4 \end{cases}$ R. $(2;-1)$

506 $\begin{cases} \frac{1}{x+1}-\frac{2}{y-1}=2 \\ \frac{2}{x+1}-\frac{1}{y-1}=3 \end{cases}$ R. $\left(-\frac{1}{4};-2\right)$

507 $\begin{cases} \frac{1}{x}-\frac{3}{y}+\frac{2}{z}=3 \\ \frac{2}{x}-\frac{3}{y}+\frac{2}{z}=4 \\ \frac{2}{x}+\frac{4}{y}-\frac{1}{z}=-3 \end{cases}$ R. $\left(1;-\frac{5}{8};-\frac{5}{7}\right)$

508 $\begin{cases} x^3+y^3=9 \\ 2x^3-y^3=-6 \end{cases}$ R. $(1;2)$

509 $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ x^2-y^2=5 \end{cases}$ sostituire $u=x^2;\ v=y^2$ R. $(3;2),(-3;2),(3;-2),(-3;-2)$

510 $\begin{cases} x^2+y^2=-1 \\ x^2-3y^2=12 \end{cases}$ Nessuna soluzione reale

511 $\begin{cases} \frac{4}{x^2}-\frac{2}{y^2}-\frac{2}{z^2}=0 \\ \frac{1}{x^2}+\frac{1}{z^2}=2 \\ \frac{2}{y^2}-\frac{2}{z^2}=0 \end{cases}$ R. $(1;1;1),(-1;1;1),(1;-1;1),(1;1;-1),$ $(-1;-1;1);(-1;1;-1),$ $(1;-1;-1),(-1;-1;-1)$

512 $\begin{cases} \frac{1}{x+y}+\frac{2}{x-y}=1 \\ \frac{3}{x+y}-\frac{5}{x-y}=2 \end{cases}$ sostituire $u=\frac{1}{x+y};v=...$ R. $\left(\frac{55}{9};-\frac{44}{9}\right)$

►26. Problemi risolvibili con sistemi

513 Determina due numeri sapendo che la loro somma è 37, la loro differenza è 5.

514 Il doppio della somma di due numeri è uguale al secondo numero aumentato del triplo del primo, inoltre aumentando il primo numero di 12 si ottiene il doppio del secondo diminuito di 6. [18*; 18*]

515 Determina tre numeri la cui somma è 81. Il secondo supera il primo di 3. Il terzo numero è dato dalla somma dei primi due. [18,75; 21,75; 40,5]

516 Determina due numeri sapendo che la loro somma è pari al doppio del primo aumentato di 1/4 del secondo, la loro differenza è pari a 1/3 del primo. [*27; 36*]

517 Determina due numeri la cui somma è 57 e di cui si sa che il doppio del più grande diminuito della metà del più grande è 49. [*26; 31*]

518 Determina tre numeri si sa che: il triplo del primo lato è uguale al doppio del secondo aumentato di 10m; la differenza tra il doppio del terzo lato e il doppio del secondo lato è uguale al primo lato aumentato di 12; la somma dei primi due lati è uguale al terzo lato. [12, 13, 25]

519 Determina un numero di due cifre sapendo che la cifrà delle dicine è il doppio di quella delle unità e scambiando le due cifre si ottiene un numero più piccolo di 27 del precedente. [63]

520 Determina il numero intero di due cifre di cui la cifra delle decine supera di 2 la cifra delle unità e la somma delle cifrè è 12. [75]

521 * Determina due numeri naturali il cui quoziente è 5 e la cui differenza è 12.

522 * Determinare un numero naturale di due cifre sapendo che la loro somma è 12 e che, invertendole, si ottiene un numero che supera di 6 la metà di quello iniziale. [84]

523 * Determinare la frazione che diventa uguale a 5/6 aumentando i suoi termini di 2 e diventa 1/2 se i suoi termini diminuiscono di 2.

524 * La somma delle età di due coniugi è 65 anni; un settimo dell'età del marito è uguale ad un sesto dell'età della moglie. Determinare le età dei coniugi. [35, 30]

525 * Un numero naturale diviso per 3 dà un certo quoziente e resto 1. Un altro numero naturale, diviso per 5, dà lo stesso quoziente e resto 3. Sapendo che i due numeri hanno per somma 188, determinali e calcola il quoziete. [70, 118, 23]

526 Giulio e Giulia hanno svuotato i loro salvadanai per comparsi una bici. Nel negozio c'è una bella bici che piace a entrambi, costa 180€ e nessuno dei due ha i soldi sufficienti per comprarla. Giulio dice: "Se mi dai la metà dei tuoi soldi compro io la bici". Giulia ribatte: "se mi dai la terza parte dei tuoi soldi la bici la compro io". Quanti soldi hanno rispettivamente Giulio e Giulia? [108; 144]

527 A una recita scolastica per beneficienza vengono incassati 216€ per un totale di 102 biglietti venduti. I ragazzi della scuola pagano 1€, i ragazzi che non sono di quella scuola pagano 1,5€, gli adulti pagano 3€. Quanti sono i ragazzi della scuola che hanno assisitto alla recita?

528 Da un cartone quadrato di lato 12cm, si taglia prima una scriscia parallela a un lato e di spessore non noto, poi si taglia dal lato adiacente una striscia parallela al lato spessa 2 cm in più rispetto alla striscia precedente. Sapendo che il perimetro del rettangolo rimasto è 33,6cm, calcola l'area del rettangolo rimasto.

529 Al bar per pagare 4 caffè e 2 cornetti si spendono €4,60, per pagare 6 caffé e 3 cornetti si spendono €6,90. E' possibile determinare il prezzo del caffé e quello del cornetto? [*indeterminato*]

530 Al bar Mario offre la colazione agli amici perché è il suo compleano: per 4 caffé e 2 cornetti paga €4,60. Subito dopo arrivano tre altri amici che prendono un caffè e un cornetto ciascuno, questa volta paga €4,80. Quanto costa un caffé e quanto un cornetto? [0,7 e 0,9]

531 Un cicloturista percorre 218km in tre giorni. Il secondo giorno percorre il 20% in più del primo giorno. Il terzo giorno percorre 14km in più del secondo giorno. Qual è stata la lunghezza delle tre tappe? [*60; 72; 86*]

532 In un parcheggio ci sono moto e auto. In tutto si contano 43 mezzi e 140 ruote. Quante sono le auto e quante le moto? [*27, 16*]

533 Luisa e Marisa sono due sorella. Marisa, la più grande è nata 3 anni prima della sorella; la somma dele loro età è 59. Qual è l'età delle due sorelle?

534 Mario e Lucia hanno messo da parte del denaro. Lucia ha 5 € in più di Mario. Complessivamente potrebbero comprare 45 euro di schede prepagate per i cellulari. Quanto possiede Mario e quanto possiede Lucia?

535 Una macchina per giaccio produce 10 cubetti di giaccio al minuto, mentre una seconda macchina per giacchio produce 7 cubetti al minuto. Sapendo che in tutto sono stati prodotti 304 cubetti e che complessivamente le macchine hanno lavorato per 22 minuti, quanti cubetti ha prodotto la prima macchina e quindi ne ha prodotti la seconda.

536 In un parcheggio ci sono automobili, camion e moto, in tutto 62 mezzi. Le auto hanno 4 ruote, i camion ne hanno 6 e le moto ne hanno 2. In

totale le ruote sono 264. Il numero delle ruote delle auto è uguale al numero delle ruote dei camion. Determina quante auto, quanti camion e quante moto ci sono nel parcheggio. [30; 20; 12]

537 Un vasetto di marmellata pesa 780 g. Quando nel vasetto rimane metà marmellata, il vasetto pesa 420g. Quanto pesa il vasetto vuoto?

538 Una gelateria prepara per la giornata di Ferragosto 30 kg di gelato. Vende i coni da due palline a1,50€ e i coni da tre palline a 2,00€. Si sa che da 2kg di gelatosi fanno 25 palline di gelato. A fine giornata ha venduto tutto il gelato e ha incassato 387,50€. Quanti coni da due palline ha venduto? [130]

539 Marco e Luca sono fratelli. La somma delle loro età è 23 anni. Il doppio dell'età di Luca è uguale alla differenza tra l'età del loro padre e il triplo dell'età di Marco. Quando Luca è nato, il padre aveva 43 anni. Determina l'età di Marco e di Luca (*Prove Invalsi 2004-2005*)

540 Oggi Angelo ha un quarto dell'età di sua madre. Quando avrà 18 anni, sua madre avrà il triplo della sua età. Quanti anni hanno attualmente i due? (*Giochi d'autunno 2010, Centro Pristem*)

541 Pietro e Paolo festeggiano il loro onomastico in pizzeria con i loro amici. Alla fine della cena il conto viene diviso in parti uguali tra tutti i presenti e ciascuno dovrebbe pagare 12 euro. Con grande generosità però gli amici decidono di offrire la cena a Pietro e Paolo; il conto viene nuovamente diviso in parti uguali tra gli amici di Pietro e Paolo (cioè tutti i presenti esclusi Pietro e Paolo), e ciascuno di loro paga 16 euro. Quanti sono gli amici di Pietro e Paolo? (*Giochi di Archimede, 2008*)

542 Al bar degli studenti, caffè e cornetto costano €1,50; cornetto e succo di frutta costano €1,80, caffè e succo di frutta costano €1,70. Quanto costano in tutto 7 caffè, 5 cornetti e 3 succhi di frutta? [*€11,90*]

543 * Un negozio ha venduto scatole contenenti 6 fazzoletti ciascuna ed altre contenenti 12 fazzoletti ciascuna, per un totale di 156 fazzoletti. Il numero delle confezioni da 12 ha superato di 1 la metà di quello delle confezioni da 6. Quante confezioni di ogni tipo si sono vendute?

544 * Nella città di Non fumo gli unici negozi sono tabaccherie e latterie. L'anno scorso le tabaccherie erano i 2/3 delle latterie; quest'anno due tabaccherie sono diventate latterie cosicché ora le tabaccherie sono i 9/16 delle latterie. Dall'anno scorso a quest'anno il numero cimplessivo dei negozi di Non fumo è rimasto lo stesso. Quante latterie c'erano l'anno scorso a Nonfumo? [30]

545 Un rettangolo di perimetro 80cm ha la base che è i 2/3 dell'altezza. Calcolare l'area del rettangolo.

546 Un trapezio isoscele ha il perimetro di 72cm. La base minore è i 3/4 della base maggiore; il lato obliquo è pari alla somma dei 2/3 della base minore con i 3/2 della base maggiore. Determina le misure delle basi del trapezio. $\left[\frac{288}{23}cm;\ \frac{216}{23}cm\right]$

547 Calcola l'area di un rombo le cui diagonali sono nel rapporto 3/2. Si sa che la differenza tra le due diagonali è 16cm. $\left[1536\,cm^2\right]$

548 In un triangolo rettangolo i 3/4 dell'angolo acuto maggiore sono pari ai 24/13 dell'angolo acuto minore. Determinare l'ampiezza degli angoli. [*26°; 64°*]

549 In un triangolo, un angolo supera di 16° un secondo angolo; il terzo angolo è pari ai 29/16 della somma dei primi due. Determina le misure degli angoli del triangolo. [24°; 40°; 116°]

550 In un rettangolo di perimetro 120cm, la base è 2/3 dell'altezza. Calcola l'area del rettangolo. [*864*]

551 Determina le misure dei tre lati x, y, z di un triangolo sapendo che il perimetro è 53cm, inoltre la misura z differisce di 19cm dalla somma delle altre due misure e che la misura x differisce di 11cm dalla differenza tra y e z.

552 Aumentando la base di un rettangolo di 5cm e l'altezza di 12cm, si ottiene un rettangolo di perimetro 120cm che è più lungo di 12cm del perimetro del rettangolo iniziale. [impossibile]

553 In un triangolo isoscele di perimetro 64cm, la differenza tra la base e la metà del lato obliquo è 4cm. Determina la misura della base e del lato obliquo del triangolo. [*16cm, 24cm*]

554 Un segmento AB di 64cm viene diviso da un suo punto P in due parti tali che il triplo della loro differenza è uguale al segmento minire aumentato di 20cm. Determina le misure dei due segmenti in cui resta diviso AB dal punto P. [*7cm; 16cm*]

Gli esercizi indicati con * sono tratti da Matematica 2, Dipartimento di Matematica, ITIS V.Volterra, San Donà di Piave, Versione [11-12] [S-A11], pagg. 53; licenza CC, BY-NC-BD, per gentile concessione dei proff. che hanno reddatto il libro. Il libro è scaricabile da http://www.istitutovolterra.it/dipartimenti/matematica/dipmath/docs/M2_1112.pdf

MATEMATICA C3 -ALGEBRA 1

7. STATISTICA



Lego People Photo by: Joe Shlabotnik
Taken from: http://www.flickr.com/photos/joeshlabotnik/305410323/

Indice

►1. Indagine statistica

Il termine statistica significa *scienza dello stato.* Questo termine venne usato per la prima volta nel XVI secolo per indicare lo studio dei dati utili al governo degli stati prevalentemente relativi a fenomeni di carattere demografico (nascite, morti, etc). Negli anni, la statistica si è estesa ai campi più disparati: fisica, psicologia, ricerca di mercato, indici di gradimento, sondaggi, meteorologia... E' nata essenzialmente con lo scopo di descrivere i fenomeni (statistica descrittiva), successivamente è divenuta uno strumento utile anche per fare previsioni (statistica inferenziale). In grandi linee si può definire come la scienza che si occupa della raccolta e dell'analisi dei dati relativi ad un certo gruppo di persone, animali o oggetti al fine di descrivere in maniera sintetica un fenomeno che li riguarda e fare eventualmente previsioni sul suo andamento futuro.
Ad esempio la statistica cerca di fare previsioni su domande del tipo:

- Quanta acqua sarà necessaria in Italia fra 3 anni?
- Quanta corrente elettrica sarà necessaria per il fabbisogno nazionale fra 5 anni?
- Quale sarà il tasso di disoccupazione nazionale fra 1 anno?

DEFINIZIONE. L'insieme di elementi oggetto dell'indagine statistica è detta popolazione o universo , mentre ciascun elemento della popolazione è detto unità statistica.

Sono esempi di **popolazione statistica** gli abitanti di una città in un certo anno, i prezzi di un determinato bene, le temperature massime registrate in una giornata in un particolare luogo, i ciclomotori circolanti in Italia, gli alunni di una scuola.

DEFINIZIONI.
Per ogni unità statistica si possono studiare una o più caratteristiche ed ognuna di tali caratteristiche costituisce un **carattere** della popolazione oggetto di indagine. I caratteri possono essere di tipo qualitativo o quantitativo.
Si definisce **modalità** del carattere indagato i diversi modi in cui esso può preentarsi.

Sono esempi di **carattere qualitativo** il colore degli occhi, il colore dei capelli, il tipo di scuola frequentato, il gradimento di un certo programma televisivo. Le modalità di un carattere qualitativo sono espresse mediante nomi o aggettivi.
I caratteri qualitativi sono a loro volta suddivisi in **ordinabili** (il tipo di scuola frequentato è ordinabile a partire dalla scuola dell'infanzia fino alla laurea, il gradimento di un programma televisivo è ordinabile a partire dalla completa mancanza di gradimento fino al gradimento massimo) e **non ordinabili** o sconnessi (colore degli occhi, colore dei capelli).
Sono invece **caratteri quantitativi** l'età, l'altezza, il numero di auto prodotte da una fabbrica. Le modalità di un carattere quantitativo sono espresse mediante numeri.
I caratteri quantitativi possono invece essere di tipo **discreto**, quando assumono solo valori puntuali, oppure di tipo **continuo**, quando possono assumere tutti gli infiniti valori compresi in un determinato intervallo.
Sono esempi di caratteri quantitativi discreti il numero di figli in una famiglia, i pezzi prodotti in una catena di montaggio; sono esempi di caratteri continui l'altezza di una persona, il peso di una persona, la lunghezza di un fiume.

1 In una indagine su alcune famiglie si sono rilevati i seguenti caratteri; indicane il tipo ponendo una crocetta nella casella opportuna; per i caratteri quantitativi indica se sono discreti o continui, per i caratteri qualitativi indica se sono ordinabili o sconnessi:

	quantitativo		qualitativo	
carattere	discreto	continuo	ordinabile	sconnesso
Reddito mensile del capofamiglia				
Titolo di studio del capofamiglia				
Familiari a carico				
Settore lavorativo				
Luogo di nascita del capofamiglia				
Tempo impiegato per raggiungere il luogo di lavoro				

L'indagine statistica può riguardare l'intera popolazione (in tal caso si parla di **censimento**) oppure solo una sua parte (in tal caso si parla di indagine a **campione**).
Supponiamo di voler effettuare un'indagine sulle persone che fumano in Italia.
Il fenomeno collettivo in esame è il fumo, la popolazione di riferimento è costituita dalla popolazione italiana in età adulta, l'unità statistica è rappresentata da ogni cittadino oggetto dell'indagine, i caratteri oggetto dell'indagine possono essere "fumatore / non fumatore", "numero di sigarette fumate", che cosa si fuma: pipa, sigaro, sigaretta. Data l'elevata numerosità della popolazione di riferimento la tipologia di indagine preferibile è quella a campione.
A sua volta, l'indagine a campione può essere effettuata su un **campione casuale**, quando si scelgono a caso i campioni all'interno della popolazione o su un **campione stratificato**, quando si suddivide la popolazione in classi o strati senza specifici criteri e per ogni strato si prende a caso un campione.

►2. Fasi di un'indagine statistica

Affinché un'indagine statistica sia rigorosa è necessario che sia strutturata secondo le seguenti fasi:

1. Studio del problema e impostazione dell'indagine statistica
Si individua in maniera precisa lo scopo della ricerca, il fenomeno sul quale indagare, la popolazione statistica di riferimento, le singole unità statistiche ed il carattere, o caratteri, oggetto di indagine

2. Rilevazione dei dati statistici
La rilevazione non è altro che la raccolta dei dati statistici riguardanti ogni elemento della popolazione e relativi al fenomeno che si vuole analizzare. La rilevazione può avvenire secondo diverse modalità:

a) **rilevazione diretta o globale**: viene eseguita direttamente su tutte le unità statistiche che formano la popolazione;
b) **rilevazione indiretta o parziale**: eseguita solo su una parte della popolazione. Si deve scegliere in tal caso un sottoinsieme della popolazione, detto **campione** che deve essere rappresentativo della popolazione di riferimento.

3. Spoglio delle schede e tabulazione
Contemporaneamente o successivamente al rilevamento, i dati raccolti vengono ordinati, suddivisi in classi omogenee e riassunti tramite tabelle dette **tabelle statistiche.**

DEFINIZIONE. Dato un carattere oggetto di rilevazione, si definisce **frequenza** il numero delle unità statistiche su cui una sua modalità si presenta.

4. Rappresentazione dei dati statistici.
La rappresentazione può avvenire attraverso diversi tipi di grafico:

- **diagramma cartesiano**: rappresentazione nel piano cartesiano dei valori della variabile sull'asse orizzontale e della relative frequenze sull'asse verticale;
- **ideogramma:** si rappresenta un certo numero di dati con un simbolo;
- **diagramma a nastri o a bastoni**: utilizzata prevalentemente per addetti ai lavori;
- **areogramma:** grafico a forma di cerchio composto da settori circolari con aree direttamente proporzionali alle frequenze;
- **istogramma:** grafico composto da rettangoli aventi area proporzionale alla frequenza.

5. Elaborazione dei dati
Vengono elaborati i dati tabulati al fine di costruire opportuni indici di sintesi.

6. Interpretazione dei risultati
Attraverso i grafici e gli indici è possibile descrivere le caratteristiche peculiari del fenomeno analizzato.
Analizziamo in dettaglio le singole fasi.

►3. Spoglio delle schede e tabulazione

Dopo aver raccolto i dati per ciascuna modalità del carattere o per ciascuna classe individuata si deve determinare:

- la **frequenza assoluta**, cioè il numero di volte con cui si presenta una modalità del carattere indagato;
- la **frequenza relativa**, cioè il rapporto tra la frequenza assoluta e il numero totale dei casi presi in esame;
- la **frequenza percentuale**, cioè la frequenza relativa moltiplicata per 100.

Per poi compilare una **tabella di frequenza** che sintetizza la raccolta, come nell'esempio seguente.

Esempio

La tabella seguente fornisce la *distribuzione di frequenze assolute* degli alunni di una classe rispetto al carattere sesso.

Sesso	**Numero di alunni**
Femmine	15
Maschi	12
Totale	27

Per costruirla, si è operata la classificazione della popolazione degli alunni della classe rispetto ad un determinato carattere (il sesso), sono state individuate le **modalità** con cui questo si è manifestato (femmina, maschio) ed è stato effettuato il conteggio delle unità in corrispondenza di ciascuna modalità (**frequenza assoluta**).

Dalle frequenze assolute si ricavano le **frequenze relative**: 15 alunni su 27 sono femmine: la frazione è $\frac{15}{27}$ di femmine sul totale degli alunni. Dall'operazione 15 diviso 27 otteniamo 0,56 (approssimando a due cifre decimali) che è la frequenza relativa.

La frazione può essere espressa in forma percentuale: 0,56 equivale a dire 56 su 100 ed è consuetudine scriverlo in forma percentuale 56% , esso indica la **frequenza percentuale**.,

Ripetendo lo stesso procedimento per i maschi si ottiene la seguente tabella delle frequenze:

Sesso	**Frequenza assoluta**	**Frequenza relativa**	**Frequenza percentuale**
Femmine	15	0,56	56%
Maschi	12	0,44	44%

Si può concludere che la classe è formata per il 56% da femmine e per il restante 44% da maschi.

Esempio

Supponiamo che i voti elencati di seguito siano quelli riportati in matematica a fine trimestre nella tua classe:

5 4 6 8 8 7 7 6 5 5 6 7

Per poter effettuare una lettura più agevole si costruisce una tabella in cui vengono riportati sulla prima colonna i singoli valori rilevati in ordine crescente (modalità del carattere), nella seconda la frequenza assoluta, cioè quante volte compare quel determinato voto e nella terza quella relativa:

Voto riportato	**Frequenza assoluta**	**Frequenza relativa**	**Frequenza percentuale**
4	1	$\frac{1}{12}=0{,}083$	8,30%
5	3	$\frac{3}{12}=0{,}25$	25,00%
6	3	$\frac{3}{12}=0{,}25$	25,00%
7	3	$\frac{3}{12}=0{,}25$	25,00%
8	2	$\frac{2}{12}=0{,}167$	16,70%
Totale	**12**	**1**	**100,00%**

Per determinare la frequenza percentuale è sufficiente moltiplicare per 100 la frequenza relativa.

2 Compila una tabella relativa alla distribuzione degli studenti della tua classe in relazione a:

a) colore dei capelli (nero, castano, biondi, rosso);
b) anno di nascita;
c) città di residenza.

3 In una certa nazione in un dato anno si sono vendute 10540 biciclette, 7560 scooter, 2300 moto e 6532 automobili. Completa la tabella

Mezzi di trasporto venduti	**Frequenza assoluta**	**Frequenza relativa**	**Frequenza percentuale**
Biciclette			
Scooter			
Moto			
Automobili			
Totale			

Esempio

Misurando l'altezza di un gruppo di cani di razza Pastore italiano si sono ottenute le seguenti misure in cm

57,1	60,8	60,7	56,2	59,5	62,4	56,1	61,2	54,5	64,5	57,5	58,3	55,2
58,7	57,2	56,1	58,9	57,7	53,2	59,2	58,9	54,5	55,3	62,1	59,0	58,3
61,3	60,1	56,4	60,2	61,7	57,3	58,3	59,5	62,6	59,4	58,3	59,4	59,4
59,3	57,6	60,0	60,7	56,7	61,1	59,8	55,3	63,9	58,0	55,2	54,9	53,8

Il carattere indagato nella popolazione cani Pastore italiano è di tipo quantitativo continuo; con questo tipo di dati è praticamente impossibile calcolare le frequenze se le altezze non si raggruppano in classi.
Vediamo come procedere: osservando i dati ottenuti si nota che il valore minore è 53,8 mentre il valore maggiore è 64,7. Possiamo allora suddividere i dati in gruppi partendo da 53,0cm fino a 65,0 centimetri. Si potrebbero allora formare classi di ampiezza 1cm.
Si ottiene la seguente tabella:

Classe cm	**Frequenza assoluta**	**Frequenza percentuale**
53,0 – 53,9	2	3,85%
54,0 – 54,9	3	5,77%
55,0 – 55,9	4	7,69%
56,0 – 56,9	5	9,61%
57,0 – 57,9	6	11,54%
58,0 – 58,9	8	15,38%
59,0 – 59,9	9	17,31%
60,0 – 60,9	6	11,54%
61,0 – 61,9	4	7,69%
62,0 – 62,9	3	5,77%
63,0 – 63,9	1	1,92%
64,0 – 64,9	1	1,92%
totale	**52**	

4 Da un'indagine sulla distribuzione delle altezze in un gruppo di studenti sono stati rilevati i seguenti dati grezzi (espressi in cm):

175	168	169	173	160	165	170	172	177	172	170	173	182
164	174	185	188	164	175	160	177	176	184	180	176	168
174	175	177	183	174	166	181	173	166	172	174	165	180
190	175	176	188	171	172	181	185	184	183	175	173	181

Raggruppa i dati in classi di ampiezza 5cm e costruisci la distribuzione di frequenza.
Calcola poi frequenza relativa e percentuale.

5 Dall'analisi delle paghe settimanali dei dipendenti di un'industria automobilistica si è ottenuta la seguente distribuzione di frequenza, suddivisa in classi *(la parentesi indica che l'estremo della classe considerato è incluso nella classe stessa, la parentesi tonda indica che l'estremo della classe considerato è escluso dalla classe).*Determina per ogni classe di reddito frequenza relativa e percentuale.

Classi di reddito (in Euro)	**Frequenza assoluta**	**Frequenza relativa**	**Frequenza percentuale**
[50-100)	50		
[100-200)	70		
[200-300)	30		
≥ 300	50		

6 Data la seguente distribuzione dei risultati dei test d'ingresso di matematica in una scuola media, Sapendo che l'indagine è stata svolta su 200 alunni, determina frequenze assolute e relative.

Voto	3	4	5	6	7	8	9
Frequenza percentuale	5%	10%	25%	40%	15%	3%	2%
Frequenza assoluta							
Frequenza relativa							

7 Osserva la seguente tabella:

… … … … … … … … …	… … … … … …	Frequenza relativa	Frequenza percentuale
Infanzia	950.000		
Primaria	2.538.000		
Secondaria di 1° grado	1.700.000		
Secondaria di 2° grado	2.425.000		
totale			

Quale fenomeno descrive la tabella?
Qual è la popolazione statistica oggetto dell'indagine?
Quante sono le unità statistiche?
Qual è stato il carattere indagato?
Completa la tabella calcolando frequenza relativa e frequenza percentuale.

8 In un campione di ginnaste di livello agonistico si è rilevata l'altezza in metri.
Basta questa frase per indicare la popolazione oggetto di indagine e il carattere rilevato?
Il carattere analizzato è di tipo qualitativo o quantitativo?
L'indagine ha dato i seguenti risultati:

Altezza	1,49	1,50	1,55	1,58	1,61	1,64	1,67	1,70	1,71
Numero ginnaste	1	6	11	4	6	4	2	2	3

Quante sono le unità statistiche?
Determina in percentuale il numero delle ginnaste la cui altezza è non inferiore a 1,60m.

9 La tabella mostra dati relativi ad una popolazione di 20 famiglie italiane; le informazioni in essa contenute stabiliscono alcuni aspetti o caratteri dei membri della popolazione: numero di componenti, reddito annuo, titolo di studio del capofamiglia, residenza per area geografica. Osserva la tabella e rispondi alle domande che seguono.

Famiglia	Numero di componenti	Reddito annuo in migliaia di euro	titolo di studio	residenza
1	2	28	Elementare	Nord
2	1	35	Media inferiore	Centro
3	3	50	Media inferiore	Nord
4	1	45	Media superiore	Nord
5	1	40	Laurea	Sud
6	2	30	Media inferiore	Sud
7	3	55	Media inferiore	Centro
8	4	80	Media superiore	Centro
9	5	60	Laurea	Sud
10	6	85	Laurea	Nord
11	7	90	Laurea	Nord
12	1	52	Media superiore	Centro
13	2	62	Media superiore	Sud
14	3	75	Media superiore	Sud
15	5	60	Elementare	Nord
16	4	45	Media inferiore	Nord
17	3	42	Media inferiore	Centro
18	2	28	Elementare	Nord
19	8	70	Media superiore	Sud
20	2	38	Laurea	Sud

1. Cosa si intende, in statistica, per popolazione?
2. Quali sono le unità statistiche di cui sono trascritti i dati nella tabella precedente?
3. Quali caratteri riportati nella tabella sono qualitativi e quali quantitativi?
4. Quali sono le modalità dei caratteri qualitativi indagati?
5. Bastano le informazioni della precedente tabella per stabilire:
5a. dove risiede la maggior parte delle famiglie oggetto di questa indagine? Se sì, come lo stabilite?
5b. il numero di famiglie il cui capo-famiglia ha come titolo di studio quello di Scuola Media Superiore? Se sì, come lo stabilite?

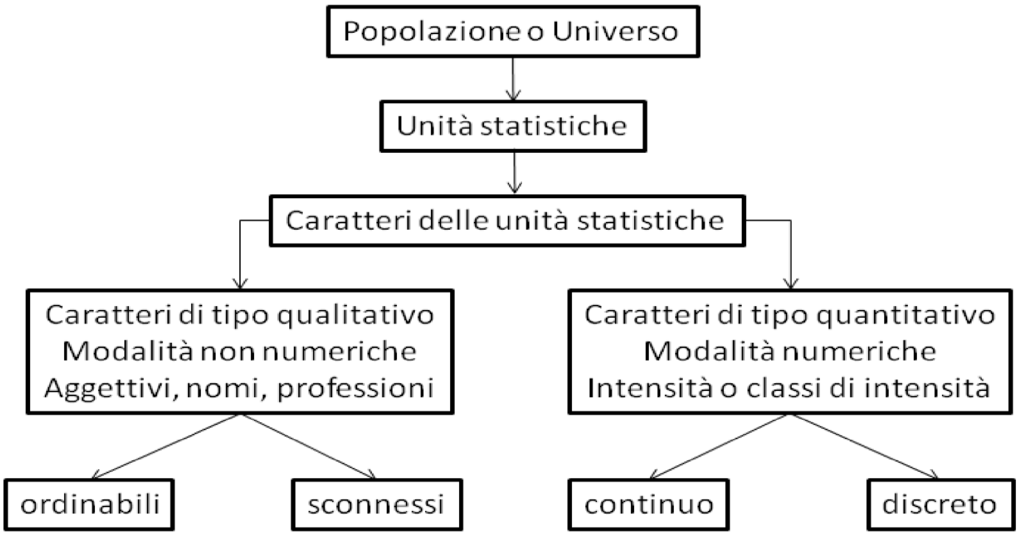
Costruire la tabella

Titolo di studio	elementare	Media inferiore	Media superiore	Laurea
Numero di famiglie				

E' vero che 1/4 dei capifamiglia, cioè il 25%, è laureto?
Costruire un'altra tabella, sul modello della precedente, in cui è riportato il numero di famiglie aventi 1, 2, 3 ecc. E' vero che 1/3 delle famiglie è costituito da più di 5 persone?
Individua il reddito minimo e quello massimo, completa la tabella delle frequenze in modo che il carattere reddito sia suddiviso in classi di ampiezza 5, come indicato a fianco.
Quante famiglie hanno un reddito compreso tra 46 e 90 mila euro? Indica la risposta anche in percentuale.

Classi di reddito	Frequenza assoluta
26-30	
31-35	

Riassumendo



►4. Rappresentazione grafica

La **rappresentazione grafica dei dati statistici** facilita notevolmente lo studio delle caratteristiche del fenomeno statistico che si sta esaminando; infatti dopo aver impostato l'indagine, raccolto, classificato ed elaborato i dati nelle tabelle, i dati non sempre si presentano in una forma di facile lettura ed il loro significato e la loro interpretazione rimane poco chiara. Attraverso la rappresentazione grafica, i risultati dell'indagine emergono immediatamente, in maniera diretta e sintetica.
La rappresentazione grafica può avvenire utilizzando diversi tipi di grafico a seconda delle caratteristiche da analizzare.

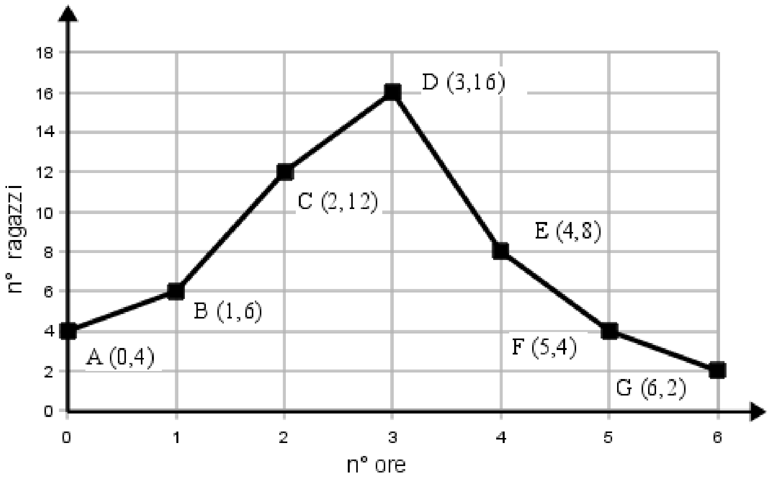
Diagramma cartesiano

La rappresentazione grafica attraverso diagramma cartesiano dà, in modo immediato, informazioni sull'andamento globale del fenomeno e viene utilizzato prevalentemente per la rappresentazione di serie storiche (per esempio, per rappresentare il numero di auto prodotte per anno da una fabbrica) oppure quando si hanno due caratteri quantitativi e si vuol analizzare il tipo di legame esistente fra di essi.

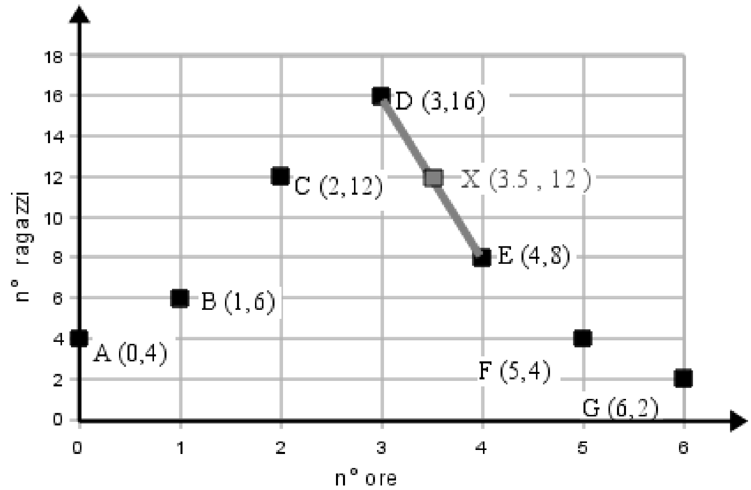
Esempio

Consideriamo la tabella statistica relativa alla domanda “quante ore al giorno passi al computer?”, posta ad un campione di 50 ragazzi dai 16 ai 24 anni. Rappresentiamo la tabella attraverso un diagramma cartesiano costruito tracciando due rette perpendicolari, gli assi, quello verticale orientato verso l'alto e quello orizzontale orientato verso destra. Riportiamo sull'asse orizzontale il numero di ore e sull'asse verticale il numero di ragazzi e determiniamo i punti aventi come coordinate (numero ore; numero ragazzi).
Il punto A avrà come coordinate n° ore 0 e n° ragazzi 4, il punto B avrà come coordinate 1 e 6 e così via. Uniamo poi i punti con segmenti e otteniamo il diagramma cartesiano.
Precisamente A(0;4), B(1;6), C(2;12), D(3;16), E(4;8), F(5;4), G(6;2).

Numero di ore	Numero di ragazzi
0	4
1	6
2	12
3	16
4	8
5	4
6	2



Dal grafico si può notare immediatamente che la maggior parte dei ragazzi trascorrono dalle 2 alle 3 ore al computer dato che il picco più alto si ha proprio nei punti C e D.



Si può notare che, ad esempio, il punto X di coordinate (3.5; 12), appartenente al segmento di congiunzione tra i punti D ed E, non ha significato reale, dato che le sue coordinate non sono riportate nella tabella statistica del fenomeno da studiare.

10 Rappresenta con un diagramma cartesiano la seguente serie storica relativa alla produzione di olio di oliva in Puglia, scegliendo una opportuna unità di misura (Fonte Wikipedia):

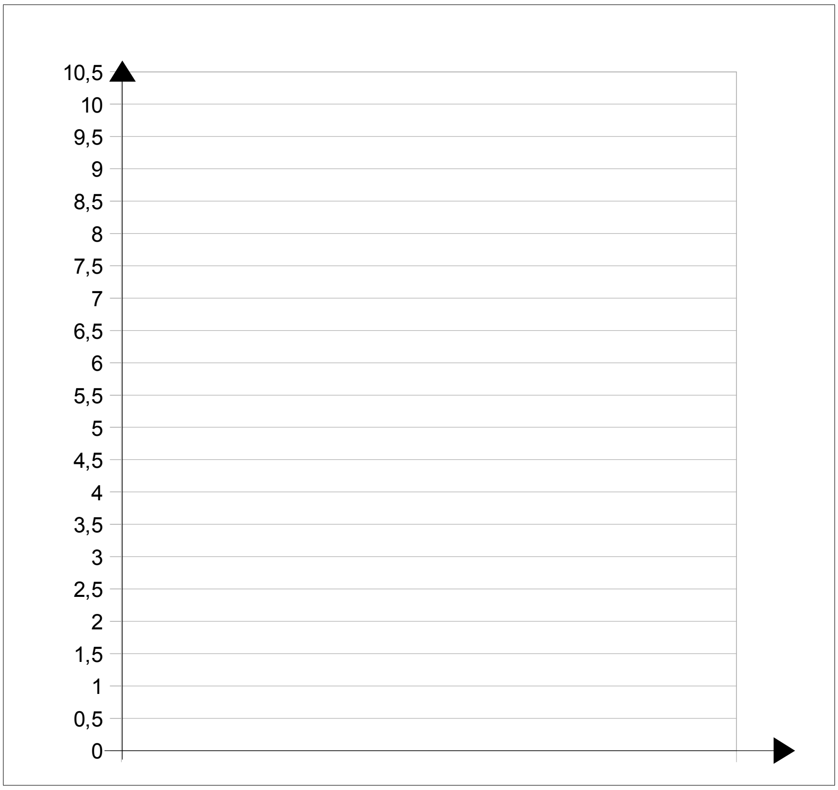
Anno	2006	2005	2004	2003
Produzione olio (in quintali)	1.914.535	2.458.396	2.678.201	2.508.084

11 Rappresenta con un diagramma cartesiano la seguente serie storica, relativa al numero di società quotate in borsa, dal 1975 al 1984 (Fonte ISTAT):

Anno	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984
Società	154	156	156	148	145	141	141	148	150	155

12 Rappresenta graficamente mediante diagramma cartesiano la seguente tabella che riporta le temperature misurate a Lecce durante una giornata invernale.

Ore	Temperatura in °C
0	5
2	5,5
4	5,5
6	6
8	7,5
10	10
12	16
14	18
16	16,5
18	12
20	8
22	6,5



Ideogramma

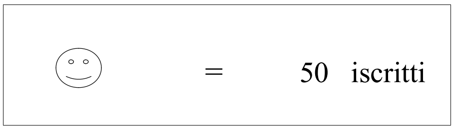
Nella rappresentazione grafica attraverso **ideogramma** si rappresenta un certo numero di dati con un simbolo che si assume come **unità grafica**; il simbolo richiama l'oggetto dell'indagine e dà quindi una visione immediata del fenomeno.
Ad esempio si può considerare un uomo stilizzato per rappresentare un dato riguardante il numero di persone che vivono in un determinato territorio, una macchina per la produzione annua di automobili in una fabbrica, e così via.
Tale tipo di rappresentazione è spesso usata in campo pubblicitario perché di largo impatto visivo.

Esempio

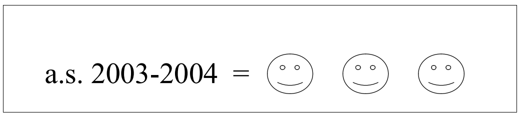
Un istituto scolastico ha visto aumentare i suoi iscritti, dall'anno scolastico 2003-2004 all'anno 2008-2009 secondo questa tabella:

Anno scolastico	2003-2004	2004-2005	2005-2006	2006-2007	2007-2008	2008-2009
Iscritti	150	200	200	325	375	450

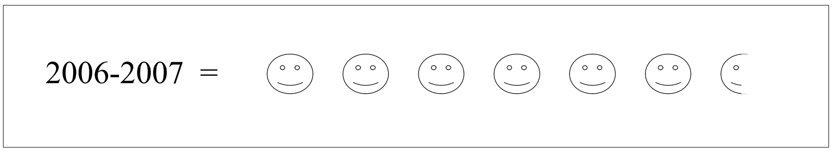
Possiamo rappresentare mediante ideogramma i dati contenuti nella tabella statistica.
Consideriamo una faccina stilizzata come unità grafica assegnandole il valore di 50 ragazzi iscritti.



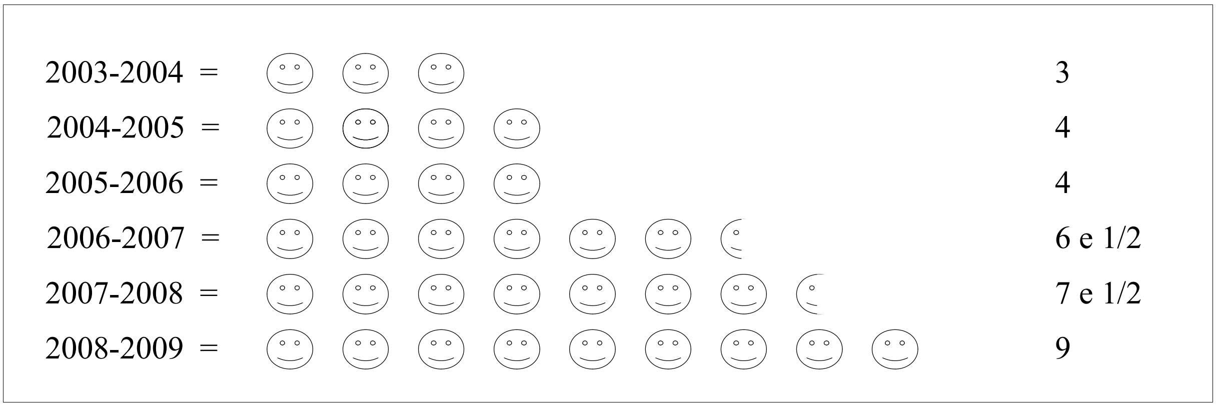
Il numero degli iscritti di ogni anno scolastico sarà rappresentato da tante unità grafiche quanti sono i gruppi di 50 iscritti.
Per avere il grafico relativo all'anno 2003-2004 si devono usare tre faccine, in quanto 150 : 50 = 3.



Se la divisione del numero degli iscritti per 50 dà resto, esso si dovrà rappresentare disegnando solo una parte dell'unità grafica, corrispondente alla frazione tra resto e 50. Ad esempio nell'a.s. 2006-2007 ci sono stati 325 iscritti; 325:50 = 6 col resto di 25, quindi 325 sarà uguale a 6 unità grafiche e $\frac{25}{50}=\frac{1}{2}$ unità grafica, cioè mezza faccina.



Il grafico completo sarà:



13 Rappresenta attraverso un ideogramma la seguente tabella statistica, che indica le ore di studio giornaliere di uno studente, usando 2 ore come unità di misura, scegli un simbolo opportuno.

Giorno	Lunedì	Martedì	Mercoledì	Giovedì	Venerdì	Sabato	Domenica
Ore di studio	2	6	5	2	3	4	0

14 Costruisci un ideogramma a partire dai dati della seguente tabella:

Regione	**Produzione vino (in quintali)**
Toscana	20500
Veneto	18000
Campania	14500
Puglia	15500
Molise	8000

Diagramma a barre o a colonne

Questo tipo di rappresentazione, detta anche diagramma a nastri o a bastoni, viene usata quando si vuole fornire un'idea delle frequenze delle diverse modalità di un fenomeno, in genere si usa per caratteri qualitativi o quantitativi discreti. Per poter valutare il significato statistico della lunghezza dei nastri o delle colonne è necessario scegliere opportunamente una scala di riferimento: la larghezza del nastro è arbitraria ma uguale per tutti i nastri, la lunghezza è proporzionale alla caratteristica che si deve rappresentare. I nastri e le colonne possono inoltre essere suddivisi in parti di colori diversi per indicare le singole componenti o i singoli fenomeni che si vogliono analizzare.
La differenza fra la rappresentazione a barre e quella a colonne, detta anche istogramma, consiste soltanto nell'orientamento del grafico: nel diagramma a nastri si indicano le modalità del carattere sull'asse verticale e le frequenze sull'asse orizzontale, mentre in quello a colonne le modalità del carattere sono riportate sull'asse orizzontale e le frequenze su quello verticale.
Di seguito vengono riportate le due tipologie di grafico accompagnate dalla tabella di riferimento:

Materia preferita	**Maschi**	**Femmine**
Italiano	5	3
Storia	4	7
Geografia	4	2
Matematica	2	3
Scienze	6	4
Educazione Fisica	5	5
Totale	26	24

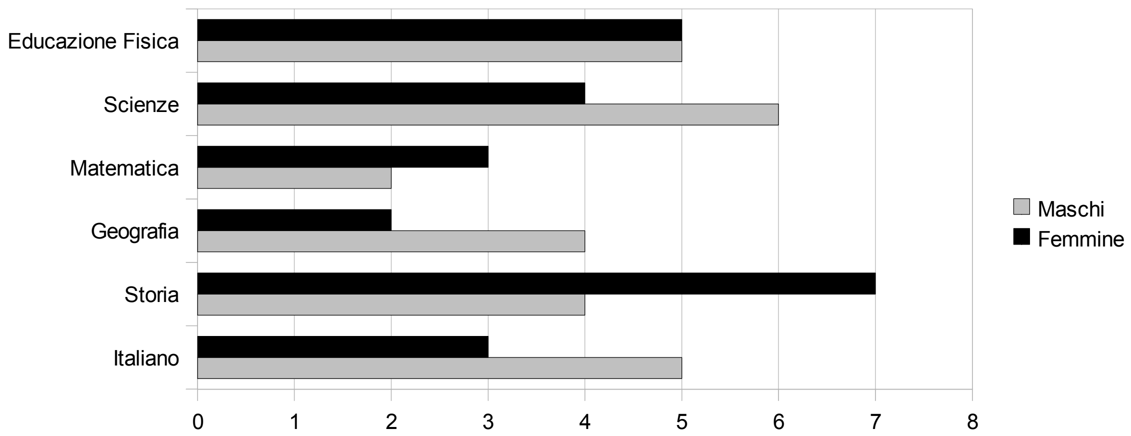


Diagramma a barre

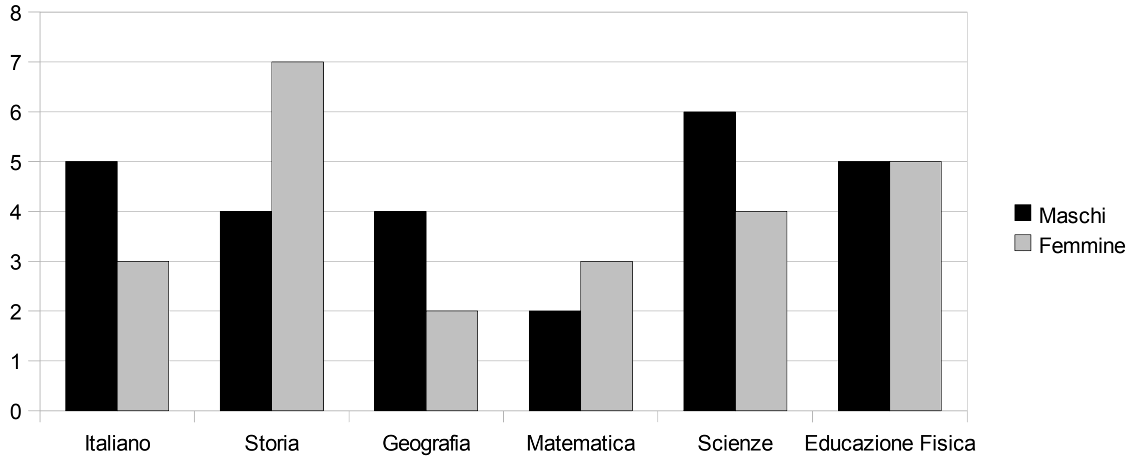


Diagramma a colonne

15 La seguente tabella rappresenta i risultati di un'indagine sulla capitale europea preferita da un gruppo di studenti universitari. Rappresenta i dati utilizzando un diagramma a nastro.

Capitale preferita	**Frequenza**
Parigi	25
Roma	42
Londra	30
Vienna	10
Amsterdam	28

16 Rappresenta con un diagramma a colonne i dati riportati nella seguente tabella relativi alla vendita di automobili da un concessionario nell'anno 2009.

Marca automobile	**Auto vendute**
Renault	50
Fiat	270
Ford	120
Toyota	40
Alfa Romeo	30

Areogramma

Questo tipo di rappresentazione viene utilizzato quando si vuole evidenziare le parti che compongono un fenomeno, per esempio per indicare come si dividono gli alunni di una classe in maschi e e femmine, o per rappresentare in che modo le varie voci di spesa incidono sul bilancio familiare.
Il grafico si ottiene dividendo un cerchio in settori circolari con aree direttamente proporzionali alle frequenze che rappresentano. Per disegnare l'areogramma, si disegna una circonferenza di diametro arbitrario e si fa corrispondere l'angolo al centro di 360°, con il 100% di frequenza percentuale; per ottenere gli angoli corrispondenti a frequenze percentuali minori, si risolve la proporzione $360°: X° = 100 : X$
Si suddivide così la circonferenza negli angoli ottenuti, mediante un goniometro e si colorano o retinano diversamente i settori circolari ottenuti.

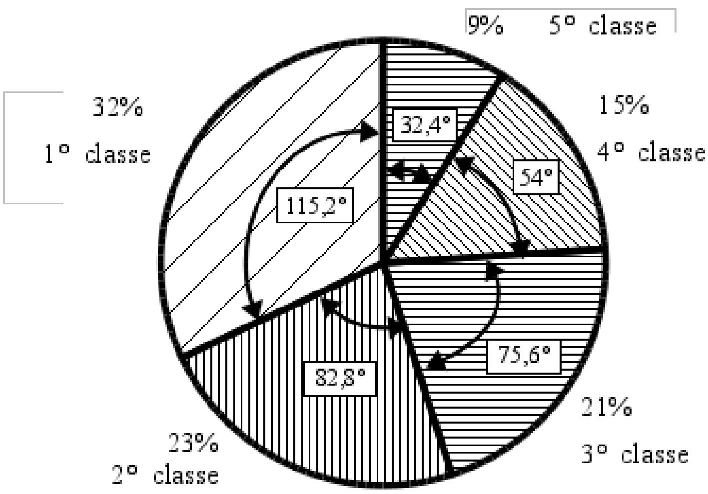
Esempio

Consideriamo la seguente tabella statistica che indica gli studenti, divisi per classe, frequentata di un dato istituto scolastico, in un dato anno.
Nella tabella sono indicate le frequenze assolute; calcoliamo ora le frequenze percentuali degli studenti.
Per la 1° classe si ha: $\frac{320}{1010} = 0{,}32$ arrotondato alla seconda cifra decimale, che equivale al 32% e così via per le classi successive.

Classe	**Studenti**
1°	320
2°	230
3°	212
4°	152
5°	96
Totale	1010

Classe	**Frequenze percentuali**
1°	32,00%
2°	23,00%
3°	21,00%
4°	15,00%
5°	9,00%
Totale	100%

Rappresentiamo graficamente mediante areogramma i dati contenuti nella tabella precedente.
Per ottenere l'angolo relativo alla frequenza percentuale della 1°classe si fa:
$360° \times \frac{32}{100} = 115.2°$
per la 2° classe: $360° \times \frac{23}{100} = 82.2°$
e cosi via per le altre classi.



Dal grafico si può notare immediatamente che l'area più grande è quella degli studenti della 1° classe, quindi la classe frequentata di più è la prima.

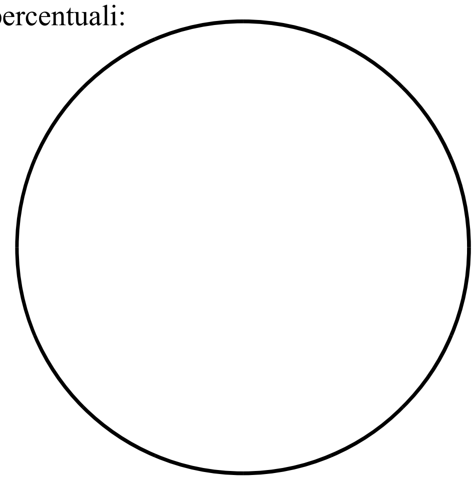
17 Consideriamo la seguente tabella statistica che indica le frequenze percentuali di forza lavoro per settore economico rilevata nel 2006 in Italia:

Forza lavoro per settore economico	**Frequenza percentuale**
Forza lavoro occupata nell'agricoltura	4,20%
Forza lavoro occupata nell'industria	30,70%
Forza lavoro occupata nei servizi	65,10%
Tasso di disoccupazione	8,00%

Rappresentare graficamente mediante **areogramma** i dati contenuti nella tabella.

18 Rappresentare attraverso un areogramma la seguente tabella statistica, che indica le altezze di 100 studenti maschi di una data scuola dopo aver calcolato le frequenze percentuali:

Altezze (in m)	**Numero di studenti**	**Frequenze percentuali**
1,50 - 1,55	11	
1,60 - 1,65	18	
1,70 - 1,75	42	
1,80 - 1,85	22	
1,90 - 1,95	6	
Totale	**100**	



Istogramma

Si utilizza la rappresentazione grafica attraverso istogramma quando il carattere analizzato è di tipo quantitativo ed i dati sono raggruppati in classi.
Prima di tutto si distribuiscono i dati in classi o gruppi e si determina il numero di individui appartenenti a ciascuna classe, questo numero è detto frequenza della classe. Riportando tali dati in una tabella si ottiene la distribuzione delle frequenze. Poiché le classi potrebbero avere ampiezze diverse si calcola la **densità di frequenza**, definita come **rapporto fra la frequenza della classe e la relativa ampiezza**.
Per disegnare un istogramma si tracciano due assi; sull'asse verticale, orientato verso l'alto, si fissa un segmento unitario e si riportano le frequenze. L'asse orizzontale, orientato verso destra, è invece suddiviso in tanti segmenti la cui ampiezza è pari a quella delle singole classi. Il grafico consiste in un insieme di rettangoli aventi per base ogni classe e altezza la densità di frequenza corrispondente. In tal modo l'area di ogni rettangolo rappresenta la frequenza corrispondente a ciascuna classe.

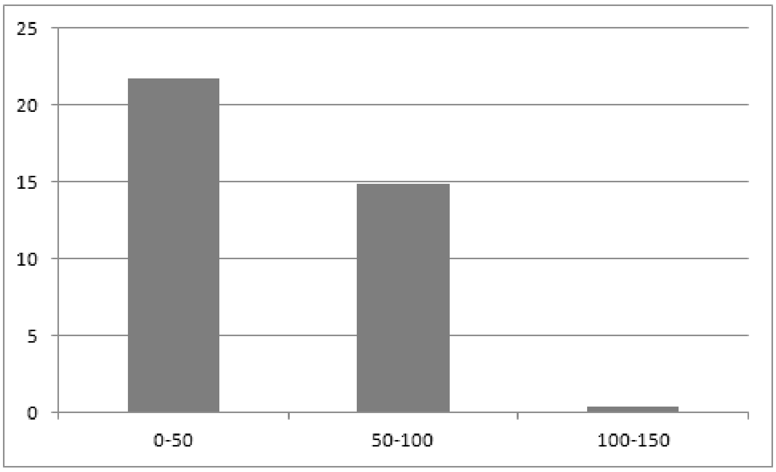
Esempio

Costruiamo un istogramma a partire dalla distribuzione di frequenza riportata nella seguente tabella:

Diametro crateri lunari (km)	**Numero di crateri**
0-50	1088
50-100	745
100-150	20

Innanzitutto dobbiamo determinare per ogni classe la densità di frequenza che si ottiene dividendo la frequenza assoluta per l'ampiezza della classe:

Diametro crateri lunari (km)	**Densità**
0-50	1088/50=21,76
50-100	745/50=14,9
100-150	20/50=0,4



Esempio

Consideriamo la seguente tabella statistica che riporta i giorni di pioggia di ogni mese, in un dato anno e in una data città.

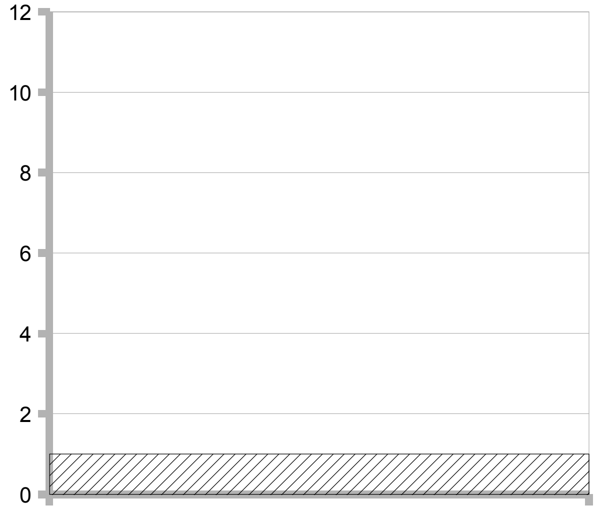
	Mesi	Giorni di pioggia
Inverno	Gennaio	15
	Febbraio	10
	Marzo	14
Primavera	Aprile	8
	Maggio	5
	Giugno	2
Estate	Luglio	1
	Agosto	3
	Settembre	3
Autunno	Ottobre	5
	Novembre	9
	Dicembre	11

Dividiamo i mesi dell'anno in classi, e precisamente raggruppandoli in stagioni. Luglio, Agosto e Settembre appartengono alla classe dell'estate e la frequenza di questa classe è data dalla somma delle frequenze di ogni mese. Cioè 1 + 3 + 3 = 7.

Si prosegue in questo modo per ogni classe ottenendo cosi la distribuzione delle frequenze che riportiamo nella tabella a fianco.

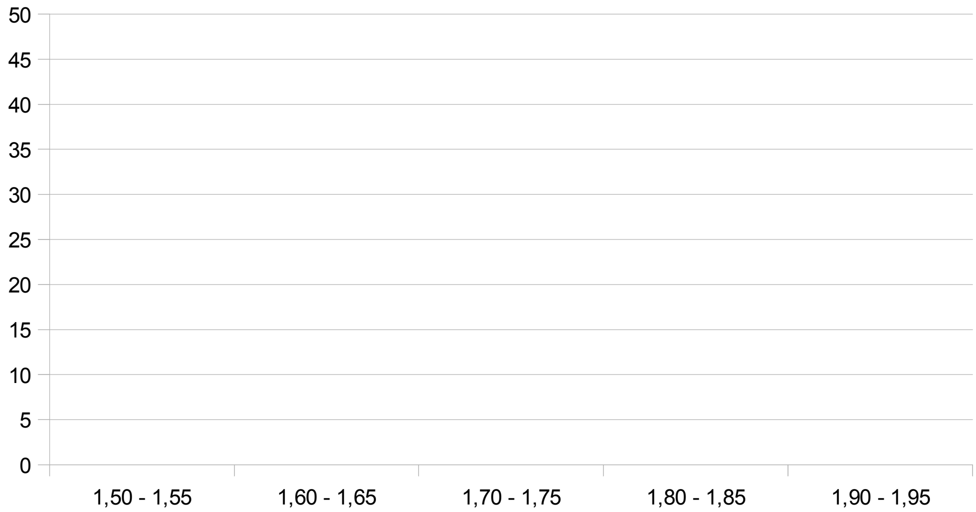
Stagioni	Giorni di pioggia
Estate	7
Autunno	25
Inverno	39
Primavera	15

Costruire ora l'istogramma corrispondente alla tabella precedente riportando sull'asse orizzontale le classi (stagioni) e su quello verticale le frequenze:



19 Rappresentare attraverso un istogramma la seguente tabella statistica, che indica le altezze di 100 studenti maschi di una data scuola:

Altezze (in m)	Numero di studenti
1,50 - 1,55	11
1,60 - 1,65	18
1,70 - 1,75	43
1,80 - 1,85	22
1,90 - 1,95	6



20 Uno studente universitario di Matematica ha superato 28 esami con queste valutazioni:

18	25	26	23	30	21	24	20	29	28	24	21	23	28
28	24	22	25	24	27	24	21	23	28	18	25	26	23

Organizza i dati in una tabella suddividendoli in classi e rappresentali tramite un istogramma.

►5. Indici di posizione

Gli indici di posizione vengono utilizzati per sintetizzare i dati di una distribuzione di frequenza per mezzo di un solo numero. A seconda del tipo di carattere oggetto dell'indagine statistica posso essere utilizzati valori medi diversi.

Moda

DEFINIZIONE. La **moda** è la modalità del carattere indagato che si presenta più frequentemente.

In una successione di n modalità $x_1, x_2, ..., x_n$ con le relative frequenze $f_1, f_2, ..., f_n$, la moda è la modalità che ha la frequenza maggiore.
Questo valore può essere calcolato per qualunque tipo di carattere, sia qualitativo che quantitativo.
Se il carattere è quantitativo continuo con dati raggruppati in classi non è possibile determinare con esattezza la moda, ci si limita ad individuare la classe modale definita come la classe cui è associata la massima densità di frequenza.

Esempi

- Nella tabella a fianco sono riportati i numeri degli studenti, divisi per classe, della sezione A di un dato Istituto, in un dato anno. Si può osservare che la 1° classe presenta la frequenza massima di 320 studenti, quindi la moda è la classe prima.

Classe	**Studenti**
1°	320
2°	230
3°	212
4°	152
5°	96
Totale	1010

- La tabella a lato raccoglie i dati relativi alla domanda "quante ore la settimana pratichi sport?", posta ad un campione di 50 ragazzi dai 18 ai 25 anni. Si può osservare che 12 e 18 ore presentano la frequenza massima 14, quindi si hanno due mode 12 ore è 18 ore. La distribuzione è bimodale.

Numero di ore	**Numero di ragazzi**
0	4
4	1
8	3
12	14
16	8
18	14
22	6
Totale	50

- La tabella a lato è relativa alla distribuzione delle altezze di un gruppo di studenti:

Altezza	**Numero di studenti**
160-165	5
165-170	8
170-175	15
175-185	10
185-200	2
Totale	40

Poiché le classi hanno ampiezza diversa è necessario calcolare la densità di frequenza.
La massima densità di frequenza si ha in corrispondenza della classe 170-175, essa rappresenta quindi la classe modale.

Altezza	**Densità di frequenza**
160-165	1
165-170	1,6
170-175	3
175-185	1
185-200	0,13

21 Un concessionario di moto vende delle moto di diversa cilindrata come descritto nella tabella: Determinare la moda.

Modello moto	Numero moto vendute
250	34
350	30
500	45
750	100
1000	42

22 Calcolare la moda della distribuzione rappresentata attraverso la seguente tabella statistica

Dati	3	6	8	9	12	24
Frequenze	23	78	67	78	89	100

Calcolare la classe modale della seguente distribuzione:

Abitanti	**Numero comuni**
0-1000	750
1000-2000	1100
2000-5000	950
5000-10000	2500
10000-20000	3000

Media aritmetica

DEFINIZIONE. La **media aritmetica** semplice o media aritmetica, è il valore ottenuto sommando tutti i dati e dividendo tale somma per il numero dei dati.

Se abbiamo a *n* dati $x_1, x_2, ..., x_n$ la media aritmetica semplice M è:

$$M=\frac{x_1+x_2+.....+x_n}{n}=\frac{1}{n}\Sigma x_i$$

Esempio

Riprendiamo in esame la tabella relativa agli studenti, divisi per classe frequentata di un dato istituto scolastico, in un dato anno. Calcoliamo la media aritmetica semplice.

classe	1a	2a	3a	4a	5a	totale
studenti	320	230	212	152	96	1010

Per calcolare la media aritmetica semplice degli studenti, sommiamo tutti gli studenti delle cinque classi e dividiamo tale somma per il numero delle classi: $M=\frac{320+230+212+152+96}{5}=\frac{1010}{5}=202$

Possiamo dire che *in media* si hanno 202 studenti per ogni classe.

DEFINIZIONE. Si definisce **scarto dalla media** (aritmetica) la differenza tra i valori osservati e la media. Se x_1, x_2, …, x_n sono i valori osservati, M la media aritmetica, gli scarti sono $s_1=x_1-M$, $s_2=x_2-M$, ..., $s_n=x_n-M$.

Esempio

Calcoliamo gli scarti dalla media per la distribuzione “studenti per tipologia di classe frequentata”, la cui media è 1010/5 = 202:

Classe	**Studenti**	**Scarto** media=202
1°	320	118
2°	230	28
3°	212	10
4°	152	-50
5°	96	106
Totale	1010	0

Si può osservare che vi solo valori superiori alla media e altri inferiori, tanto che lo scarto è rappresentato in alcuni casi da un numero positivo, in altri da un numero negativo. Si può verificare che la somma degli scarti è nulla, cioè gli scarti positivi compensano sempre quelli negativi.

DEFINIZIONE. La **media aritmetica ponderata** è il valore ottenuto moltiplicando ciascun dato con la propria frequenza, sommando tutti i prodotti fra loro e dividendo tale somma per il numero totale dei dati.

Essa si usa nel caso in cui i dati sono molti ed è già stata fatta la tabella delle frequenze. In questo caso, avendo *n* dati $x_1, x_2,.., x_n$ con le relative frequenze $f_1, f_2, ..., f_n$, la media aritmetica ponderata M è:

$$M=\frac{x_1\cdot f_1+x_2\cdot f_2+.....+x_n\cdot f_n}{n}=\frac{1}{n}\Sigma x_i\cdot f_i$$

Esempio

Riprendiamo la tabella dell'esempio precedente relativa alla domanda “quante ore al giorno passi al computer?”, posta ad un campione di 50 ragazzi dai 16 ai 24 anni. Calcoliamo la media aritmetica ponderata.

Numero di ore	0	1	2	3	4	5	6	totale
Numero di ragazzi	4	6	12	16	8	4	2	50

Calcoliamo la media aritmetica ponderata $M=\frac{0\cdot 4+1\cdot 6+2\cdot 12+3\cdot 16+4\cdot 8+5\cdot 4+6\cdot 2}{50}=\frac{142}{50}=2{,}84$

Possiamo dire che 'in media' ciascun ragazzo passa circa 3 ore al giorno al computer.

23 Trovare la media aritmetica semplice delle seguenti serie di osservazioni:

3, 4, 6, 7, 10 [R.6] 6,7,8,12,15,22 [R.11,7] 34,53,45,67,87,90,100,123 [R.75]

24 In una classe di 15 ragazzi sono stati rilevati i seguenti pesi in kg:

50, 43, 62, 41, 70, 55, 76, 43, 46, 50, 78, 62, 49, 55, 48.

Calcola la media aritmetica semplice del peso dei ragazzi. Costruisci la tabella delle frequenze. Calcola la media aritmetica ponderata del peso dei ragazzi. Che cosa osservi?

25 In un insieme di numeri compaiono quattro volte il 3, cinque volte il 5, tre volte il 6, due volte il 10, due volte il 15. Calcolare la media aritmetica. [R.21]

26 Calcola la media della seguente distribuzione di frequenza [R.7,1]

Classe	2	4	6	7	12	14
Frequenza assoluta	2	4	5	4	3	2

27 Una rivista di auto fornisce i seguenti punteggi per tre diversi modelli di automobili.

	Funzionalità	**volumetria**	**prestazioni**	**sicurezza**	**economia**
Modello 1	2,5	4	3,2	3,5	2,5
Modello 2	2,5	3	4	3,5	2
Modello 3	2,7	3	3,5	3,8	2,5

Quale tipo di auto viene considerato mediamente migliore se si da lo stesso peso alle singole caratteristiche?

28 Un insegnante di fisica, per mostrare che le misure di uno stesso oggetto sono soggette ad errori che dipendono dall'osservatore, ha fatto misurare la lunghezza di una cattedra con un metro a ciascun alunno della propria classe. I risultati sono stati i seguenti:

Lunghezza	100,8	100,9	101,2	101,5	102
Frequenza	2	8	5	4	1

Qual è la lunghezza media della cattedra?

Mediana

DEFINIZIONE. La **mediana** di una successione di dati disposti in ordine crescente è il dato che occupa la posizione centrale se il numero dei dati è dispari; se il numero dei dati è pari è la media aritmetica dei dati della coppia centrale.

Poiché per calcolare la mediana i dati devono essere ordinati è bene sottolineare che tale valore medio non può essere calcolato se il carattere in esame è di tipo qualitativo non ordinabile.

Esempio

Supponiamo di avere 7 dati disposti in ordine crescente: 5, 8, 10, 14, 18, 20, 25
Allora la mediana è il valore centrale, quello che occupa la quarta posizione, il 14.
Supponiamo di avere 8 dati disposti in ordine crescente: 1, 5, 8, 10, 14, 18, 20, 25.
La mediana è la media aritmetica dei dati che occupano la 4° e 5° posizione, cioè $\frac{10+14}{2}=12$.

Supponiamo di avere invece la distribuzione di frequenza riportata nella tabella a fianco.
Il numero di osservazioni è pari, quindi la mediana è il valore della variabile che corrisponde alla media dei due valori centrali, rispettivamente quelli che nella serie ordinata occupano il 13° e il 14° posto.
E' necessario in questo caso determinare le **frequenze cumulate**, esse si ottengono sommando le frequenze che hanno un valore della variabile minore o uguale alla modalità corrispondente.
La frequenza cumulata relativa al voto 3 rimane 2, quella relativa al voto 4 si ottiene sommando la frequenza del 3 e la frequenza del 4, cioè 2+2=4, la frequenza cumulata relativa al voto 5 si ottiene dalla somma della frequenza del 3, del 4 e del 5, e così via.
Il 14° posto corrisponde al voto 6, mentre il 15° posto è il voto 7. La mediana è 6,5.

Voto	**Frequenza**	**Frequenza cumulata**
3	2	2
4	4	4+2=6
5	3	2+4+3=9
6	5	2+4+3+5=14
7	7	2+4+3+5+7=21
8	2	23
9	2	25
10	1	26
Totale	26	

29 Trovare la mediana delle seguenti serie di osservazioni:

3, 4, 6, 7, 10 [R.6]
6, 7, 8, 12, 15, 22 [R.10]
34, 53, 45, 67, 87, 91, 100, 123, 129, 135 [R.89]

30 In una classe di 15 ragazzi sono stati rilevati i seguenti pesi in kg:

50, 43, 62, 41, 70, 55, 76, 43, 46, 50, 78, 62, 49, 55, 48.

Calcola la mediana del peso dei ragazzi. [R.43]

31 Dati i seguenti tempi di risposta ad un test sostenuto da un gruppo di 8 studenti ad un concorso in un ente pubblico 19, 25, 20, 15, 8, 5, 12, 15. Calcola la mediana. [R.15]

32 Calcola la classe mediana sulla base dei dati riportati nella tabella seguente relativa agli occupati nel settore agricolo suddivisi per età:

età	20-25	25-30	30-35	35-40	Oltre 40
frequenza	500	750	230	400	350

►6. Indici di variabilità

Gli indici di variabilità vengono calcolati per analizzare in che modo i termini di una distribuzione si concentrano intorno ad un valore medio.

DEFINIZIONE. Il **campo di variazione** è la differenza fra il valore massimo ed il valore minimo assunti dalla variabile. $CVAR = x_{max} - x_{min}$

Tale indice dà un'informazione molto grossolana perché tiene conto solo del primo e dell'ultimo termine della distribuzione e non tiene conto di tutti i valori intermedi. Si considerino ad esempio le seguenti distribuzioni di stature:

Gruppo A (statura in cm)	150	155	155	160	165	180	175
Gruppo B (statura in cm)	150	160	175	170	170	170	180

Entrambe le distribuzioni hanno lo stesso valore massimo e lo stesso valore minimo e quindi lo stesso campo di variazione, ma mentre nella prima i valori sono concentrati verso il valore minimo nella seconda si concentrano intorno al valore massimo.
L'indice non dà quindi alcuna indicazione su quest'ultima informazione. Né può essere utilizzato come indice di variabilità la media degli scarti fra le singole osservazioni e la loro media aritmetica perché tale valore è sempre uguale a zero.

DEFINIZIONE. Si definisce scarto medio assoluto la media aritmetica dei vlori assoluti degli scarti; esso indica quanto i valori rilevati si disperdono intorno al valore medio della distribuzione. $s = \frac{|s_1| + |s_2| + ... + |s_n|}{n} = \frac{1}{n} \Sigma_1^n |x_i - M|$

Facendo riferimento alla distribuzione

Classe	**Studenti**
1°	320
2°	230
3°	212
4°	152
5°	96
Totale	1010

Si ha che lo scarto medio assoluto è 62,4. Si può allora affermare che in ogni tipologia di classe si hanno inmedia $202 \pm 62,4$ iscritti.
L'indice più utilizzato è la varianza.

DEFINIZIONE. La **varianza** è la media dei quadrati degli scarti fra le singole osservazioni e la loro media aritmetica. $VAR = \frac{((x_1 - M)^2 + (x_2 - M)^2 + ... + (x_n - M)^2)}{n} = \frac{1}{n} \Sigma (x_i - M)^2$

Se i dati si presentano sotto forma di distribuzione di frequenza la media deve essere ponderata con le singole frequenze, cioè:

$$VAR = \frac{((x_1 - M)^2 \cdot f_1 + (x_2 - M)^2 \cdot f_2 + ... + (x_n - M)^2 \cdot f_n)}{n} = \frac{1}{n} \Sigma (x_i - M)^2 \cdot f_i$$

La varianza assume valore zero quando tutti i valori coincidono con la media ed è tanto più grande quanto più i singoli valori si discostano dalla media. Poiché tale indice è influenzato sia dal valore della media che dall'unità di misura utilizzato spesso si utilizza un indice detto **coefficiente di variazione**.

DEFINIZIONE. Il **coefficiente di variazione** è uguale al rapporto fra scarto quadratico medio (radice quadrata della varianza) e media aritmetica. $CV = \frac{VAR}{M}$

Tale indice risulta di particolare utilità per confrontare distribuzioni diverse.

Esempio

E' dato l'elenco delle stature, in cm, dei ragazzi di una classe:

165, 182, 159, 173, 160, 175, 185, 190, 175, 180, 159, 185, 176, 170, 175, 160, 175, 182, 159, 185.

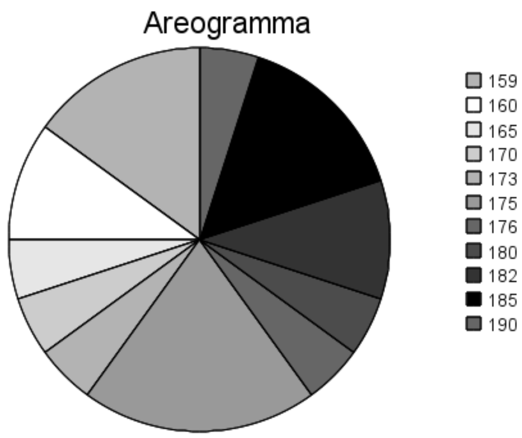
a) Ordina i dati in una tabella delle frequenze.
b) Rappresenta i dati graficamente.
c) Calcola la media, la mediana e la moda.
d) Calcola la varianza e il coefficiente di variazione

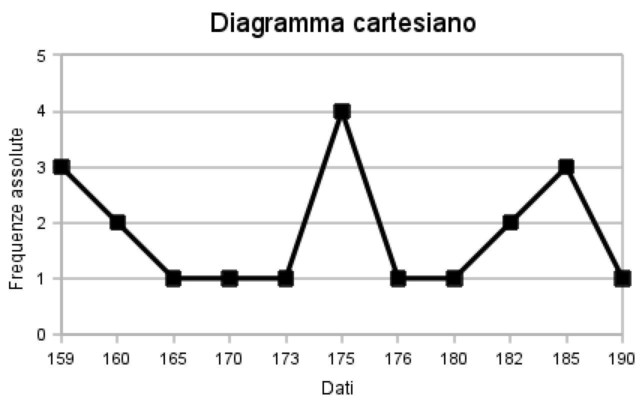
a) Tabella delle frequenze

Dati	**Frequenze assolute**	**Frequenze relative**	**Frequenze percentuali**
159	3	0,15	0%
160	2	0,1	10%
165	1	0,05	5%
170	1	0,05	5%
173	1	0,05	5%
175	4	0,2	20%
176	1	0,05	5%
180	1	0,05	5%
182	2	0,1	10%
185	3	0,15	15%
190	1	0,05	5%
Totale	20	1	100%

- La somma delle frequenze assolute indica il numero totale degli studenti.
- La somma delle frequenze relative deve avvicinarsi il più possibile a 1.
- La somma delle frequenze percentuali deve avvicinarsi il più possibile a 100.

b) Grafici





c) Calcolo della media, mediana e moda:

- Media aritmetica

$$M=\frac{165+182+159+173+160+175+185+190+175+180+159+185+176+170+175+160+175+182+159+185}{20}=173.5$$

- Per determinare la mediana si devono ordinare in modo crescente i dati:
  159, 159, 159, 160, 160, 165, 170, 173, 175, 175, 175, 175, 176, 180, 182, 182, 185, 185, 185, 190
  Essendo i dati in numero pari si calcola la media dei due dati centrali:

mediana = $\frac{175+175}{2}=175$

(Se i dati sono molti è possibile individuare quale è o quali sono i dati centrali utilizzando la tabella delle frequenze opportunamente costruita, cioè con i dati scritti in ordine crescente.)

- La moda è la modalità del carattere altezza che è più ricorrente, cioè quello con la frequenza più alta:
  Moda = 175

33 Scegli la risposta corretta:

a) Se compi un'indagine sul peso degli allievi della tua scuola, la popolazione è costituita da?
- ☐ Dagli allievi della scuola
- ☐ Dai pesi degli allievi della tua scuola
- ☐ Da ciascun allievo della scuola
- ☐ Dal peso di ciascun allievo della scuola

b) Nella stessa indagine, da cosa sarà costituita un'unità statistica?
- ☐ Dagli allievi della scuola
- ☐ Dai pesi degli allievi della tua scuola
- ☐ Da ciascun allievo della scuola
- ☐ Dal peso di ciascun allievo della scuola

c) Un'indagine statistica realizzata intervistando solo una parte della popolazione statistica è definita
- ☐ Incompleta
- ☐ Universo
- ☐ Censimento
- ☐ Per campione

d) La frequenza percentuale si ottiene;
- ☐ Dividendo la frequenza per il totale delle frequenze e moltiplicando il risultato per 100
- ☐ Moltiplicando la frequenza per 100
- ☐ Moltiplicando la frequenza per il totale delle frequenze e dividendo il risultato per 100
- ☐ Dividendo la frequenza per 100

e) La mediana:
- ☐ E' il valore che si ottiene dividendo la somma dei valori delle singole osservazioni per il loro numero
- ☐ E' il valore equidistante dagli estremi di un insieme di dati ordinati
- ☐ E' il valore che si presenta con la massima frequenza in un insieme di dati
- ☐ È il valore che indica la percentuale di dati al di sopra o al di sotto della media

f) La media aritmetica:
- ☐ E' il valore che si ottiene dividendo la somma dei valori delle singole osservazioni per il loro numero
- ☐ E' il valore equidistante dagli estremi di un insieme di dati ordinati
- ☐ E' il valore che si presenta con la massima frequenza in un insieme di dati
- ☐ È il valore che indica la percentuale di dati al di sopra o al di sotto della media

g) La moda:
- ☐ E' il valore che si ottiene dividendo la somma dei valori delle singole osservazioni per il loro numero
- ☐ E' il valore equidistante dagli estremi di un insieme di dati ordinati
- ☐ E' il valore che si presenta con la massima frequenza in un insieme di dati
- ☐ È il valore che indica la percentuale di dati al di sopra o al di sotto della media

h) Nella seguente distribuzione di dati 2, 4, 4, 4, 4, 6, 6, 6, 7, 7:
- ☐ La media aritmetica è 5, la moda è 4, la mediana è 6
- ☐ La media aritmetica è 4, la moda è 6, la mediana è 5
- ☐ La media aritmetica è 5, la moda è 6, la mediana è 4
- ☐ La media aritmetica è 5, la moda è 4, la mediana è 5

i) Nella tua classe la mediana dell'altezza è 152 cm. Questo significa che:
- ☐ Non ci sono studenti più bassi di 152 cm
- ☐ 152 cm è l'altezza più comune
- ☐ la metà degli studenti ha un'altezza inferiore a 152 cm, mentre l'altra metà ha un'altezza superiore
- ☐ in media gli studenti sono alti 152 cm

l) Nella tua classe la moda dell'altezza è 152 cm. Questo significa che:
- ☐ Non ci sono studenti più bassi di 152 cm
- ☐ 152 cm è l'altezza più comune
- ☐ la metà degli studenti ha un'altezza inferiore a 152 cm, mentre l'altra metà l'ha superiore
- ☐ in media gli studenti sono alti 152 cm

m) Nella tua classe la media aritmetica dell'altezza è 152 cm. Questo significa che:
- ☐ Non ci sono studenti più bassi di 152 cm
- ☐ 152 cm è l'altezza più comune
- ☐ la metà degli studenti ha un'altezza inferiore a 152 cm, mentre l'altra metà l'ha superiore
- ☐ se tutti gli alunni avessero la stessa altezza questa sarebbe di 152 cm

34 Calcola il campo di variazione e la varianza della seguente distribuzione: 6 ,8 ,10 ,12 ,14.

35 Nella seguente tabella sono indicati i consumi bimestrali d'acqua, espressi in metri cubi, di una certa famiglia in due anni consecutivi:

Bimestre	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Anno 1	70	80	110	120	140	90
Anno 2	80	75	100	130	120	85

Calcola per ciascun anno media, campo di variazione e varianza. Stabilisci infine, giustificando la risposta, in quale anno c'è stata una variabilità maggiore.

36 Ad un gruppo di studenti è stato chiesta la valutazione dell'esame di biologia, che è risultato così distribuito: 27 – 25 – 26 – 24 – 24 – 21 – 24 – 20 – 29 – 28 – 28 – 24 –22- 25 – 24 – 22 – 24 – 21 – 23 – 28

a) Organizza i dati in una tabella, indicando anche la frequenza assoluta, quella relativa in frazione e quella percentuale;
b) Rappresenta i dati in un grafico a piacere;
c) Calcola moda, media e mediana dandone una breve interpretazione.
d) Calcola la varianza

37 Una ditta paga 5 persone 165 euro alla settimana, 4 persone 199 euro a settimana e 2 persone a 218 euro a settimana. Trova media aritmetica, moda e mediana. Che percentuale di persone ha la retribuzione che si discosta, sia in positivo che in negativo, di 20 euro dalla media?

38 E' stata effettuata un'indagine statistica fra le persone presenti in una libreria riguardo al numero di libri letti nella scorsa estate. I dati sono raccolti nella seguente tabella:

N° libri letti	0	1	2	3	4	5	6	7
N° persone	20	35	9	6	3	0	1	1

a) Organizza i dati in una tabella e calcola la frequenza assoluta, quella relativa e quella percentuale;
b) Rappresenta i dati in un grafico scelto a piacere;
c) Calcola moda, media e mediana dandone una semplice interpretazione.
d) Varianza e coefficiente di variazione

39 In un test sulla prova di velocità di lettura i candidati hanno ottenuto i seguenti risultati:

N° di pagine lette in 15 minuti	10	12	11	9	14	13	7
N° di candidati	2	5	2	1	1	3	4

a) Organizza i dati in una tabella indicando frequenza assoluta, frequenza relativa e percentuale.
b) Rappresenta i dati in un diagramma a bastoni.
c) Calcola la moda, la media e la mediana.
d) Quanti candidati in percentuale hanno letto un numero di pagine sopra la media?

40 In un gruppo di ragazzi le stature (espresse in centimetri) risultano distribuite nel seguente modo:

163	169	171	165	173	165	163	168
168	169	171	169	181	165	168	169
169	163	169	168	150	168	172	181
165	169	172	169	192	173	163	168

a) Costruisci una tabella indicando i dati, la loro frequenza, la frequenza relativa e la percentuale.
b) Suddividi i dati in 4 classi, costruisci la distribuzione di frequenza e rappresentali graficamente con un istogramma.
c) Calcola la media, la moda e la mediana.

41

42 Sono state misurate le pulsazioni al minuto di 20 persone ottenendo i seguenti dati:

79	72	69	69	72
80	73	73	70	66
80	68	70	72	82
75	72	71	74	64

a) Organizza i dati in una tabella comprensiva di percentuale di frequenze.
b) Rappresenta graficamente i dati.
c) Calcola moda, media e mediana.

43 Ventuno ragazzi sono stati sottoposti a una verifica; i dati seguenti esprimono il numero di errori commessi da ciascuno di loro: 3, 4, 1, 3, 6, 6, 3, 1, 4, 7, 3, 1, 1, 3, 7, 7, 1, 3, 7, 3, 3

a) Organizza i dati in una tabella comprensiva di percentuale di frequenze.
b) Rappresenta graficamente i dati.
c) Calcola moda, media e mediana.
d) Quanti alunni, in percentuale, hanno fatto meno di 5 errori?

44 I dati riportati in tabella si riferiscono ai giorni di assenza degli alunni di una classe.

Alunno	**N° giorni**	**Alunno**	**N° giorni**	**Alunno**	**N° giorni**	**Alunno**	**N° giorni**
Mauro	5	Romeo	2	Bruna	7	Silvia	2
Antonio	7	Anna	4	Pietro	2	Alessio	2
Paola	5	Luca	4	Nicola	7	Patrizia	9
Luisa	5	Amedeo	5	Aldo	2	Franca	1
Carla	1	Marco	7	Luigi	2	Chiara	7

a) Organizza i dati in una tabella comprensiva di percentuale di frequenze.
b) Rappresenta i dati con un istogramma.
c) Calcola moda, media e mediana.
d) Quanti alunni, in percentuale, hanno fatto meno assenze rispetto alla media.

45 Nella tabella sono riportati i punteggi ottenuti da 22 alunni in un test formato da 20 quesiti a scelta multipla e il numero di risposte esatte

N° ordine	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
punteggi	80	62	48	71	80	90	75	67	79	62	95	55	58	80	75	65	58	58	62	57	60	48
Risp. esatte	26	12	9	14	16	18	15	13	15	12	19	11	11	16	14	12	11	10	12	11	12	8

Il punteggio medio è stato … … con uno scarto quadratico medio di …
La mediana della distribuzione è il punteggio …
Le risposte esatte sono state in media … … con uno scarto quadratico di … …
Rappresenta ciascuna distribuzione con un istogramma, dopo aver aggregato i dati in classi come indicato nelle tabelle sottostanti

Carattere … … ...			Carattere … … …	
punteggio	Freq. Ass.		Risposte esatte	Freq. Ass.
$48 \le p < 58$			$7 \le r.e. < 9$	
$58 \le p < 68$			$9 \le r.e. < 11$	
$68 \le p < 78$			$11 \le r.e. < 13$	
$78 \le p < 88$			$13 \le r.e. < 15$	
$88 \le p < 98$			$15 \le r.e. < 17$	
			$17 \le r.e. < 19$	
			$19 \le r.e. < 21$	
totale			totale	

46 Una scatola contiene 20 sacchetti di biscotti confezionati da una industria. I pesi rilevati in grammi sono: 380, 365, 371, 375, 376, 369, 376, 377, 381, 383, 384, 377, 370, 375, 374, 376, 373, 378, 383, 378.

a) Il carattere rilevato è … … ..., esso è di tipo … … … e si presenta secondo modalità … … …
Inserisci nella tabella sottostante nella colonna C1 il carattere rilevato e le sue modalità
b) Quanto è il peso totale della scatola? Come lo hai calcolato?
c) Il peso medio dei sacchetti di biscotti è M=... …
d) Qual è il campo di variazione del peso dei sacchetti? CVAR=... …
e) la mediana della distribuzione è … …
f) nella colonna C2 riporta, per ciascun valore del carattere indagato, lo scarto dalla media. Verifica la proprietà degli scarti rispetto rispetto alla media: la loro somma è … …
g) Completa la colonna C3 con il valore assoluto degli scarti e determina lo scarto medio assoluto s= … …
h) Completa la colonna C4 con il quadrato degli scarti e calcola la varianza VAR=... … e il coefficiente di variazione CV=... …
i) Raggruppa i valori del carattere in classi di ampiezza 5 grammi e completa la tabella.
l) Metti in evidenza la classe modale e spiega il significato di moda.
m) Costruisci l'istogramma della distribuzione.

	C1	C2 scarto	C3 |scarto|	C3 $scarto^2$
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				
18				
19				
20				
Tot.				

n) Organizza i dati in classi

Classi di peso	Fa
[365; 370)	

47 Dai dati di scrutinio del primo quadrimestre in una scuola secondaria di 2° grado, è stata elaborata la seguente tabella in cui compaiono i voti in matematica degli alunni delle classi prime:

voto	frequenza	Frequenza relativa	Frequenza %	
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
totale				

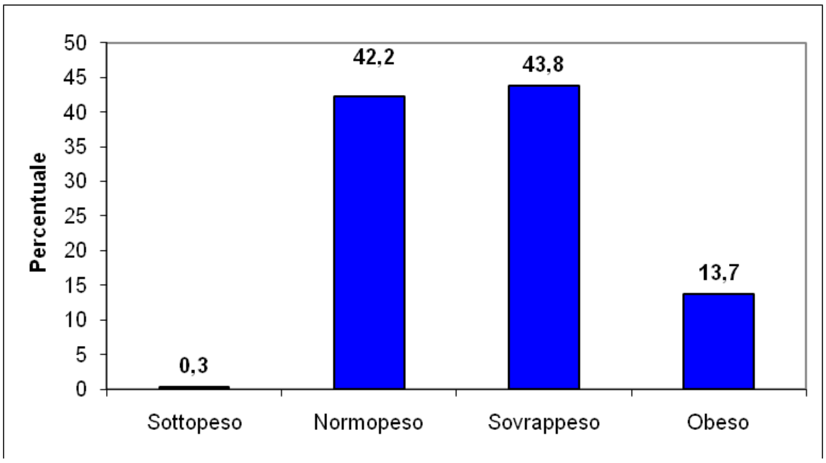
a) Indica il numero di unità statistiche oggetto dell'indagine e spiega come lo puoi ottenere.
b) Il carattere rilevato è … … … ; esso è di tipo … … … e si presenta secondo modalità … … …
c) La tabella assegnata è di dati aggregati o disaggregati?
d) Rappresenta la distribuzione attraverso un grafico a barre (o a nastro)
e) Cosa si intende per frequenza assoluta?
f) Completa la colonna della frequenza relativa
g) Completa la colonna frequenza percentuale.
h) Determina la moda della distribuzione: moda=... …
i) Il voto medio in matematica alla fine del primo quadrimestre è stato
j) Determina la mediana della distribuzione: mediana=... …
k) Amplia la tabella indicando gli scarti dalla media
l) Calcola lo scarto medio assoluto s=... … e lo scarto quadratico medio σ=... …
m) Il voto medio dei ragazzi sufficienti è stato … …, quello dei ragazzi insufficienti è stato … …
n) Rappresenta la situazione conun aerogramma distinguendo tra ragazzi sufficienti e ragazzi insufficienti.

►7. Quesiti dalle prove INVALSI

48 Il reddito medio annuo dei lavoratori agricoli di un certo paese ammonta a 3500 scudi e quello dei lavoratori dell'industria a 4500 scudi. E' corretto affermare che il reddito medio complessivo ammonta a 4000 scudi? (*Prove Invalsi 2011*)

49 La settimana scorsa la mamma chiese ad Aurelia di trascrivere al computer un manoscritto e Aurelia le assicurò che avrebbe battuto 20 pagine al giorno. Per la prima metà del manoscritto andò piuttosto lentamente battendo 10 pagine al giorno e poi, per recuperare il tempo perduto, trascrisse la seconda metà a 30 pagine al giorno. Quando ebbe finito portò a sua madre la trascrizione dicendole: Vedi, ho fatto una media di 20 pagine al giorno, come ti avevo promesso. Infatti (10+30)/2=20. Non è vero, replicò sua madre. (*Prove Invalsi 2011*) [15]

50 In una indagine sullo stato di salute della popolazione sono state raccolte informazioni relative al peso e alla statura di 1000 intervistati. Gli intervistati sono stati poi suddivisi in quattro gruppi, come riportato nel grafico seguente. Quante sono le persone in sovrappeso?



A. Più di 500, ma meno di 600.
B. Più di 600.
C. Meno della somma delle persone sottopeso e obese.
D. All'incirca tante quante sono le persone normopeso.
(*Prove Invalsi 2011*) [D]

51 Quattro amici sostengono l'Esame di Stato conseguendo punteggi la cui media aritmetica è 77,5/100. Se tre di essi hanno conseguito un punteggio, in centesimi, rispettivamente di 70, 76, 80, quale punteggio ha conseguito il quarto studente?

52 La seguente tabella si riferisce alla rilevazione effettuata in una classe 1ª di un Istituto Tecnico.

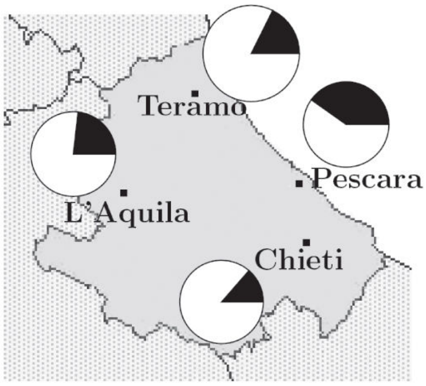
	Scuola media di provenienza			
Sesso	Scuola A	Scuola B	Scuola C	Altre scuole
maschi	5	3	4	2
femmine	6	3	4	3

Qual è la percentuale di alunni provenienti dalla scuola B? (*Prove Invalsi 2004-2005*)

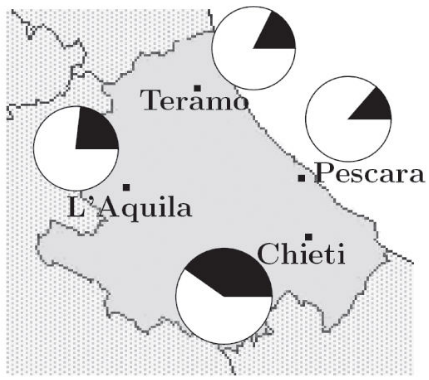
53 Nella tabella seguente sono riportati il numero degli abitanti residenti nei 4 capoluoghi dell'Abruzzo e quelli residenti negli altri comuni di ciascuna delle 4 province (escludendo cioè quelli che abitano nei capoluoghi).

Provincia	Abitanti nel capoluogo ■	Abitanti negli altri comuni □
Chieti	52141	330917
L'Aquila	69161	228921
Pescara	121728	181255
Teramo	51025	238136

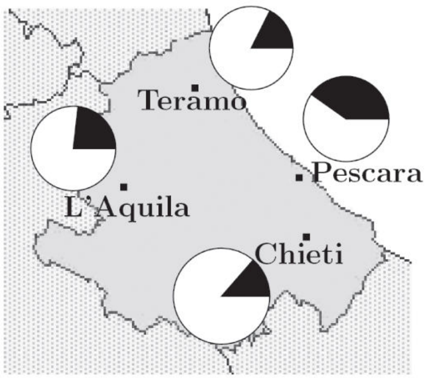
Osserva ora le immagini. I cerchi contenuti in ogni figura hanno area proporzionale alla popolazione di tutta la provincia (capoluogo più altri comuni), mentre la suddivisione interna rispecchia i dati di ogni riga riportati in tabella.



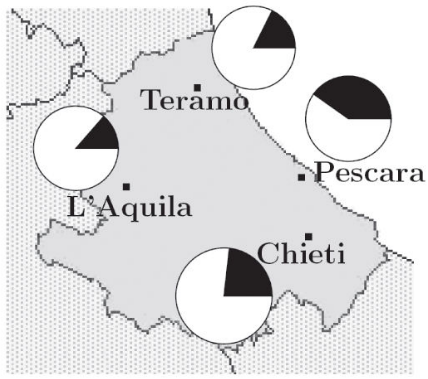
I)



II)



III)



IV)

In quale figura i cerchi (diagrammi) rappresentano correttamente i dati della tabella? (*Prove Invalsi 2005-2006*).

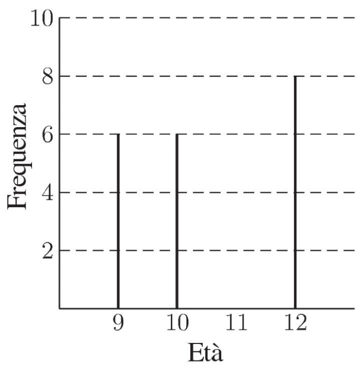
54 In una classe di 25 alunni, i punteggi (abbreviati in tabella con p) ottenuti in un test di matematica risultano distribuiti come indicato nella seguente tabella.

Punteggio	$0 \le p < 20$	$20 \le p < 40$	$40 \le p < 60$	$60 \le p < 80$	$80 \le p \le 100$
Numero alunni					

Qual è la percentuale di alunni che ha ottenuto un punteggio inferiore a 60? (*Prove Invalsi 2005-2006*)

55 Un impiegato ha percepito per i primi 3 mesi dell'anno uno stipendio mensile di 850 euro. Nei 9 mesi successivi ha percepito lo stipendio mensile precedente aumentato di 200 euro. Qunat'è lo stipendio medio nell'anno di quell'impiegato? (*Prove Invalsi 2005-2006*)

56 Nel grafico seguente si riporta l'età dei ragazzi che frequentano una palestra. Qual è la media aritmetica dell'età dei ragazzi se la distribuzione di frequenza è quella indicata nel grafico? (*Prove Invalsi 2005-2006*)

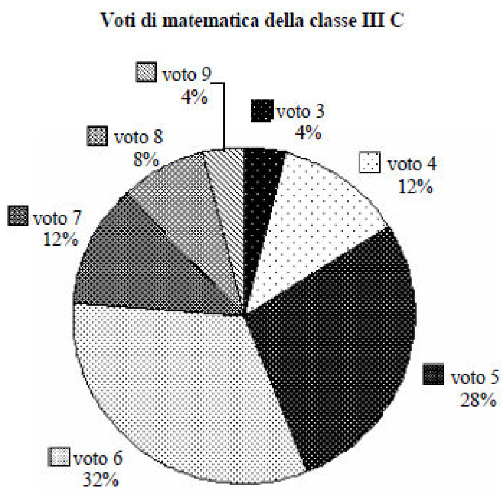


57 Il Ministero dell'Istruzione ha diffuso le seguenti informazioni sul numero di alunni stranieri della scuola italiana dennl'anno scolastico 2003-2004. La tabella riporta solo le 5 nazionalità più numerose.

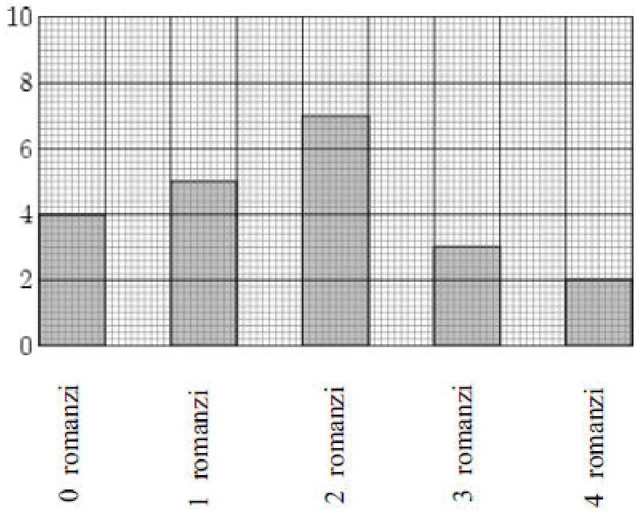
Nazionalità più numerose	Numero di alunni	Percentuale di alunni sul totale degli stranieri
Albania	50000	18,00%
Marocco	42000	15,00%
Romania	28000	10,00%
Cina	16000	6,00%
Ecuador	11000	4,00%

Cosa si può dedurre da tali dati sugli alunni stranieti di nazionalità russa?
Sono...
A. meno di 11000
B. sicuramente meno di 400
C. una percentuale compresa fra il 4% e il 18%
D. assenti dalle scuole italiane
(*Prove Invalsi 2004-2005*)

58 I 25 alunni della III C, dopo aver raccolto i voti conseguiti nella verifica scritta di matematica, hanno costruito il seguente grafico:
Quanti ragazzi hanno conseguito come voto 7?
A. 12
B. 7
C. 5
D. 3
(*Prove Invalsi 2006-2007*)



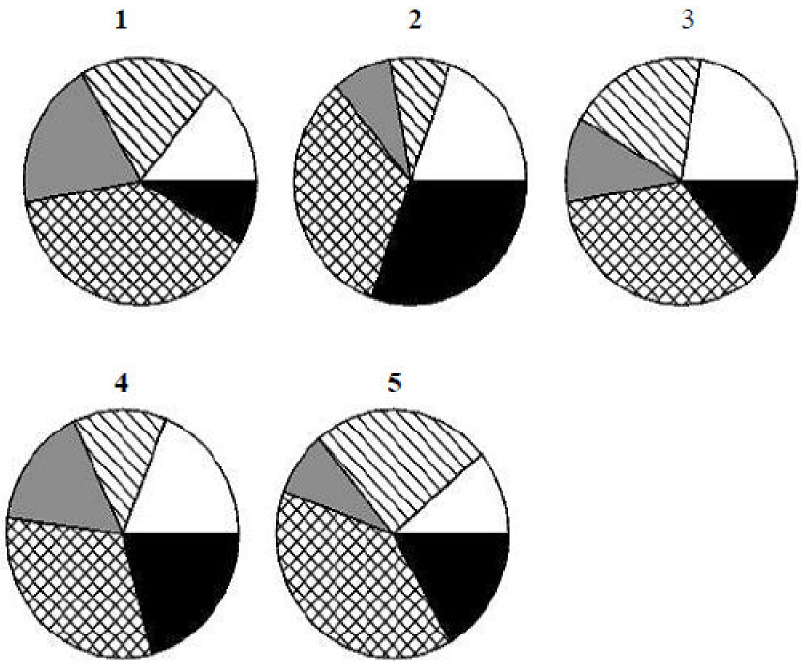
59 La figura indica quanti romanzi leggono gli alunni di una classe in un mese. Quanti sono gli alunni che leggono almeno 2 romanzi?



60 La tabella mostra la superficie delle varie province del Lazio.

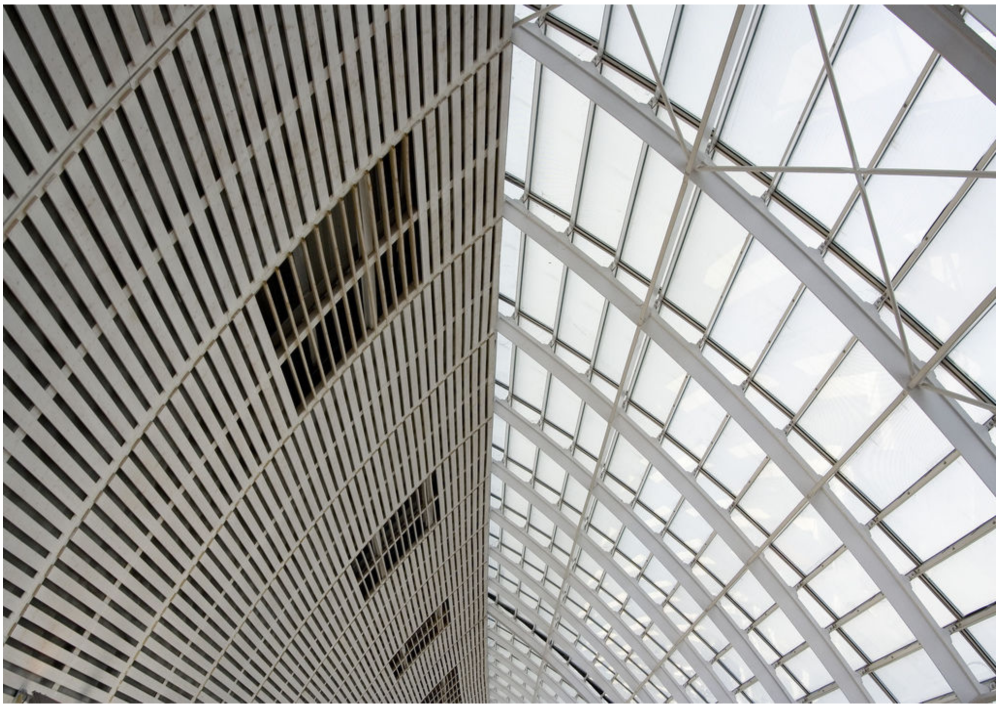
Provincia	Superficie (km^2)	Colore
Frosinone	3240	
Latina	2251	
Rieti	2749	
Roma	5352	
Viterbo	3612	

Quale dei diagrammi riportati sotto descrive graficamente i dati della tabella?



MATEMATICA C3 - ALGEBRA 1

8. Vettori e Funzioni Circolari



Avignon TGV 3 by Nelson Minar
http://www.flickr.com/photos/nelsonminar/293125466/

Indice

1. VETTORI

►1. Prime definizioni

Sappiamo che due punti A e B presi su una retta determinano il segmento di estremi A e B; fissiamo su di esso un verso di percorrenza, per esempio da A verso B.

DEFINIZIONE: il **segmento orientato** di estremi A e B si chiama **vettore**; esso viene indicato con $\overrightarrow{AB}$ oppure con $\vec{u}$; il punto A è il primo estremo e B il secondo estremo.

Un **vettore libero** è caratterizzato da tre elementi:

- la **direzione** indicata dalla retta su cui giace;
- il **verso** indicato dalla punta della freccia che dal primo estremo va al secondo estremo;
- il **modulo o intensità,** uguale alla misura del segmento AB: scriveremo $|\vec{u}| = \overline{AB}$ e leggeremo "il modulo del vettore $\vec{u}$ è uguale alla misura del segmento AB".

Un **vettore applicato** è caratterizzato oltre che dai tre elementi suddetti anche dal **punto di applicazione**, ovvero il primo estremo del vettore.

Esempio

I due vettori $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{DC}$ in figura 1 appartengono alla stessa retta, quindi hanno stessa direzione, verso opposto e modulo diverso.

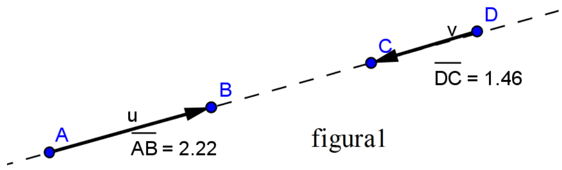


figura1

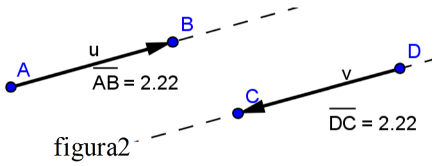


figura2

I vettori $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{DC}$ in figura 2 appartengono a rette parallele, quindi hanno stessa direzione, verso opposto e uguale intensità: essi si chiamano **vettori opposti** e scriveremo $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{DC}$.

I vettori $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{DD'}$ in figura 3 appartengono a rette parallele, quindi hanno stessa direzione, lo stesso verso e uguale intensità: essi si chiamano **vettori equipollenti** e scriveremo $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{DD'}$.

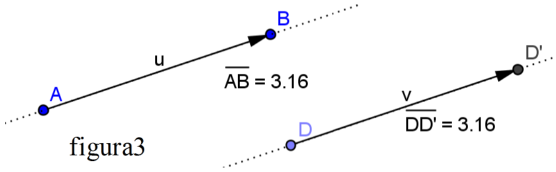


figura3

Osserviamo che un vettore può essere interpretato come uno spostamento dal primo estremo al secondo estremo, avente la direzione della retta cui appartiene il vettore stesso e il verso quello indicato dalla freccia.

Nel piano dotato di riferimento cartesiano ortogonale (figura 4) è rappresentato il vettore $\overrightarrow{AB}$ avente il primo estremo nel punto A(-2;1) e il secondo estremo in B(1;2). Per andare da A a B si possono compiere diversi percorsi: possiamo procedere sul vettore $\vec{u}$ oppure possiamo scegliere di compiere due spostamenti particolari, uno parallelo all'asse x e l'altro parallelo all'asse y. In tal modo si determina il punto C(1;1) come "tappa intermedia" per raggiungere B: ci spostiamo sul vettore $\overrightarrow{AC}$ e poi da C sul vettore $\overrightarrow{CB}$.

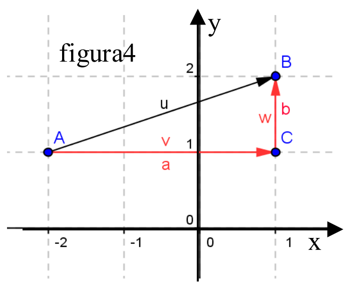


figura4

DEFINIZIONE. Chiamiamo **componenti** del vettore $\overrightarrow{AB}$ **le misure con segno dei segmenti AC e CB** con la precisazione di assegnare il segno + alle misure dello spostamento avente lo stesso verso degli assi coordinati e segno – se il verso è opposto a quello degli assi coordinati.

In figura4 le componenti del vettore assegnato sono positive in quanto sia lo spostamento orizzontale che quello verticale avvengono nello stesso verso degli assi coordinati. Scriveremo $\overrightarrow{AB}(+3;+1)$

Tutti i vettori del piano cartesiano di coordinate $(+3;+1)$ sono equipollenti ad $\overrightarrow{AB}$. Ciò che li distingue in modo univoco è il loro punto di applicazione.

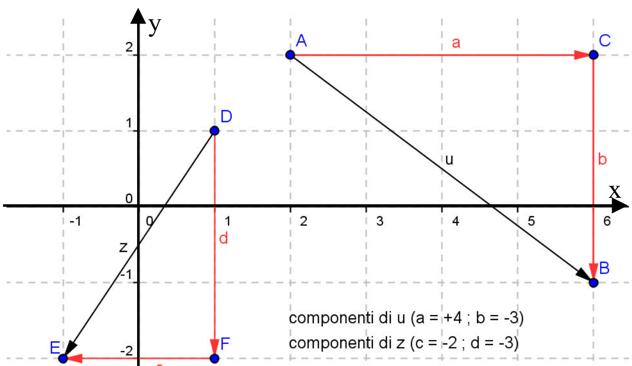


figura 5

Esempio

Il vettore $\vec{z}$ della figura 5 ha componenti entrambe negative poiché lo spostamento orizzontale e quello verticale avvengono in verso contrario rispetto al verso degli assi coordinati: scriveremo $\vec{z}(-2;-3)$

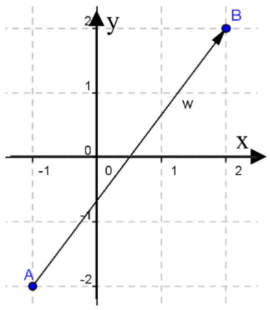
Il vettore $\vec{u}$ della figura 5 ha la componente lungo l'asse x positiva e negativa la componente verticale: scriveremo $\vec{u}(+4;-3)$.

Regola per determinare le componenti cartesiane di un vettore $\vec{v}$, note le coordinate cartesiane degli estremi $A(x_A;y_A)$ e $B(x_B;y_B)$:

- dal primo estremo tracciamo la parallela all'asse x e dal secondo estremo la parallela all'asse y determinando il punto $C(x_B;y_A)$,
- calcoliamo le misure con segno $a=x_B-x_A;\ b=y_B-y_A$,
- scriviamo $\vec{v}(a;b)$.

Ottenute le componenti si determina il **modulo del vettore** utilizzando il teorema di Pitagora, si ha infatti $|\vec{u}|=\overline{AB}=\sqrt{a^2+b^2}$; il rapporto $\frac{b}{a}=m_{(\vec{u})}$ indica la **direzione del vettore.**

1 Assegnato il vettore della figura, determinate le sue componenti, il modulo e la direzione.

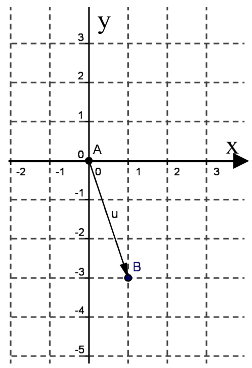


Completate i passi indicati nella strategia risolutiva:
scrivete le coordinate degli estremi del vettore assegnato A(…;…) e B(…;…)
individuate le componenti del vettore $\vec{w}$

- segnate il punto C; calcolate $a=x_B-x_A$ e $b=y_B-y_A$
- le componenti del vettore sono $\vec{w}(\ldots;\ldots)$

determinate il modulo del vettore $|\vec{w}|=\sqrt{\ldots\ldots\ldots\ldots}$
determinate la direzione del vettore $m_{(\vec{w})}=\ldots\ldots\ldots$

2 Tracciate nel riferimento cartesiano ortogonale il vettore $\vec{v}(1;-3)$.



Nella richiesta di questo quesito sembra manchi qualcosa: conosciamo le componenti del vettore, ma dove mettiamo il primo estremo?

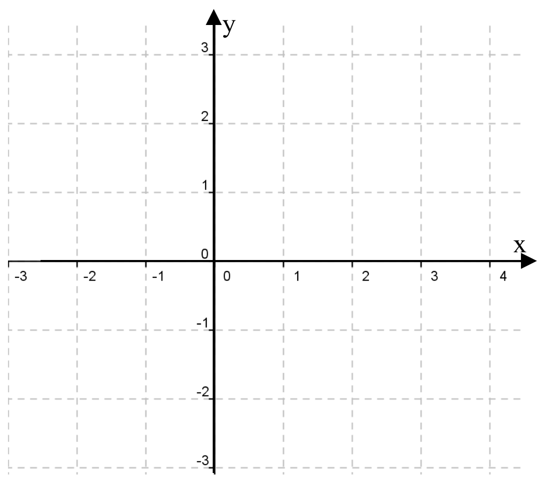
Provate a mettere il primo estremo in ciascuno dei seguenti punti $A_1(-1;2);\ A_2(1;0);\ A_3(3;-2)$ e determinate il secondo estremo di ciascun vettore; completate indicando per ciascuno il modulo e la direzione.

È vero che tutti i vettori tracciati sono equipollenti?

In figura è rappresentato il vettore equipollente a quelli costruiti avente il primo estremo nell'origine del riferimento.

Conclusione: quando si assegna un vettore mediante le sue componenti collocheremo il primo estremo nell'origine del riferimento cartesiano ortogonale e il secondo estremo (punta della freccia) avrà come coordinate le componenti del vettore in questione.

3 Segnate nel piano dotato di riferimento cartesiano ortogonale i vettori $\vec{v}(1;2)$ e $\vec{w}(3;-1)$. Possiamo affermare che $|\vec{w}|=2\cdot|\vec{v}|$?



►2. Operazioni con i vettori

Nel punto A del piano sono applicati due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$: dall'estremo B si traccia la retta parallela ad AC e da C la parallela ad AB e si indica con D il loro punto di intersezione.
Il vettore $\overrightarrow{AD}$ individuato dalla diagonale AD del parallelogrammo è la **somma dei vettori** $\vec{u}$ e $\vec{v}$, e si scrive $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$.

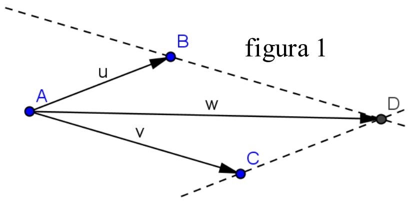


figura 1

Nota storica. Nella sua opera "Philosophiae naturalis principia mathematica" del 1682, Isaac Newton (1642-1727) nel primo corollario alle leggi del moto, scrive: "*un corpo spinto da due forze congiunte descriverà la diagonale di un parallelogrammo nello stesso tempo nel quale descriverebbe separatamente i lati*".

4 Provate a giustificare la seguente affermazione: "L'operazione di addizione definita secondo la regola del parallelogrammo gode della proprietà commutativa".
Illustriamo con un esempio che vale anche la **proprietà associativa**; dimostriamo che vale $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$

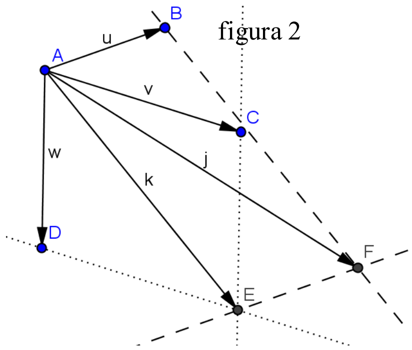


figura 2

Nella figura 2 è realizzata la costruzione $\vec{v}+\vec{w}=\vec{k}$ e $\vec{u}+\vec{k}=\vec{j}$

Nella figura 3 è realizzata la costruzione $\vec{u}+\vec{v}=\vec{z}$ e $\vec{z}+\vec{w}=\vec{j}$

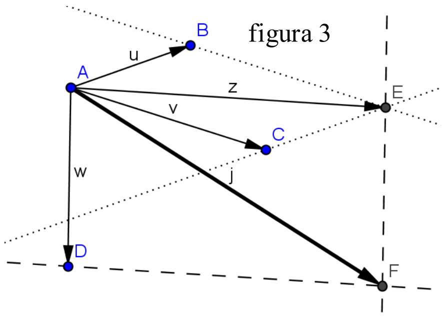


figura 3

sovrapponendo le due figure si può constatare che i vettori $\vec{j}$ risultanti coincidono.
Osserviamo che la validità della proprietà associativa ci permette di costruire la somma di più vettori.
Per come è definita l'operazione di somma, pensando al vettore come rappresentante di uno spostamento dal primo estremo al secondo, possiamo interpretare la figura 1 come lo spostamento di un punto prima da A fino a B e poi da questo fino a D, essendo $\overrightarrow{BD}$ un vettore equipollente ad $\overrightarrow{AC}$. Quindi possiamo affermare che il vettore somma di due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ si può determinare prendendo due vettori AB e BC rispettivamente equipollenti ai dati; se $\overrightarrow{AB}\equiv\vec{u}$ e $\overrightarrow{BC}\equiv\vec{v}$ (figura 4) allora la somma è il vettore $\overrightarrow{AC}$, avente A come primo estremo e C, ultimo estremo del secondo vettore, come secondo estremo.

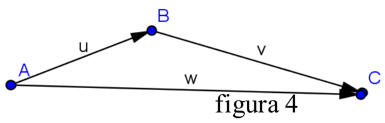


figura 4

Pertanto la somma di più vettori si può semplicemente determinare scegliendo per ogni addendo il vettore equipollente avente il primo estremo nell'estremo finale dell'addendo precedente: la somma è il vettore avente il primo estremo nel punto iniziale del primo addendo e l'estremo finale nel secondo estremo dell'ultimo addendo $\vec{z}+\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{s}$ (figura5)

Abbiamo visto come si costruisce geometricamente il vettore somma di vettori; vediamo come si determinano le componenti del vettore somma se la questione è posta nel riferimento cartesiano ortogonale.

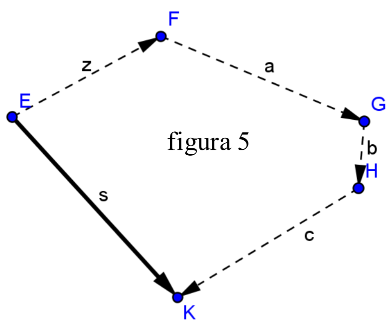
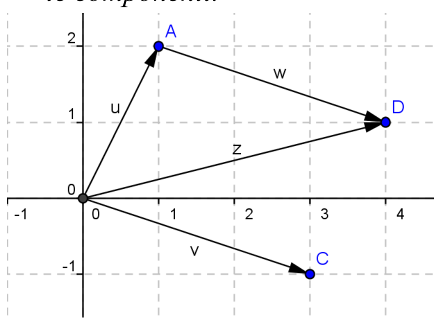


figura 5

Esempio

Nel piano dotato di riferimento cartesiano ortogonale costruiamo il vettore somma dei vettori $\vec{u}(1,2)$ *e* $\vec{v}(3;-1)$ *e determiniamone le componenti.*



Strategia risolutiva:

- costruiamo il vettore $\vec{w}$ equipollente al vettore $\vec{v}$ applicato al punto A;
- determiniamo il punto D(4,1)
- costruiamo il vettore $\vec{z}=\vec{u}+\vec{w}$ di coordinate $\vec{z}(4;1)$

Osserviamo che il primo passo realizzato ci permette di affermare $x_z = x_u + x_v$ e $y_z = y_u + y_v$.

Regola per determinare le componenti cartesiane del vettore $\vec{z} = (x_z ; y_z)$, note le componenti cartesiane degli addendi $\vec{u} = (x_u ; y_u)$ e $\vec{v} = (x_v ; y_v)$.

Il primo passo realizzato nella costruzione precedente ci permette di affermare che le componenti del vettore somma sono la somma delle componenti dei vettori addendi:

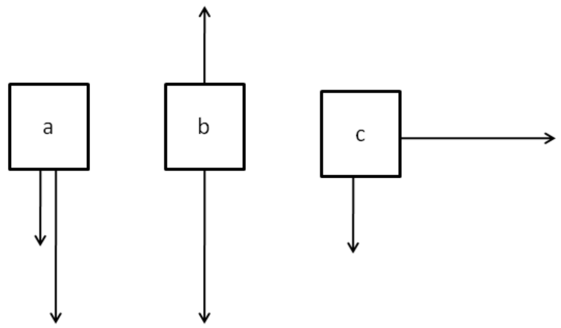
$$x_z = x_u + x_v \quad \text{e} \quad y_z = y_u + y_v \ .$$

5 Determinate il vettore $\vec{z} = \vec{u} + \vec{w}$ essendo $\vec{u} = (-1 ; -3)$ e $\vec{v} = (2 ; -1)$. Determinate inoltre il modulo di $\vec{z}$ e la sua direzione. Potete affermare che $|\vec{z}| = |\vec{u}| + |\vec{v}|$?

Applicazioni dei vettori

I vettori sono degli enti geometrici, essi sono utilizzati in fisica per rappresentare tutte le grandezze che sono definite conoscendo modulo, direzione, verso e punto di applicazione. Esempi di grandezze vettoriali sono: la velocità, l'accelerazione, la forza, la densità di corrente elettrica.

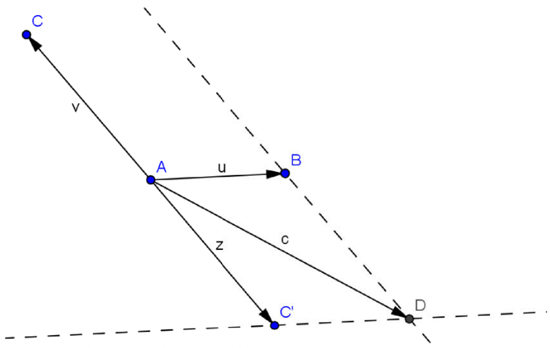
6 Nella figura seguente è rappresentata una scatola vista dall'alto, su di essa agiscono due forze, calcola la forza risultante in ognuno dei casi della in figura, sapendo che una forza misura 4N e l'altra 9N



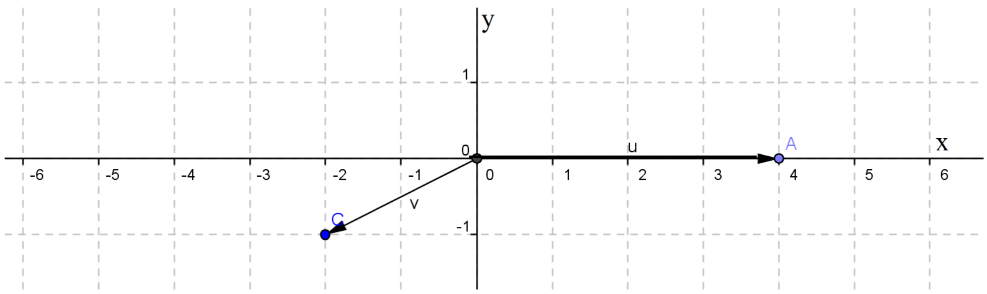
Svolgimento

a) I due vettori hanno la stessa direzione e lo stesso verso quindi la risultante si ottiene addizionando i due moduli: $|\vec{r}| = 4\,N + 9\,N = 13\,N$
b) Poiché i vettori sono opposti come verso si procede sottraendo al vettore maggiore il vettore minore e la forza risultante ha la direzione ed il verso del vettore di modulo maggiore: $|\vec{r}| = 9\,N - 5\,N = 4\,N$
c) I due vettori hanno direzioni perpendicolari in questo caso il vettore somma si ottiene con il metodo del parallelogrammo, quindi applicando il teorema di Pitagora: $|\vec{r}| = \sqrt{(4\,N)^2 + (9\,N)^2}$

Per determinare la **differenza tra due vettori** $\vec{u}$ e $\vec{v}$ si procede nel seguente modo:
costruiamo il vettore $\vec{z} = -\vec{v}$
determiniamo con la regola del parallelogrammo $\vec{u} + \vec{z} = \vec{c}$
Il vettore ottenuto è la differenza tra i vettori assegnati: $\vec{c} = \vec{u} - \vec{v}$



7 Sono assegnati i vettori $\vec{u}(4 ; 0)$ e $\vec{v}(-2 ; -1)$.
Determinare $\vec{d}_1 = \vec{u} - \vec{v}$ e $\vec{d}_2 = \vec{v} - \vec{u}$. Cosa osservate?



Moltiplicazione di un numero reale per un vettore

Assegnato un numero reale r e un vettore $\vec{v}$ il prodotto $r\cdot\vec{v}$ è un vettore $\vec{p}$ avente

- la stessa direzione del vettore $\vec{v}$,
- intensità o modulo uguale al prodotto del modulo di $\vec{v}$ per il valore assoluto di r: $|\vec{p}|=|r|\cdot|\vec{v}|$,
- verso uguale al verso di $\vec{v}$ se r è positivo, verso opposto a quello di $\vec{v}$ se r è negativo.

Esempio

Nella figura 6 è rappresentato il vettore $\vec{v}$ e altri vettori ottenuti moltiplicandolo per un numero reale: $\vec{a}=2\cdot\vec{v}\ ;\ \vec{b}=-\frac{3}{2}\cdot\vec{v}\ ;\ c=\frac{1}{3}\cdot\vec{v}$

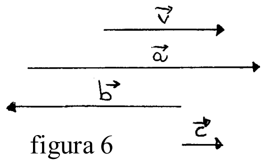


figura 6

Nel piano dotato di riferimento cartesiano ortogonale rappresentiamo il vettore $\vec{u}(4\,;1)$; le componenti del vettore $\vec{p}=-2\cdot\vec{u}$ si ottengono moltiplicando per –2 le componenti del vettore dato $\vec{p}(-8\,;-2)$, $\vec{p}$ e $\vec{u}$ hanno la stessa direzione essendo $m_{(\vec{u})}=\frac{1}{4}=m_{(\vec{p})}$ e anzi appartengono alla stessa retta avendo in comune il punto di applicazione.
In generale $\vec{u}(x_u\,;y_u)\rightarrow r\cdot\vec{u}=\vec{p}(r\cdot x_u\,;r\cdot y_u)$ e $m_{(\vec{u})}=m_{(\vec{p})}$

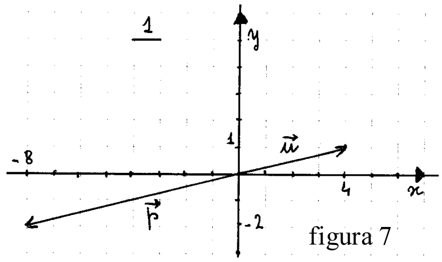


figura 7

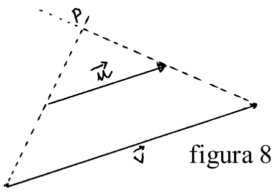
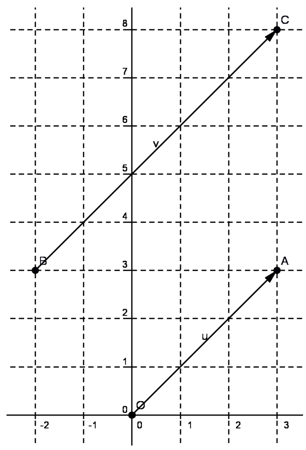


figura 8

Osservazione: "se due vettori hanno la stessa direzione, cioè appartengono a rette parallele (non coincidenti), si può sempre trovare un numero reale r tale che uno sia r volte l'altro". La figura 8 può suggerirvi come giustificare l'osservazione precedente.



8 Nel riferimento cartesiano ortogonale sono rappresentati i vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$; completate:

a) Il vettore $\vec{u}$ è applicato nell'origine e ha componenti…………
b) Il vettore $\vec{v}$ ha il primo estremo in B(…. , …..) e il secondo in ……………….. pertanto le sue componenti sono ……………..
c) $m_{(\vec{u})}=\ldots\ldots$ e $m_{(\vec{v})}=\ldots\ldots$ pertanto essi sono ………..
d) $|\vec{u}|=\ldots\ldots$ e $|\vec{v}|=\ldots\ldots$
e) determinate r in modo che $\vec{v}=r\cdot\vec{u}$

9 Determinate le componenti del vettore $\vec{w}=2\cdot\vec{v}$ essendo $\vec{v}\left(\frac{3}{2}\,;-2\right)$; verificate che $\vec{v}$ e $\vec{w}$ hanno stessa direzione e $|\vec{w}|=2\cdot|\vec{v}|$.

10 Verificate che $\frac{3}{2}\cdot(\vec{x}+\vec{y})=\frac{3}{2}\cdot\vec{x}+\frac{3}{2}\cdot\vec{y}$ essendo $\vec{x}\left(-\frac{5}{4}\,;1\right)$ e $\vec{y}=(4\,;-1)$.

11 Sono assegnati i vettori $\vec{x}\left(\frac{1}{2}\,;1\right);\ \vec{y}(-3\,;-1);\ \vec{z}(0\,;3)$. Costruite i vettori: $\vec{p}_1=2\cdot\vec{x}-\vec{y}\ ;\ \vec{p}_2=2\cdot(\vec{z}+\vec{y});\ \vec{p}_3=-\frac{3}{2}\vec{z}+2\cdot\vec{y}+3\cdot\vec{x}$ e determinatene le componenti.

►3. Dipendenza e indipendenza lineare

DEFINIZIONE: Diciamo che un vettore $\vec{v}$ è **combinazione lineare** di altri vettori $\vec{x}\,;\ \vec{y}\,;\ \vec{z}$ se vale l'uguaglianza: $\vec{v}=r_1\cdot\vec{x}+r_2\cdot\vec{y}+r_3\cdot\vec{z}$; i numeri reali $r_{1,}\ r_{2,}\ r_3$ sono i coefficienti della combinazione lineare.

Nell'esercizio precedente hai costruito i vettori $\vec{p}_1\,;\ \vec{p}_2\,;\ \vec{p}_3$ eseguendo la somma algebrica di vettori costruiti moltiplicando per numeri reali i vettori assegnati $\vec{x}\,;\ \vec{y}\,;\ \vec{z}$. Possiamo dire che

$\vec{p}_1$ è combinazione lineare dei vettori $\vec{x}$ e $\vec{y}$ i cui coefficienti sono $r_1=2,\ r_2=-1$,

$\vec{p}_2$ è combinazione lineare dei vettori $\vec{z}$ e $\vec{y}$ i cui coefficienti sono $r_1=2,\ r_2=2$,

$\vec{p}_3$ è combinazione lineare dei vettori $\vec{x}$, $\vec{y}$ e $\vec{z}$ i cui coefficienti sono $r_1=-\frac{3}{2},\ r_2=2,\ r_3=3$.

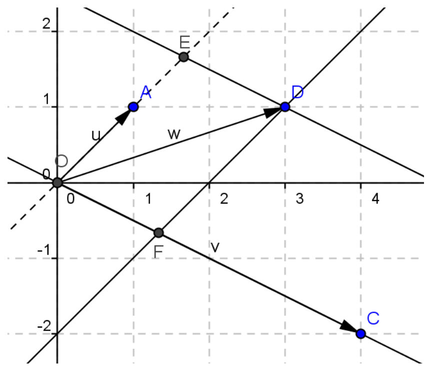
Nell'insieme $\mathbb{V}$ di tutti i vettori del piano cartesiano, consideriamo i vettori $\vec{i}\,(1\,;0)$ e $\vec{j}\,(0\,;1)$ rispettivamente appartenenti all'asse delle ascisse e delle ordinate; possiamo notare che $|\vec{i}|=|\vec{j}|=1$.
Ora ogni vettore $\vec{v}$ del piano può essere scritto come combinazione lineare di $\vec{i}$ e $\vec{j}$; le sue componenti sono i coefficienti della combinazione lineare con cui si determina $\vec{v}$.

$$\vec{v}\,(x_v\,;\,y_v)=x_v\cdot\vec{i}+y_v\cdot\vec{j}$$

12 Completate le scritture:

$$\vec{v}\left(-\sqrt{2}\,;\frac{5}{4}\right)=\ldots\ldots\cdot\vec{i}+\ldots\ldots\cdot\vec{j}\,;\ \vec{u}\,(1\,;-1)=\ldots\ldots\cdot\vec{i}+\ldots\ldots\cdot\vec{j}$$

$$\vec{h}\,(\ldots\ldots;\ldots\ldots)=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\vec{i}-9\cdot\vec{j}\,;\ \vec{z}\,(\ldots\ldots;\ldots\ldots)=\frac{3\sqrt{5}}{3}\cdot\vec{i}$$



Esempio

Disegniamo nel riferimento cartesiano ortogonale i vettori $\vec{u}\,(1\,;1),\ \vec{v}\,(4\,;-2),\ \vec{w}\,(3\,;1)$; ci chiediamo se è possibile scrivere $\vec{w}$ come combinazione lineare degli altri due.

Il metodo geometrico

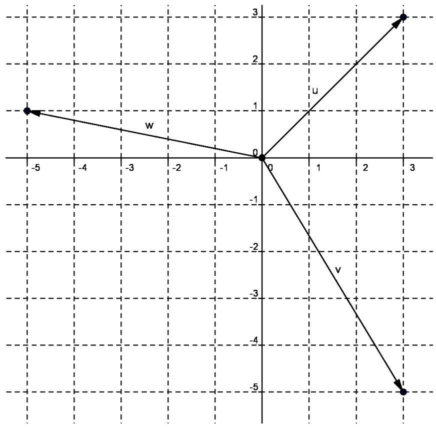
Dobbiamo costruire due vettori $\vec{u}\,'=r_1\cdot u$ e $\vec{v}\,'=r_2\cdot v$ tali che sommati diano il vettore $\vec{w}$.
Dal punto D tracciamo la parallela alla retta OC, che interseca la retta AO nel punto E; dallo stesso punto D tracciamo la parallela alla retta AO che interseca in F la retta OC. I punti E ed F sono gli estremi dei due vettori $\overrightarrow{OE}=r_1\cdot\vec{u}$ e $\overrightarrow{OF}=r_2\cdot\vec{v}$ con $r_1>1$ e $r_2<1$ rispettivamente ottenuti allungando e accorciando $\vec{u}$ e $\vec{v}$: si ha $\vec{w}=r_1\cdot\vec{u}+r_2\cdot\vec{v}$.

Il metodo algebrico

dobbiamo trovare due numeri r_1 e r_2 tali che

$$\vec{w}=r_1\cdot\vec{u}+r_2\cdot\vec{v}\ \rightarrow\ \begin{cases}3=1\cdot r_1+4\cdot r_2\\1=1\cdot r_1-2\cdot r_2\end{cases}$$ e risolvendo si ottiene

$r_1=\frac{5}{3}\,;\ r_2=\frac{1}{3}$ coerentemente ai risultati della costruzione effettuata.



13 Dati i vettori della figura, applicate il metodo geometrico per determinare i vettori che permettono di scrivere $\vec{w}$ come combinazione lineare degli altri due.
Riprendete questi stessi vettori e determinate i vettori che permettono di scrivere $\vec{v}$ come combinazione lineare degli altri due.
Riprendete questi stessi vettori e determinate i vettori che permettono di scrivere $\vec{u}$ come combinazione lineare degli altri due.

DEFINIZIONE. Dato un insieme $\mathbb{V}$ di vettori, questi si dicono **linearmente dipendenti** se almeno uno di essi si può scrivere come combinazione lineare degli altri. Altrimenti si dicono **linearmente indipendenti**.

Osserviamo che "altrimenti" nella definizione significa che nessun vettore dell'insieme può essere scritto come combinazione lineare degli altri.

14 I vettori dell'esercizio precedente sono linearmente dipendenti?

15 Spiegate perché i tre vettori $\vec{v}(1{,}2)$; $\vec{u}(3{,}1)$ e $\vec{w}(-3{,}-6)$ sono linearmente dipendenti.

2. INTRODUZIONE ALLA TRIGONOMETRIA

►1. Prime definizioni

L'etimologia della parola "trigonometria" dal greco trígonon (τρίγωνον)-triangolo e métron (μέτρον)-misura chiarisce in cosa consiste questa parte della matematica che ci accingiamo ad affrontare.

La **trigonometria** nasce dal problema di **risolvere un triangolo**, cioè di ricavare la misura di alcuni suoi elementi incogniti date le misure di altri elementi. Dal momento che gli elementi di un triangolo sono sei, i tre lati e i tre angoli, vedremo come, date le misure di almeno tre di questi elementi di cui almeno uno sia un lato, sia possibile determinare la misura degli altri tre elementi mancanti.

Disegniamo un triangolo rettangolo retto in A avendo cura di indicare con la stessa lettera vertice e lato opposto, come nella figura 1 a fianco. Tutte le osservazioni che faremo si riferiscono alla figura 1.

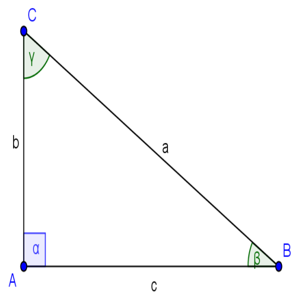


Figura 1

Ricordiamo che tra i lati sussiste la relazione del teorema di Pitagora $\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2$ e che ciascun cateto è minore dell'ipotenusa. Ricordiamo anche che gli angoli acuti sono complementari $\hat{C} + \hat{B} = 90°$.

Osserviamo che basta conoscere la misura di due lati per determinare la misura del terzo lato, ma queste informazioni non ci permettono di determinare l'ampiezza degli angoli acuti se non in casi particolari. Se conosciamo un angolo acuto e la misura di un lato non possiamo determinare la misura degli altri elementi mancanti.

Riferendoci alla figura, chiamiamo cateto adiacente all'angolo acuto β il cateto AB indicato con c e cateto opposto all'angolo β il cateto AC indicato con b.

Introduciamo le seguenti

DEFINIZIONI

$sen(\beta) = \dfrac{\text{cateto opposto}}{\text{ipotenusa}} = \dfrac{AC}{CB} = \dfrac{b}{a}$ da cui $b = a \cdot sen(\beta)$

$\cos(\beta) = \dfrac{\text{cateto adiacente}}{\text{ipotenusa}} = \dfrac{AB}{CB} = \dfrac{c}{a}$ da cui $c = a \cdot \cos(\beta)$

$\tan(\beta) = \dfrac{\text{cateto opposto}}{\text{cateto adiacente}} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{b}{c}$ da cui $b = c \cdot \tan(\beta)$

Per l'angolo $\gamma = 90° - \beta$ complementare di β:

$sen(\gamma) = \dfrac{\text{cateto opposto}}{\text{ipotenusa}} = \dfrac{AB}{CB} = \dfrac{c}{a}$ da cui $c = a \cdot sen(\gamma)$

$\cos(\gamma) = \dfrac{\text{cateto adiacente}}{\text{ipotenusa}} = \dfrac{AC}{CB} = \dfrac{b}{a}$ da cui $b = a \cdot \cos(\gamma)$

$\tan(\gamma) = \dfrac{\text{cateto opposto}}{\text{cateto adiacente}} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{c}{b}$ da cui $c = b \cdot \tan(\gamma)$

La definizione è ben posta: le funzioni **seno dell'angolo** (sen o sin), **coseno dell'angolo** (cos), **tangente dell'angolo** (tan o tg) dipendono solo dagli angoli e non dal particolare triangolo usato. Infatti angoli acuti della stessa misura appartengono a triangoli rettangoli tutti simili tra loro; siccome i lati di triangoli simili sono in proporzione, il rapporto tra i lati è invariato. Inoltre possiamo certamente affermare che le funzioni seno e coseno di angoli acuti assumono valori positivi minori di 1, poiché in un triangolo rettangolo il cateto è minore dell'ipotenusa.

Dal confronto delle definizioni notiamo che valgono le uguaglianze:

$sen(\gamma) = \cos(\beta)$; $\cos(\gamma) = sen(\beta)$; $\tan(\gamma) = \dfrac{1}{\tan(\beta)}$ per cui possiamo anche scrivere:

$sen(x) = \cos(90° - x)$; $\cos(x) = sen(90° - x)$; $\tan(x) = \dfrac{1}{\tan(90° - x)}$

Esempio

- Nel triangolo rettangolo ABC i cateti misurano rispettivamente $AB = 4\text{m}$, $AC = 3\text{m}$ e l'ipotenusa misura 5m. Possiamo determinare le funzioni goniometriche dei suoi angoli acuti semplicemente applicando le definizioni.

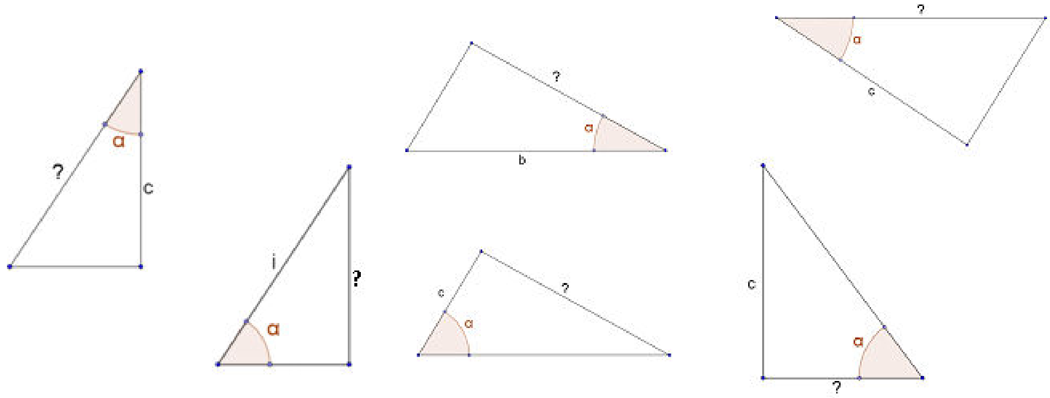
Si ottiene $sen(\beta)=\frac{b}{a}=\frac{3}{5}$; $\cos(\beta)=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$; $\tan(\beta)=\frac{b}{c}=\frac{3}{4}$.

Per l'angolo complementare lasciamo al lettore il completamento

$sen(\gamma)=\ldots\ldots$; $\cos(\gamma)=\ldots\ldots$; $\tan(\gamma)=\ldots\ldots$

Osserviamo che ancora non possiamo avere informazioni sull’ampiezza degli angoli acuti; vedremo in seguito come procedere nei calcoli e quindi concludere la risoluzione del triangolo.

16 Completate la figura mettendo le opportune lettere ai vertici dei triangoli rettangoli assegnati e, applicando le definizioni, scrivete la formula che permette di ricavare l’elemento incognito indicato con un punto interrogativo a partire dagli elementi noti indicati con una lettera.



►2. Due identità fondamentali

1. $\tan(\gamma)=\frac{a\cdot\sin(\gamma)}{a\cdot\cos(\gamma)}=\frac{\sin(\gamma)}{\cos(\gamma)}$ la tangente di un angolo è il rapporto tra il seno dell’angolo e il coseno dello stesso angolo. In generale $\boxed{\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}}$
2. dal teorema di Pitagora si ha $a^2=b^2+c^2$ da cui dividendo ambo i membri per a^2 si ottiene $\frac{a^2}{a^2}=\frac{b^2+c^2}{a^2}=\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{a^2}\ \rightarrow\ 1=\left(\frac{b}{a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}\right)^2=(\cos(\gamma))^2+(\cos(\gamma))^2=\cos^2(\gamma)+\sin^2(\gamma)$
   In generale, per qualunque angolo vale $\boxed{\cos^2(x)+\sin^2(x)=1}$

Si definiscono inoltre altre funzioni goniometriche che potranno servire nella risoluzione dei triangoli:

$cosec(x)=\frac{1}{sen(x)}$; $sec(x)=\frac{1}{\cos(x)}$; $cotan(x)=\frac{1}{\tan(x)}$.

Esempio

In un triangolo rettangolo si sa che $\cos(\beta)=\frac{3}{4}$ *, determinare sen(β) e tan(β).*

Strategia risolutiva:

ricordando che per qualunque angolo si ha $\cos^2(x)+sen^2(x)=1$ possiamo sostituire il dato e calcolare $sen(\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\beta)}=\sqrt{1-\frac{9}{16}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$. Infine sapendo che per ogni angolo vale $\tan(x)=\frac{sen(x)}{\cos(x)}$ ricaviamo $\tan(\beta)=\frac{\frac{\sqrt{7}}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{7}}{3}$. Osserviamo che nella determinazione di sen(β) abbiamo trascurato il valore negativo in quanto abbiamo definito le funzioni goniometriche come rapporto delle misure di due segmenti.

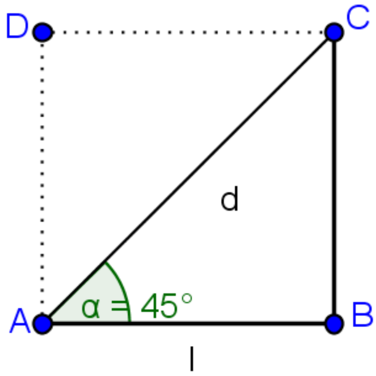
17 Nel triangolo rettangolo ABC sappiamo che $sen(\gamma)=\frac{5}{7}$. Determinare le altre funzioni goniometriche dell’angolo γ e quelle del suo complementare.

►3. Angoli particolari

Possiamo ricavare per via geometrica il valore esatto delle funzioni goniometriche di angoli particolari.

Angoli di 45°

Il triangolo rettangolo isoscele i cui angoli acuti sono di 45° è la metà di un quadrato di lato l.



Sappiamo che $d=\sqrt{1^2+1^2}=1\cdot\sqrt{2}$; poiché il calcolo delle funzioni goniometriche per un angolo non dipende dal particolare triangolo usato, possiamo concludere per le definizioni date:

$\sin(45°)=\frac{1}{1\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ e anche $\cos(45°)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ e per la definizione di tangente dell'angolo $\tan(45°)=1$.

Angoli di 30° e 60°

Il triangolo rettangolo con un angolo di 30° ha l'altro angolo acuto di 60° pertanto possiamo trattare insieme la ricerca delle funzioni goniometriche di tali angoli.

Il triangolo rettangolo in questione è la metà di un triangolo equilatero di lato 1 e altezza h; poiché HC è metà del lato possiamo subito dire che

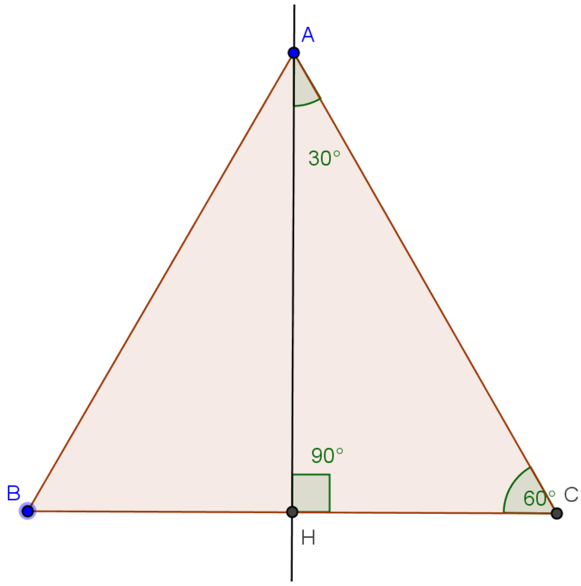
$$\cos(60°)=\frac{\overline{HC}}{1}=\frac{1}{2}$$

Per le definizioni date si ha $\sin(60°)=\frac{\overline{AH}}{1}$.

Applicando il teorema di Pitagora si ottiene

$$\overline{AH}=\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$ e dunque

$$\sin(60°)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$



Infine $\tan(60°)=\frac{\sin(60°)}{\cos(60°)}=\sqrt{3}$.

Ricordando che per angoli complementari è $\sin(x)=\cos(90°-x)$; $\cos(x)=\sin(90°-x)$, essendo $30°=90°-60°$ possiamo scrivere: $\sin(30°)=\cos(60°)=\frac{1}{2}$; $\cos(30°)=\sin(60°)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ e

infine $\tan(30°)=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

Angoli di 0° e 90°

Ovviamente non esiste un triangolo con un angolo di 0°: si tratta di un triangolo che degenera in un segmento. Possiamo pensare ad un triangolo rettangolo avente a=1 e immaginare di muovere il vertice C in modo da rimpicciolire sempre più l'angolo β; quando β diventa 0° il segmento b si riduce ad un punto e si ha b = 0 e quindi sen(0°) = 0, l'ipotenusa a coincide con il cateto c quindi cos(0°) = 1 e infine tan(0°) = 0.

Allo stesso modo se deformiamo il triangolo fino ad avere l'angolo γ di 0° e pertanto β di 90° otteniamo che sen(90°) = 1 e cos(90°) = 0; applicando la formula della tangente si avrà una frazione con denominatore nullo e quindi diremo che tan(90°) non è definita.

Possiamo riassumere i valori trovati per questi angoli particolari in una tabella:

angolo x	sen(x)	cos(x)	tan(x)
0°	0	1	0
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	1	0	Non definita

Come possiamo ottenere i valori delle funzioni goniometriche per angoli diversi da quelli sopra considerati?

►4. Usare la calcolatrice

Sul mercato ci sono vari tipi di calcolatrice scientifica, ciascuno dovrà familiarizzare con la propria calcolatrice per imparare ad impostare correttamente il calcolo da effettuare e i tasti da pigiare per ottenere il corretto risultato. Se non si digita in modo consapevole e se non si sanno leggere i risultati, la calcolatrice è uno strumento inutilizzabile e talvolta può anche essere dannoso.

Nel seguito faremo riferimento alla calcolatrice Kcalc, in dotazione al Desktop environment KDE (Linux/Unix), cercando di dare riferimenti che si adattino a tutte le calcolatrici.

I passo: scelta dell'unità di misura

Sicuramente conosci già come unità di misura degli angoli il grado sessagesimale. Esistono però altre unità di misura utilizzate in contesti diversi: i gradi centesimali sono utilizzati principalmente in topografia, i radianti utilizzati in matematica specialmente in analisi.

Su tutte le calcolatrici è possibile effettuare le operazioni sugli angoli scegliendo l'unità di misura:

angolo	sigla	sigla abbreviata
gradi sessagesimali	DEG	D
gradi centesimali	GRA	G
radianti	RAD	R

Impostiamo la calcolatrice in modo da ricevere in ingresso angoli misurati in gradi sessagesimali: sul display della calcolatrice deve comparire D o DEG.

ok

II° passo: calcolo del coseno di un angolo

Ci proponiamo di determinare cos(60°)

Controllate di aver impostato l'input dell'angolo in gradi sessagesimali,

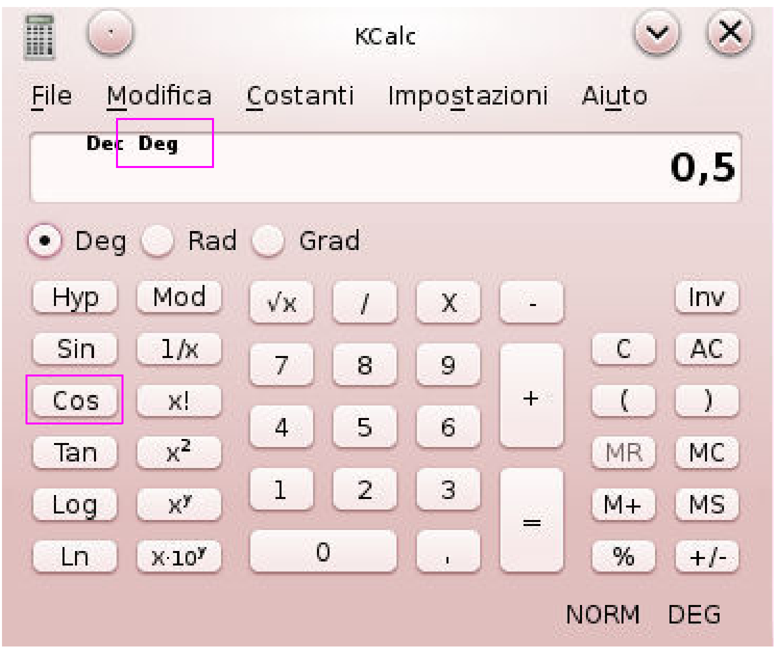
- digitate 60,
- premete il tasto **cos.**

La calcolatrice restituisce 0.5

Dunque cos(60°)=0.5

Attenzione: nella scrittura dei numeri decimali useremo il "punto decimale" in sostituzione della virgola.

Obiettivo dell'esercizio seguente è farvi prendere un po' di confidenza con la vostra calcolatrice; i valori della



funzione coseno vengono restituiti (output) dalla calcolatrice con 8 o 10 decimali, approssimate alla quarta cifra decimale.

18 Completare la tabella inserendo nelle caselle vuote misure di angoli acuti a piacere.

Angolo α	0°		30°		45°		60°		90°
Cos(α)									

Osservazioni:

- la funzione coseno calcolata su angoli compresi fra 0° e 90° restituisce sempre numeri compresi fra 0 e 1.
- il coseno vale 1 (il massimo) quando l'angolo di input è 0° e decresce fino a 0 man mano che l'angolo immesso cresce fino a 90°. Detto in altre parole: il coseno di un angolo che cresce da 0° a 90° diminuisce dal valore 1 al valore 0.
- la decrescita del coseno non è proporzionale all'aumento dell'angolo, tant'è vero che si ha: cos (30°) =0,867 ma cos(30°) =0,5 che evidentemente non è la metà di cos(30°).

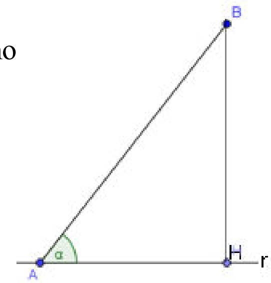
19 Completare la tabella inserendo nelle caselle vuote misure di angoli acuti a piacere.

Angolo α	0°		30°		45°		60°		90°
sen(α)									
tan(α)									

Quali osservazioni si possono fare per la funzione sen(α)?

Problema

Il segmento AB misura 5m e la sua proiezione AH sulla retta r misura 3m. Possiamo determinare la misura dell'angolo α compreso tra r e il segmento AB?



Dati: $\overline{AB}=5$, $\overline{AH}=3$ Obiettivo: ? α

Strategia risolutiva:

Partiamo dalla formula $\overline{AH}=\overline{AB}\cdot\cos(\alpha)$, da essa possiamo ottenere $\cos(\alpha)=\frac{\overline{AH}}{\overline{AB}}$. Sostituendo i valori noti otteniamo $\cos(\alpha)=\frac{\overline{AH}}{\overline{AB}}=\frac{3}{5}=0{,}6$

Per risalire dal valore del coseno al valore dell'angolo usiamo la calcolatrice attivando la funzione inversa di coseno; su molte calcolatrici tale funzione è indicata con $\cos^{-1}$, funzione che si attiva con il tasto "INV" o "2ND" (second function); nella calcolatrice di esempio pigiando il tasto inv compare il tasto della funzione inversa "ACOS".



Calcoliamo la misura dell'angolo il cui coseno è 0,6 immettendo tale valore e attivando i tasti "INV" e "ACOS". La calcolatrice restituisce α= 53.13010235.
Questo risultato ci dice che l'angolo è di 53° più una parte decimale 0.13010235.
Ricordiamo che i sottomultipli del grado vengono espressi in sessantesimi (1 grado=60 primi), a loro volta suddivisi in sessantesimi (1 primo=60 secondi).
Dunque la parte decimale estratta dalla calcolatrice va adeguatamente modificata:
Al risultato della calcolatrice tolgo la parte intera (53) e moltiplico per 60; in questo caso ottengo 7.8061... la cui parte intera rappresenta i primi; tolgo ancora la parte intera (7) e moltiplico per 60 ottenendo i secondi 48.368... Arrotondiamo la parte intera e possiamo concludere α ≈ 53°7'48". Alcune calcolatrici scientifiche fanno in automatico questi calcoli attivando un opportuno tasto.
Osserviamo che viene utilizzato il simbolo ≈ (uguale circa) per indicare che abbiamo usato valori approssimati.

20 Nel primo esempio avevamo trovato per le funzioni goniometriche degli angoli acuti del triangolo rettangolo di lati 5m, 4m, 3m, i seguenti valori:

$$sen(\beta)=\frac{b}{a}=\frac{3}{5} \quad , \quad \cos(\beta)=\frac{c}{a}=\frac{4}{5} \quad , \quad \tan(\beta)=\frac{b}{c}=\frac{3}{4} \quad .$$

Ora sei in grado di determinare l'ampiezza degli angoli acuti attivando le funzioni inverse sulla tua calcolatrice.

►5. Operazioni con i gradi sessagesimali

Accenniamo alle addizioni e sottrazioni tra angoli.

Svolgiamo l'operazione 48° 45' 52" + 62° 27' 22".

Sommando termine a termine otteniamo 110° 72' 74". tenendo conto che 1 grado = 60 primi e 1 primo = 60 secondi, si ha che i 74" valgono 1' e 14", i 72' 74" diventano allora 73' e 14". Trasformiamo poi i 73' in 1° e 13'. In definitiva si ha che 110° 72' 74" = 111° 13' 14".

```
   4 8 °  4 5 '  5 2 "  +
   6 2 °  2 7 '  2 2 "
 ------------------------
 1 1 0 °  7 2 '  7 4 "
 1 1 1 °  1 3 '  1 4 "
```

Svolgiamo ora una sottrazione: 90° - 45° 33' 12", che tra l'altro è una comunissima operazione, poiché capita abbastanza spesso di dover calcolare l'angolo complementare.

Per svolgere la sottrazione conviene scrivere 90° come 89° 59' 60" e svolgere la sottrazione avendo come risultato 44° 26' 48".

```
 9 0 °                    8 9 °  5 9 '  6 0 "
 4 5 °  3 3 '  1 2 "      4 5 °  3 3 '  1 2 "
 -------------------      -------------------
                          4 4 °  2 6 '  4 8 "
```

Un'ultima sottrazione: 72° 20' 40" – 23° 40' 52".

Per fare questa sottrazione parto dai secondi e non potendo fare 40 – 52, utilizzo il riporto trasformando in: 72° 20' 40" in 72° 19' 100". Ora posso eseguire agevolmente la sottrazione e ottengo 48".

sottraggo poi i primi tra loro, aggiungendo il riporto ai 19'; ottengo 39'.

sottraggo poi i gradi: 71° - 23°.

Il risultato finale è 48° 39' 48".

Esegui le seguenti operazioni con gli angoli

21 Calcola il complementare di 25° 30' 58".

22 Calcola il supplementare di 118° 59' 59".

23 Calcola il doppio di 45° 45' 45".

24 Calcola la metà di 128° 57' 30".

25 16° 29' 32" + 95° 57' 31".

26 127° 50' 32" – 27° 51' 42"

►6. Risoluzione di triangoli rettangoli

Ricordiamo che risolvere un triangolo significa ricavare le misure di tutti i suoi elementi (lati e angoli) date le misure di alcuni dei suoi elementi.

Esempi

■ *Determinate l'area del triangolo rettangolo sapendo che* $\overline{BC}=2(m)$ e $\beta=20°$.

Dati: $B\hat{A}C=90°$, $\overline{BC}=2(m)$, $\beta=20°$ Obiettivo: ?Area(ABC)

- Strategia risolutiva: $Area(ABC)=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AC}$

  Dobbiamo dunque determinare le misure dei cateti. Applicando le definizioni
  $\overline{AB}=\overline{BC}\cdot\cos(\beta)=2\cdot\cos(20°)\simeq 2\cdot 0{,}9397\simeq 1{,}8794$
  $\overline{AC}=\overline{BC}\cdot\cos(\gamma)=2\cdot\cos(70°)\simeq 2\cdot 0{,}3420\simeq 0{,}6840$

  pertanto $Area\simeq 0.6428\, m^2$.

■ *Un triangolo rettangolo ha il cateto AB di 5cm. e l'angolo acuto □ di 57°; determinate l'altro angolo acuto, la misura del cateto AC e la misura dell'ipotenusa.*

Dati: $B\hat{A}C=90°$, $B\hat{C}A=57°$, $\overline{AB}=5$ Obiettivo: ? $\hat{\beta}$, $\overline{CA}$, $\overline{CB}$

Strategia risolutiva:

Essendo gli angoli acuti complementari si ottiene $\hat{\beta}=90°-57°=33°$

Per la formula inversa $\overline{CB}=\frac{\overline{AB}}{\cos(\beta)}=\frac{5}{\cos(33°)}\simeq\frac{5}{0{,}8386}\simeq 5{,}9618(cm)$

Infine determiniamo l'altro cateto e osserviamo che possiamo procedere in due modi:

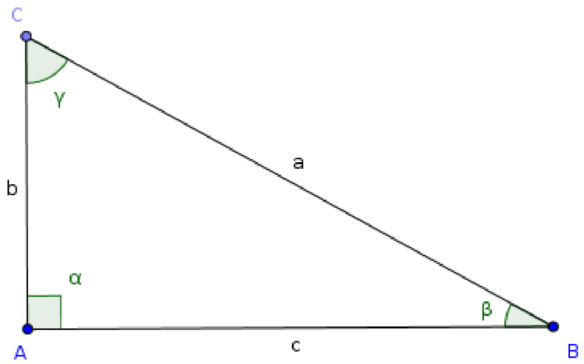
1°: applichiamo il Teorema di Pitagora $\overline{CA}=\sqrt{\overline{CB}^2-\overline{AB}^2}\simeq\sqrt{35{,}5432-25}\simeq\sqrt{10{,}5432}\simeq 3{,}2470(cm)$

2°: per definizione $\overline{CA}=\overline{CB}\cdot\cos(\gamma)\simeq 5{,}9618\cdot\cos(57°)\simeq 5{,}9618\cdot 0{,}5446\simeq 3{,}2468(cm)$

Osservazioni:

■ Nei calcoli effettuati abbiamo operato un'approssimazione; per esempio il valore esatto di $\overline{CB}$ è rappresentato solo dall'espressione $\overline{CB}=\frac{\overline{AB}}{\cos(\beta)}=\frac{5}{\cos(33°)}$.

■ I risultati ottenuti con procedimenti diversi possono differire, se pur di poco, a causa dell'uso di valori approssimati nei calcoli che aumentano l'errore di approssimazione (propagazione dell'errore).



■ *Risolvi il triangolo rettangolo della figura sapendo che* $c=20(cm)$ *e* $\sin(\beta)=\frac{3}{5}$.

Usiamo l'identità fondamentale per determinare cos(β):

$$\cos(\beta)=\sqrt{1-\sin^2(\beta)}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=$$
$$=\sqrt{\frac{25-9}{25}}=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$$

$$\cos(\beta)=\frac{c}{a}\ \rightarrow\ a=\frac{c}{\cos(\beta)}=\frac{20}{\frac{4}{5}}=\frac{20\cdot 5}{4}=25(cm)$$

per il teorema di Pitagora $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{25^2-20^2}=15\text{cm}$

β ≅ 36°52'12" (calcolato con la calcolatrice e arrotondato), γ ≅ 90° - β = 53°07'48".

- *Risolvere il triangolo rettangolo ABC retto in A (quello della figura) sapendo che b=2cm e* $\sin(\beta)=0{,}2$.

Dati: $b=2\text{cm}$, $\sin(\beta)=0{,}2$ Obiettivo; ? a, c, β, γ

Strategia risolutiva:

Dalle definizioni si ha $\sin(\beta) = \frac{b}{a} \rightarrow 0{,}2 = \frac{2}{a}$ da cui possiamo ricavare $a = \frac{2}{0{,}2} = 10\text{cm}$. Con il teorema di Pitagora possiamo ricavare l'altro cateto $c = \sqrt{a^2-b^2} = \sqrt{100-4} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6} \simeq 9{,}7980$. Infine con la funzione inversa ricaviamo l'angolo β: $\sin^{-1}(0{,}2)=11{,}5369\ldots$ e procedendo come spiegato in precedenza otteniamo: β= 11°32′13″ e in seguito γ= 90°-β= 78°27′47″.

27 Risolvere il triangolo rettangolo a partire dai dati a disposizione, facendo sempre riferimento alla solita figura:

a) $a=30(cm),\ \beta=25°30'$

b) $a=1{,}25(m),\ \gamma=75°$

c) $a=15(cm),\ \beta=30°$

d) $a=36(cm),\ \sin(\beta)=\frac{2}{3}$

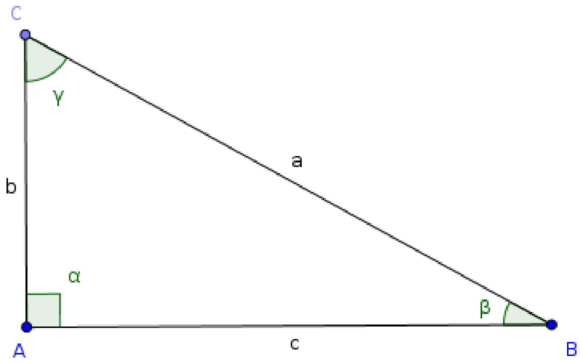
e) $c=12(m),\ \cos(\beta)=\frac{1}{4}$

f) $c=12(m),\ \tan(\beta)=2$

g) $b=40(cm),\ \tan(\beta)=1$

h) $c=12(cm),\ a=20(cm)$

i) $b=30(cm),\ c=40(cm)$



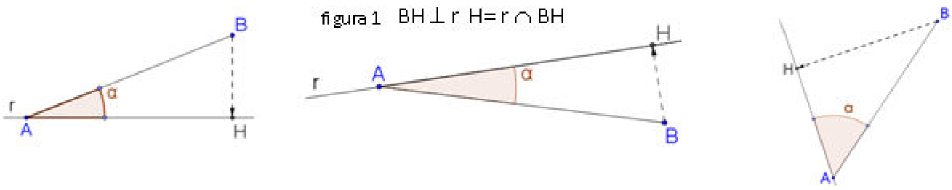
28 Nel triangolo rettangolo ABC, retto in A, determina l'altezza relativa all'ipotenusa sapendo che il cateto AB = 20 cm e l'angolo β = 25°.

29 Sapendo che $\cos(\gamma)=\frac{5}{12}$ e che il cateto b misura 20 cm, calcola area e perimetro del triangolo rettangolo.

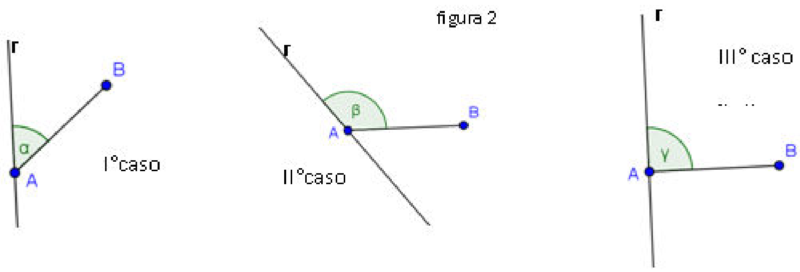
30 Determinare perimetro e area del triangolo rettangolo ABC retto in A sapendo che l'altezza relativa all'ipotenusa misura cm0.5 e l'angolo α è di 30°.

Proiezione di un segmento lungo una direzione

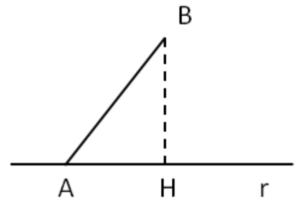
E' dato un segmento AB ed una retta r che passa per un suo estremo (A, per fissare le idee). La **proiezione del segmento AB sulla retta r** è il segmento AH dove H è l'intersezione fra r e la perpendicolare alla retta r passante per B (si vedano i tre esempi in figura)



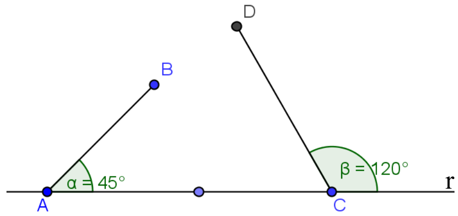
31 Costruite la proiezione del segmento AB sulla retta r in ciascuna delle figure seguenti e descrivete i passi effettuati:



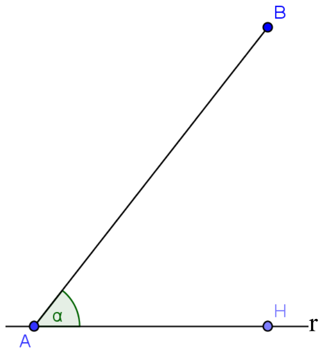
32 Il segmento AB misura 2m. Determinare la misura della sua proiezione AH sulla retta r sapendo che l'angolo tra retta e segmento è di 72°. Determinare infine perimetro e area del triangolo AHB.



33 Della figura accanto sappiamo che: $\overline{AB}=2\text{m}$, $\overline{DC}=2{,}52\ m$, $\overline{AC}=3{,}76\ m$. Indicate con H e K rispettivamente le proiezioni di B e D sulla retta r, determinate l'area del poligono ACDB.



34 La proiezione AH è di 2 metri; determinate la misura del segmento "proiettante" AB nei seguenti casi: α=28°; α=45°; α=60°; α=88° (con l'approssimazione alla quarta cifra decimale).



35 In un triangolo rettangolo conoscendo il coseno dell'angolo acuto α, cos α = 0,3 , calcola sen α e tg α. Calcola, inoltre, il valore dell'angolo acuto α in gradi e decimali di grado.

36 In un triangolo rettangolo di angolo acuto x, calcola cosx, tgx e x sapendo che senx = 0,2.

37 In un triangolo rettangolo di angolo acuto x, calcola senx, cosx e x sapendo che tgx = 1,5.

38 In un triangolo rettangolo conoscendo il coseno dell'angolo acuto α, cos α = 0,3 , calcola sen α e tg α. Calcola, inoltre, il valore dell'angolo acuto α in gradi e decimali di grado.

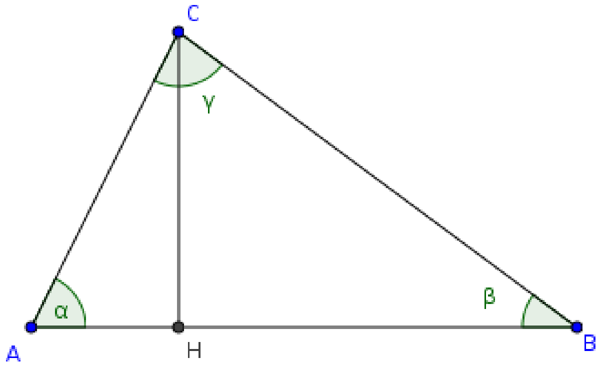
39 Trova area e perimetro del triangolo rettangolo ABC retto in A sapendo che AB= 50 cm. .

40 Risolvi il triangolo rettangolo che ha un cateto di 25 cm e il seno dell'angolo ad esso adiacente pari a 0,28.

41 In un triangolo rettangolo conoscendo il coseno dell'angolo acuto α, cos α = 0,3 calcola sen α e tg α. Calcola, inoltre, la misura dei restanti lati sapendo che il cateto opposto ad α misura 66 cm.

►7. Triangolo qualsiasi

Per risolvere i triangoli qualsiasi, tramite l'altezza, bisogna ricercare nella figura triangoli rettangoli.
I dati relativi ai prossimi esercizi fanno riferimento al disegno a lato. Nel seguito saranno indicati altri teoremi che permettono di risolvere tutti i tipi di triangoli.



Esempio

Risolvi il triangolo acutangolo della figura con $\beta=57°$, $\alpha=39°$, $\overline{CH}=11(m)$.

Ricordando che la somma degli angoli di un triangolo è 180° ricaviamo γ :

$\gamma=180°-\alpha-\beta=180°-39°-57°=84°$

Individuiamo ora i triangoli rettangoli nella figura in modo da poter applicare le formule.

Con il triangolo rettangolo CHB

$\sin(\beta)=\frac{CH}{CB}$; dunque $CB=\frac{CH}{\sin(\beta)}=\frac{11}{\sin(57°)}\simeq 13{,}2(m)$

$\tan(\beta)=\frac{CH}{BH}$; dunque $BH=\frac{CH}{\tan(\beta)}=\frac{11}{tg(57°)}\simeq 7{,}15(m)$

Con il triangolo rettangolo AHC

$\sin(\alpha)=\frac{CH}{AC}$; dunque $AC=\frac{CH}{\sin(\alpha)}=\frac{11}{sen(39°)}\simeq 17{,}46(m)$

$\tan(\alpha)=\frac{CH}{AH}$; dunque $AH=\frac{CH}{\tan(\beta)}=\frac{11}{\tan(39°)}\simeq 13{,}75(m)$

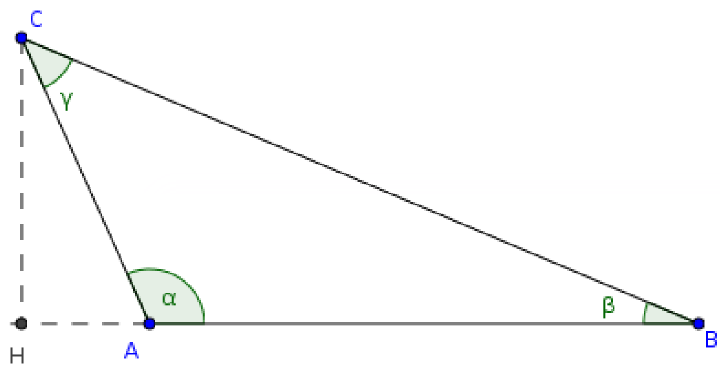
Infine calcolo $AB=AH+BH=7{,}15+13{,}75=20{,}9(m)$

42 Risolvi il triangolo acutangolo ABC nei seguenti casi:

a) $CH=20(cm)$, $\alpha=45°$, $\beta=62°20'$
b) $AC=20(cm)$, $\alpha=60°$, $\beta=35°$
c) $BH=12(cm)$, $\alpha=35°$, $\beta=40°30'$
d) $AH=22{,}25(cm)$, $\alpha=20°$, $\beta=65°$
e) $CH=10(cm)$, $\alpha=42°$, $\beta=53°$.

43 In riferimento alla seguente figura risolvi il triangolo ABC, conoscendo gli elementi indicati:

a) $AB=2(cm)$, $BC=6(cm)$, $\beta=30°$
b) $CH=50(cm)$, $AB=76(cm)$, $\alpha=120°$



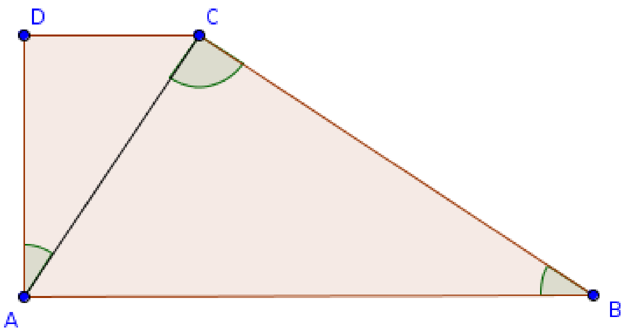
44 Risolvere un triangolo isoscele nota la $base=4\sqrt{2}(cm)$ e l' $area=32(cm^2)$.

45 Un triangolo isoscele ha l'altezza relativa alla base lunga 120 cm e il seno dell'angolo alla base è uguale a $\frac{2}{3}$.
Calcola perimetro e area del triangolo.

Quadrilateri

Esempio

Nel trapezio rettangolo ABCD il lato obliquo BC forma un angolo di 35° con la base maggiore AB e la diagonale AC è perpendicolare a BC. Calcola il perimetro e l'area del trapezio sapendo che la sua altezza è 10 cm.



Dati: $AD=10\,cm$, $A\hat{B}C=35°$, $=90°$

Risoluzione:

Ricordando che la somma degli angoli di un triangolo è 180° ricaviamo $C\hat{A}B=55°$

Siccome il trapezio è rettangolo

$$D\hat{A}C=D\hat{A}B-C\hat{A}B=90°-55°$$

$$\sin(A\hat{B}C)=\frac{AD}{CB}$$

$$CB=\frac{AD}{\sin(A\hat{B}C)}=\frac{10}{\sin(35°)}\simeq 17{,}43(cm)$$

$$\sin(A\hat{B}C)=\frac{AD}{CB}$$

$$AB=\frac{CB}{\cos(A\hat{B}C)}=\frac{\frac{AD}{\sin(A\hat{B}C)}}{\cos(A\hat{B}C)}=\frac{AD}{\sin(A\hat{B}C)}\cdot\frac{1}{\cos(A\hat{B}C)}=\frac{AD}{\sin(A\hat{B}C)\cos(A\hat{B}C)}=\frac{10}{\sin(35°)\cos(35°)}\simeq 21{,}28$$

$$\frac{DC}{AD}=\tan(D\hat{A}C)\ \rightarrow\ DC=AD\cdot\tan(D\hat{A}C)=10\tan(35°)\simeq 7{,}00$$

$$2p=AB+BC+DC+DA=\frac{AD}{\sin(A\hat{B}C)\cos(A\hat{B}C)}+AD\cdot\tan(D\hat{A}C)+\frac{AD}{\sin(A\hat{B}C)}+AD=$$

$$=AD\cdot\left(\frac{1}{\sin(A\hat{B}C)\cos(A\hat{B}C)}+\tan(D\hat{A}C)+\frac{1}{\sin(A\hat{B}C)}+1\right)=$$

$$=10\cdot\left(\frac{1}{\sin(35°)\cos(35°)}+\tan(35°)+\frac{1}{\sin(35°)}+1\right)\simeq 55{,}72(cm)$$

$$A=\frac{(AB+DC)\cdot AD}{2}=\left(\frac{AD}{\sin(A\hat{B}C)\cos(A\hat{B}C)}+AD\cdot\tan(D\hat{A}C)\right)\cdot AD\cdot\frac{1}{2}=$$

$$=\left(\frac{1}{\sin(A\hat{B}C)\cos(A\hat{B}C)}+\tan(A\hat{B}C)\right)\cdot AD^2\cdot\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{\sin(35°)\cos(35°)}+\tan(35°)\right)\cdot 10^2\cdot\frac{1}{2}\simeq 141{,}53(cm^2)$$

46 Nel trapezio ABCD isoscele sulla base maggiore AB, la base minore misura 30 cm, i lati obliqui 20 cm e il seno degli angoli acuti è 0,6. Trova la misura del perimetro e dell'area.

47 Trova l'area di un rombo di perimetro 120 cm e con angolo ottuso pari a 100°.

48 Trova la misura del lato e dell'altezza del rombo con diagonale maggiore di 20 cm e con uno dei due angoli acuti di 30°.

49 Trova le due altezze del parallelogramma di lati 10 cm e 15 cm e con i due angoli acuti di 20°

50 Trova l'area di un parallelogramma sapendo che i lati sono lunghi 12,5 cm e 7,8 cm e l'angolo tra essi compreso è 44°30'.

51 Calcola l'area di un rombo sapendo che il lato è 12 cm e l'angolo ottuso di 120°.

52 Calcola l'area e il perimetro di un rettangolo sapendo che le sue diagonali misurano 10 cm e che gli angoli che esse formano con la base sono di 35°30'.

53 L'area di un trapezio isoscele è 28 cm^2 e il suo perimetro è 24. Determina gli angoli del trapezio, sapendo che la sua altezza è 4 cm.

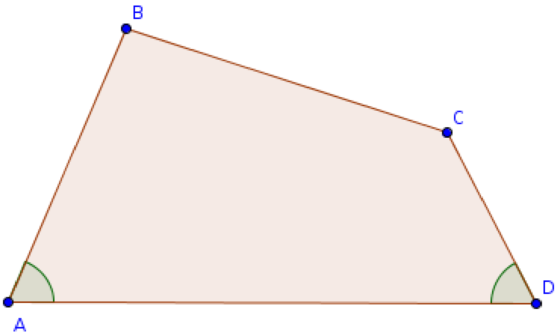
Applicazioni alla topografia

La topografia è una disciplina che studia gli strumenti ed i metodi operativi, sia di calcolo sia di disegno, che sono necessari per ottenere una rappresentazione grafica di una parte della superficie terrestre.

La topografia ha carattere applicativo e trae la sua base teorica dalla matematica, dalla geometria e dalla trigonometria.

Esempio

Risolvere il quadrilatero ABCD della figura sapendo che $AB=42{,}5\,m$, $BC=32{,}18\,m$, $CD=27{,}6\,m$, $B\hat{A}D=56°$, $A\hat{D}C=62°$



Risoluzione

Suddividiamo il quadrilatero in tre triangoli rettangoli e in un rettangolo, come nella figura riportata sotto.

$F\hat{B}A=90°-B\hat{A}D=90°-56°=34°$

$AF=AB\cos(B\hat{A}D)=42{,}5\cos(56°)=23{,}77\,(m)$

$BF=AB\sin(B\hat{A}D)=42{,}5\sin(56°)=35{,}23\,(m)$

$D\hat{C}E=90°-A\hat{D}C=90°-62°=28°$

$DE=CD\cos(F\hat{B}A)=27{,}6\cos(62°)=12{,}96\,(m)$

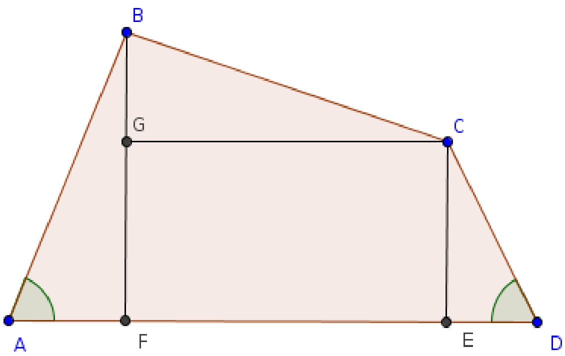
$CE=CD\sin(A\hat{D}C)=27{,}6\sin(62°)=24{,}37\,(m)$

$BG=BF-GF=BF-CE=35{,}23-24{,}37=10{,}86\,(m)$

$GC=\sqrt{BC^2-BG^2}=\sqrt{32{,}18^2-10{,}86^2}=30{,}29\,(m)$

$DA=AF+FE+ED=23{,}77+30{,}29+12{,}96=67{,}02\,(m)$

$\cos(C\hat{B}G)=\dfrac{GC}{CB}=\dfrac{30{,}29}{32{,}18}=0{,}92$



$\cos(C\hat{B}G)=19°43'56''$ (calcolato con la funzione $\cos^{-1}$ della calcolatrice)

$B\hat{C}G=90°-C\hat{B}G=70°16'4''$

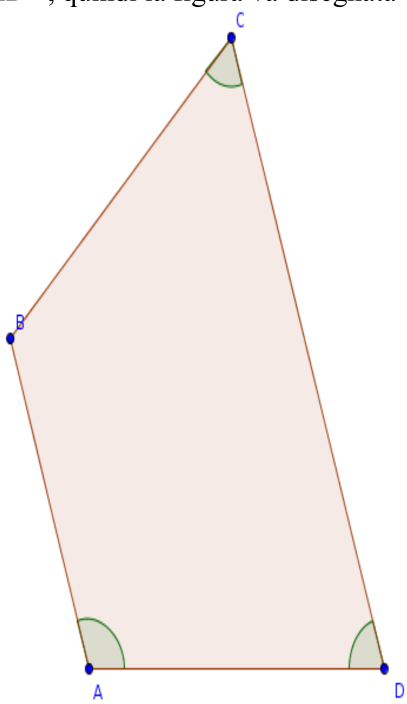
$A\hat{B}C=A\hat{B}F+F\hat{B}c=34°+19°43'56''=53°43'56''$

$B\hat{C}D=B\hat{C}G+G\hat{C}E+E\hat{C}D=70°16'4''+90°+28°=188°16'4''$

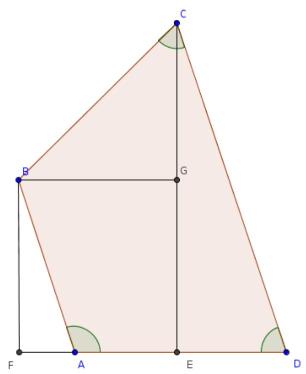
54 Risolvere il quadrilatero ABCD come quello della figura precedente sapendo che $AB=8{,}01\,m$, $BC=5{,}54\,m$, $CD=4{,}63\,m$, $B\hat{A}D=40°$, $A\hat{D}C=50°$.

55 Risolvere il quadrilatero ABCD sapendo che $AB=5{,}8\,m$, $BC=6{,}24\,m$, $CD=12{,}81\,m$, $B\hat{A}D=45°$, $A\hat{D}C=65°$ (attenzione: in questo problema $CD>AB$, quindi la figura va disegnata diversamente).

56 Risolvere il quadrilatero ABCD della figura sapendo che $AB=33{,}28\,m$, $CD=59{,}7\,m$, $C\hat{B}A=102°$, $B\hat{A}D=63°$, $A\hat{D}C=72°$.



Suggerimento: tracciare i segmenti come nella figura sotto e osservare i triangoli e il rettangolo che si forma



Applicazioni alla fisica

57 Un vettore velocità v ha modulo 12 cm/sec. Posto su un piano cartesiano Oxy, forma un angolo di 30° con l'asse delle ascisse. Trova le componenti di v, v_x e v_y sugli assi.

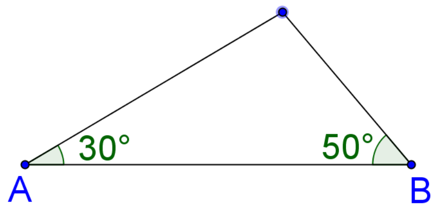
58 Un piano inclinato forma col piano d'appoggio un angolo di 16°. Determina la forza non equilibrata che farà scivolare un corpo di 12 kg lungo un piano inclinato.

59 Calcola la forza necessaria per mantenere in stato di quiete un corpo del peso di 25 kg su un piano inclinato con la pendenza di 20° 15'.

60 Calcola la lunghezza del vettore v(3,4) e gli angoli che esso forma con gli assi cartesiani. calcola inoltre l'equazione della retta che ha la stessa direzione del vettore v e passa per il punto A(0,1).

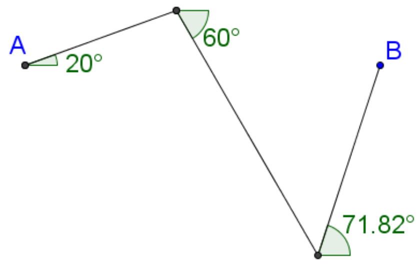
61 Un aereo viaggia da A a B, A e B distano 1000 km, in assenza di vento l'aereo impiega un'ora per effettuare il percorso. Quel giorno però sulla tratta AB soffia un vento costante di intensità 100 km/ora e direzione di 240 gradi rispetto alla direzione AB. Calcola il tempo impiegato e l'angolo di rotta necessario per mantenere la direzione AB.

62 Parto da una località A ai piedi di una collina per raggiungere una località B che si trova nell'altro versante della collina, alla stessa quota di A. Per fare questo percorro per 467 m una dritta mulattiera che sale con pendenza costante di 30°. Poi percorro in discesa 300 m lungo un dritto sentiero scalinato con pendenza costante di 50° e giungo alla località B. Quanto sarebbe lungo un tunnel che congiungesse A con B?



(R: 597,27m nell'ipotesi che i percorsi giacciano sullo stesso piano verticale che passa per A e B)

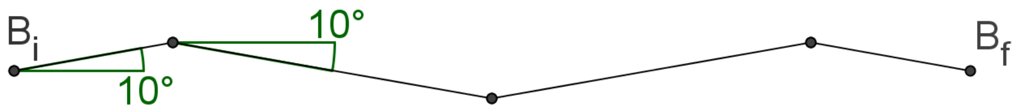
63 Per andare da una località A ad una località B poste in una pianura mi muovo, in aereo e sempre alla stessa quota, di 20 Km nella direzione che forma un angolo di 20° rispetto alla direzione AB. Poi, per riavvicinarmi alla congiungente AB, mi muovo di 35 Km lungo la direzione che forma un angolo di 60° rispetto ad AB. Infine percorro 24,7 Km nella direzione che forma un angolo di 71,82° (ovvero 71°49'12") rispetto ad AB giungendo finalmente sopra a B. Quanto dista A da B?



N.B. Sulla calcolatrice si può digitare sia *cos*(71,82°) che *cos*(71°49°12°) purché la calcolatrice sia impostata con i gradi (**D** o **Deg** sul display; **G** o **Grad** indica un'altra unità di misura!)

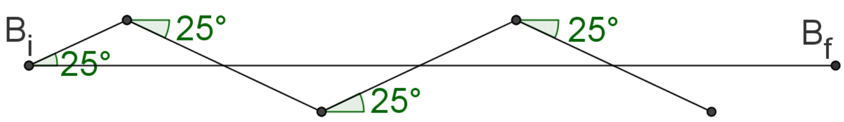
(R. 44 Km.)

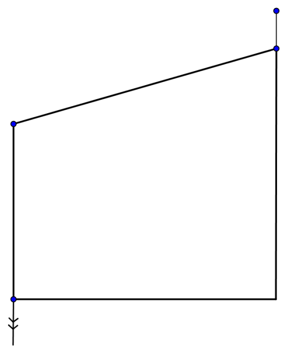
64 Sono in barca a vela e parto dalla boa B_i per raggiungere la boa B_f. Inizio la navigazione percorrendo un tratto lungo 1 km nella direzione che forma un angolo di 10° rispetto al tratto B_iB_f. Poi viro per riavvicinarmi a B_iB_f e percorro un tratto di 2 Km nella direzione che forma un angolo di 10° rispetto a B_iB_f. Ripeto la virata di 10° per riavvicinarmi alla congiungente B_iB_f e percorro di nuovo 2 km. Faccio un'ultima virata di 10° che, percorrendo 1Km, mi porta esattamente a B_f. Quanto dista B_i da B_f? (R. 5,91 Km)



65 Faccio una dritta salita che separa due località distanti in linea d'aria 5 Km. Se la pendenza della salita è di 8° costanti, qual è (in metri) la differenza di quota delle due località? (Risp. 695,87 m)

66 In barca a vela mi muovo dalla boa B_i alla boa B_f facendo un percorso a zig zag in cui ciascun tratto forma angoli di 25° rispetto al segmento B_iB_f. Dopo aver navigato per quattro tratti, di cui il primo lungo 4 Km e i restanti 8 Km, quanto percorso è stato fatto nella direzione B_iB_f? (R. 25,38 Km)





67 Devo stendere un cavo dell'impianto parafulmine lungo il tetto e la parete di una casa facendolo poi affondare nel terreno per 10 m. Quale deve essere la lunghezza minima del cavo sapendo che (vedi fig.) il parafulmine è posto sul punto più alto del tetto e la casa è composta da un pian terreno ed un primo piano completi di altezza standard (cioè 3 m ciascuno), è larga 9 m, ha un tetto ad una falda inclinato di 16°? (La figura rappresenta la sezione della casa). (R. 9,36 + 6 + 10 = 25,36 m).

68 Percorro una salita rettilinea con pendenza di 10° partendo da una località A posta a 400 m d'altezza e arrivando ad una località B posta a quota 700 m. Quanto dista A da B? (Risp. 2.303,50 m)

69 Dalla cima di un palco alto 1,30m un tizio alto 1,70m osserva la punta di un obelisco sotto un angolo di 40°. Con un laser misura la distanza tra il suo occhio e la cima dell'obelisco e trova 74m. Quanto è alto l'obelisco? (R. 74·cos(40°) + 3m ≈ 59,68m)

N.B. Osservare un oggetto *sotto un angolo* α significa che la retta congiungente il nostro occhio con l'oggetto osservato forma un angolo α con una retta orizzontale.

70 Una mansarda è alta 5 m e la sua sezione è un triangolo isoscele con angoli alla base di 50°. Quant'è larga la mansarda? (Ricorrere solo alla trigonometria; usare sia la formula diretta della proiezione sia la formula inversa.) [R. 8,39 m]

Problemi sulle forze

71 Per trainare un vagone fermo su un binario uso un locomotore posto in un binario parallelo ed un cavo in acciaio che, in trazione, forma un angolo di 22° rispetto ai binari. Sapendo che l'intensità della forza di trazione lungo il cavo è di 35.000 N, qual è il modulo della forza che fa muovere il vagone? (R. 32.451 N = $3{,}2451 \cdot 10^4$ N)

72 Per estrarre un manicotto (cioè un cilindro cavo) incastrato in un paletto esercito una forza di 150 N tramite un filo che, teso durante la trazione, forma un angolo di 20° rispetto all'asse del paletto. Di che intensità è la forza che mi sarebbe bastato applicare per estrarre il manicotto se l'avessi esercitata lungo l'asse del paletto? (R. 140,95 N = $1{,}4095 \cdot 10^2$ N)

73 Per trainare un vagone lungo un binario devo esercitare una forza minima di 20.000 N lungo la direzione del binario. Qual è l'intensità minima della forza che devo esercitare sul vagone perché si sposti sapendo che la direzione della forza che posso applicare forma un angolo di 40° con la direzione del binario? (R. 26.108,15 N = $2{,}610815 \cdot 10^4$ N)

74 Una mansarda è alta 5 m e la sua sezione è un triangolo isoscele con angoli alla base di 50°. Quant'è larga la mansarda? (Risp. 8,39 m)

75 Come si può misurare l'altezza di un edificio, senza salirvi in cima, disponendo di un metro a nastro e di un teodolite in grado di misurare a vista angoli sul piano verticale?

76 Dal tetto di una casa alta 9m un bimbo alto 1m osserva sotto un angolo di 6° la punta di un obelisco che, in base ad una mappa, dista 232 m dalla casa. Quanto è alto l'obelisco? (R. 34,38 m)

77 Nella capriata di una cattedrale la cui sezione è un triangolo isoscele, la lunghezza della catena (cioè della base del triangolo isoscele) è di 50m e il tetto è inclinato di 15° rispetto al pavimento. Quanto è alta la capriata? (R. 6,70 m)

78 La grande piramide di Cheope ha una base quadrata larga circa 230 m. Sapendo che le pareti sono inclinate di circa 52°, quanto è alta la piramide? (N.B. l'inclinazione cui si fa riferimento è quella delle apoteme delle facce laterali rispetto al terreno) (R. 147 m.)

79 Si attribuisce all'architetto dell'Antico Egitto *Imhotep* l'intuizione che l'inclinazione delle pareti di una piramide non deve superare i 53° per evitare problemi di slittamento dei blocchi del rivestimento sotto l'effetto di un sisma. Ammesso di usare l'inclinazione massima, quanto deve essere larga una piramide che debba raggiungere l'altezza di 70 m? E se, per sicurezza, si volesse usare un'inclinazione di 45°? (*Questo problema si può risolvere usando l'angolo complementare a quello assegnato.*) [R. 105,50 m e 140 m]

80 Una mansarda avente per sezione un triangolo isoscele è alta 4m e larga 15m. Qual è l'inclinazione del tetto? (R. circa 28°)

81 La piramide di Meidum, così come modificata sotto Snefru, era alta 91,7m e larga 144m. Quanto erano inclinate rispetto al terreno le (apoteme delle) sue facce? (R. 51,86°)

82 Dall'Avenue des Champs-Élysées osservo la sommità dell'Arco di Trionfo napoleonico sotto un angolo di 36°. Sapendo che l'Arco è alto 50m quanto disto dalla sua base? Se mi trovo a 1,2Km dalla sua base, sotto che angolo ne osservo la sommità? (R. 68,82m e 2,39°)

83 Devo stendere un tirante che si aggancia a terra e ad un palo, ai 3/5 della sua altezza. Sapendo che il palo è alto 3,34m e che il cavo si aggancia al terreno a 3m dalla sua base, che angolo forma il tirante rispetto al terreno? (R. 33,74°)

84 Su un cartello stradale vediamo l'indicazione di una salita del 10%. Sapendo che questo significa che ogni 100m in orizzontale se ne percorrono 10 in verticale, calcola l'inclinazione in gradi della strada. E' possibile superare salite del 100%? (R. 5,71°; …)

85 Una capriata ha una catena di 32m ed è alta 8,9m. Qual è l'inclinazione dei suoi puntoni? *La capriata è la struttura per le coperture a "capanna"; le travi che la costituiscono formano un triangolo isoscele; la catena ne è la trave di base e i puntoni ne sono le travi oblique.* [R. 29,08°]

86 La facciata di un tempio greco ha un basamento largo 22m e alto 3m, colonne alte 7,40m e il frontone, largo quanto il basamento, ha falde inclinate di 15°. Quanto è alto il punto più elevato del tempio? Volendo fargli raggiungere l'altezza di 14m quale inclinazione bisognerebbe dare ai lati obliqui del frontone? (R. $h_{max} \approx$ 13,35m; inclinazione ≈ 18,12°)

87 Dall'alto di una rampa lunga 300m misuro la distanza dalla sommità di una torre che si eleva dalla base della rampa e arriva alla stessa altezza della mia testa. Sapendo che la suddetta distanza vale 271m, qual è l'inclinazione della rampa? (R. 25,4°)

►8. Risoluzione di un triangolo qualunque

Le funzioni trigonometriche possono essere calcolate anche su angoli maggiori di 90°. Poiché, al momento, siamo interessati alle applicazioni sui triangoli, ci basterà estendere le nostre considerazioni agli angoli compresi fra 90° e 180°, essendo 180° la misura limite superiore di un angolo interno di un triangolo.

88 Completate la tabella con i valori approssimati alla quarta cifra decimale delle funzioni seno e coseno per alcuni angoli da 0° a 180°:

angolo	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°	180°
sen(α)	0		0.5				1	0.9659			0.5	0.2588	0
cos(α)	1	0.9659			0.5		0		-0.5				-1

Dalla tabella si nota che la funzione seno si mantiene positiva nell'intervallo (0°; 180°), nei cui estremi si annulla. Inoltre essa assume il valore massimo, uguale a 1, quando l'angolo è di 90°.

La funzione coseno, invece, è negativa per angoli compresi tra 90° e 180°. Precisamente: essa decresce da 1 a 0 man mano che l'angolo su cui è calcolata cresce da 0° a 90°, dopodiché continua a decrescere, da 0 a –1, man mano che l'angolo passa da 90° a 180°, si annulla 90°.

Osserviamo anche che angoli supplementari hanno lo stesso seno e coseno opposto.

Queste considerazioni saranno chiarite con lo studio delle funzioni circolari.

Affrontiamo ora il problema di risolvere un triangolo qualsiasi.

Come sappiamo, gli elementi caratteristici di un triangolo sono le misure dei suoi lati e dei suoi angoli. Sappiamo anche che per determinare univocamente un triangolo sono, *in linea di massima*, necessari solo tre di questi elementi purché uno almeno di questi sia un lato. Ciò deriva dai tre criteri di congruenza dei triangoli che andiamo a ricordare.

Il **primo criterio di congruenza** afferma che due triangoli che abbiano rispettivamente congruenti due lati e l'angolo tra essi compreso sono congruenti.

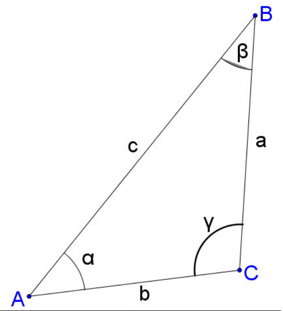
Il **secondo criterio di congruenza** afferma che due triangoli che abbiano rispettivamente congruenti un lato e due angoli ugualmente posti rispetto al lato sono congruenti.

Il **terzo criterio di congruenza** afferma che due triangoli che abbiano rispettivamente congruenti i tre lati sono congruenti.

Ricordiamo che due triangoli che abbiano ordinatamente uguali tutti gli angoli non sono, in generale, congruenti, bensì sono **simili**.

Quello che ci chiediamo è se la trigonometria, finora usata solo per i triangoli rettangoli, ci possa venire in aiuto per la determinazione delle misure degli elementi incogniti di un triangolo qualunque, quando conosciamo i tre elementi che lo determinano univocamente. Ad esempio, se è assegnata la lunghezza di due lati e l'ampiezza dell'angolo compreso, la geometria euclidea, ci aiuta a costruire il suddetto triangolo tramite riga e compasso ma non ci dice nulla delle misure degli elementi incogniti.

Disegniamo un triangolo avendo cura di indicare con la stessa lettera vertice e lato opposto e di nominare con α, β, γ le ampiezze degli angoli di vertice rispettivamente A, B, C.



1° Caso

Come abbiamo premesso, assegnati due lati e l'angolo tra essi compreso, la geometria euclidea ci assicura l'esistenza di un solo triangolo che soddisfi i dati, ma non ci permette di determinare la misura del terzo lato, né le ampiezze degli altri angoli.

TEOREMA DEL COSENO O DI CARNOT. In un triangolo qualsiasi di cui siano note le lunghezze di due lati e l'ampiezza dell'angolo compreso, il quadrato della lunghezza del lato incognito è uguale alla somma dei quadrati delle lunghezze note diminuita del loro doppio prodotto per il coseno dell'angolo compreso. A seconda di quali siano i due lati noti, traducendo in linguaggio matematico quanto afferma l'enunciato si ha:
$c^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos(\gamma)$; $a^2=c^2+b^2-2\cdot c\cdot b\cdot\cos(\alpha)$; $b^2=a^2+c^2-2\cdot a\cdot c\cdot\cos(\beta)$

Problema

Risolvete il triangolo ABC dati a= 20cm, b=10cm, γ=36°.

Dati: a= 20cm, b=10cm, γ=36° Obiettivo: ? c, α, β

Strategia risolutiva: per il teorema di Carnot possiamo scrivere $c^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos(\gamma)$, sostituendo i dati $c^2=20^2+10^2-2\cdot 20\cdot 10\cdot\cos(36°)\simeq 400+100-400\cdot 0{,}8090\simeq 176{,}4$, estraendo la radice quadrata si ottiene $c\simeq\sqrt{176{,}4}\simeq 13{,}2815\,cm$

Ora dobbiamo determinare gli altri due angoli; utilizzando ancora il teorema di Carnot nella formula $a^2=c^2+b^2-2\cdot c\cdot b\cdot\cos(\alpha)$ conoscendo i tre lati ci rimane come incognita il cos(α). Sostituiamo i valori noti: $20^2=176{,}4+10^2-2\cdot 13{,}2815\cdot 10\cdot\cos(\alpha)\rightarrow 400\simeq 276{,}4-265{,}63\cdot\cos(\alpha)$ e da questa ricaviamo $\cos(\alpha)\simeq\frac{276{,}4-400}{265{,}63}\simeq -0{,}4653\rightarrow\alpha\simeq\cos^{-1}(-0{,}4653)\simeq 117°$ Il triangolo è ottusangolo i suoi lati misurano rispettivamente $a=20\text{cm}$, $b=10\text{cm}$, $c=13.2815\text{cm}$; i suoi angoli hanno ampiezza $\alpha=117°$, $\beta=36°$, $\gamma=27°$

2° Caso

Sappiamo dalla geometria euclidea che assegnati tre segmenti affinché si possa costruire il triangolo che li ha come lati deve essere verificato il teorema della disuguaglianza triangolare: "in ogni triangolo ogni lato deve essere minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza".

Problema

Determinate le ampiezze degli angoli di un triangolo note le misure dei suoi lati a=5m, b=12m, c=13m.

Dati: a=5m, b=12m, c=13m Obiettivo: ? α, β, γ

Strategia risolutiva: utilizziamo almeno due volte il teorema del coseno per determinare due angoli:

$$c^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos(\gamma)\rightarrow 13^2=5^2+12^2-2\cdot 5\cdot 12\cdot\cos(\gamma)\rightarrow\cos(\gamma)=\frac{25+144-169}{120}=0$$

$$a^2=c^2+b^2-2\cdot c\cdot b\cdot\cos(\alpha)\rightarrow 25=169+144-312\cdot\cos(\alpha)\rightarrow\cos(\alpha)=\frac{169+144-25}{312}=0{,}9230$$

dalla prima ricaviamo γ=90° e dalla seconda $\alpha\simeq\cos^{-1}(0{,}9230)\simeq 22°$ per cui $\beta\simeq 90°-22°\simeq 68°$.

3° Caso

L'ultimo teorema che esaurisce il problema della risoluzione di un triangolo qualunque è il **teorema dei seni** o **di Euler** che afferma che in un triangolo qualsiasi risulta costante il rapporto fra la lunghezza di un lato e il seno dell'angolo che gli è opposto. In formule: $\frac{a}{\sin(\alpha)}=\frac{b}{\sin(\beta)}=\frac{c}{\sin(\gamma)}$

Problema

Risolvere il triangolo ABC sapendo che a = 7.52m, β = 98°, γ = 27°

Strategia risolutiva:

Possiamo immediatamente determinare il terzo angolo α =180°-(98°+27°)=55°. Per determinare i lati b e c applichiamo il teorema di Euler: $\frac{a}{\sin(\alpha)}=\frac{b}{\sin(\beta)}=\frac{c}{\sin(\gamma)}$;

considerando la prima uguaglianza otteniamo

$$\frac{7{,}52}{\sin(55°)}=\frac{b}{\sin(98°)} \rightarrow b=\frac{7{,}52}{\sin(55°)}\cdot\sin(98°)\simeq\frac{7{,}52}{0{,}8192}\cdot 0{,}9902\simeq 9{,}0897\,m$$

considerando l'uguaglianza tra il primo e l'ultimo rapporto otteniamo

$$\frac{7{,}52}{\sin(55°)}=\frac{c}{\sin(27°)} \rightarrow c=\frac{7{,}52}{\sin(55°)}\cdot\sin(27°)\simeq 4{,}1674\,m$$

Riflessioni sull'uso del teorema dei seni

Problema

Risolvere il triangolo ABC sapendo che a=20cm, c=13cm e γ=36°

Dati: a= 20cm, c=13cm, γ=36° Obiettivo: ? b, α, β

Gli elementi noti non rispecchiano le condizioni sufficienti di alcuno dei criteri di congruenza, ma possiamo usare il teorema dei seni che ci assicura che in *qualunque triangolo* si ha

$$\frac{a}{\sin(\alpha)}=\frac{b}{\sin(\beta)}=\frac{c}{\sin(\gamma)} \text{ e quindi } \frac{20}{\sin(\alpha)}=\frac{13}{\sin(36°)} \rightarrow \sin(\alpha)=\frac{20\cdot\sin(36°)}{13}\simeq 0{,}9043$$

e dunque con la funzione inversa $\sin^{-1}(0{,}9043)$ possiamo ricavare l'angolo α≅ 64° e dunque β≅ 80°

Sembrerebbe tutto corretto, ma abbiamo trascurato il fatto che angoli supplementari hanno lo stesso seno dunque da $\sin^{-1}(0{,}9043)$ si può ottenere α≅ 64° oppure α≅ 116°, e dunque il triangolo non è univocamente determinato. Proseguendo nel ragionamento avremmo:

I° caso: α≅ 64° quindi il triangolo è acutangolo e β≅ 80°; possiamo determinare b applicando nuovamente il teorema dei seni $\frac{13}{\sin(36°)}=\frac{b}{\sin(80°)} \rightarrow b=\frac{13\cdot 0{,}9848}{0{,}5877}\simeq 21\ cm$

II°caso: α≅ 116° quindi il triangolo è ottusangolo e β≅ 28°; e come sopra si avrà

$$\frac{13}{\sin(36°)}=\frac{b}{\sin(28°)} \rightarrow b=\frac{13\cdot 0{,}4694}{0{,}5877}\simeq 10\,cm$$

Il problema ha due soluzioni.

Problema

Risolvere il triangolo ABC sapendo che α= 124°, a=26m., b=12m.

Dati: α= 124°, a=26m., b=12m Obiettivo: ? c, β, γ

L'angolo noto, opposto al lato a, è ottuso.

Applichiamo il teorema dei seni: $\frac{13}{\sin(124°)}=\frac{12}{\sin(\beta)} \rightarrow \sin(\beta)=\frac{12\cdot\sin(124°)}{26}\simeq$………

In questo caso non ci sono dubbi: un triangolo non può avere due angoli ottusi. Potete completare voi la soluzione e otterrete β≅……. quindi γ≅ ……. e infine c≅ ………

Problema

Risolvete il triangolo ABC sapendo che $a=9\text{m}$, $b=2\sqrt{3}$ m, $\beta=30°$

Come nel caso precedente abbiamo la misura di due lati e l'angolo opposto ad uno di essi; dunque per il teorema dei seni si ha $\frac{a}{\sin(\alpha)}=\frac{b}{\sin(\beta)} \rightarrow \frac{9}{\sin(\alpha)}=\frac{2\sqrt{3}}{\sin(30°)} \rightarrow \frac{9}{\sin(\alpha)}=\frac{2\sqrt{3}}{0{,}5} \rightarrow \sin(\alpha)=1{,}29$ impossibile!!! Il seno di un angolo ha come valore massimo 1.

Il problema non ha nessuna soluzione.

Esercizi sui triangoli generici: uso dei teoremi di Euler e di Carnot

89 Determina gli elementi incogniti di un triangolo in cui b=5, c=7, α=74°

90 In un triangolo sono noti: b=9, α=20° e β = 44°. Quanto vale la lunghezza a?

91 In un triangolo sono noti: a= 20, c=13 e β=75°. Quanto vale b?

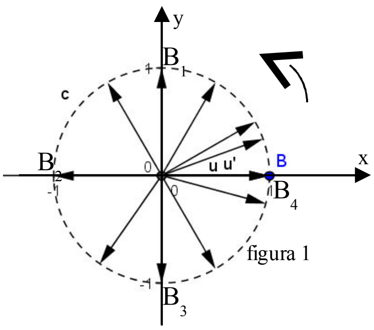
92 Determina l'angolo β di un triangolo in cui a=10 Km, b=8 km, c=12 km

93 Determina gli elementi incogniti di un triangolo in cui a=12, c=15, β=65°

94 In un triangolo sono noti: a= 20, α=35° e β=20°. Quanto vale la lunghezza b?

95 In un triangolo sono noti: b= 12, c=4 e α=40°. Quanto vale a?

►9. Le funzioni circolari



Nel riferimento cartesiano ortogonale è assegnato il vettore $\vec{u}$ di modulo unitario $(|\vec{u}|=1)$, applicato nell'origine del riferimento e con direzione e verso coincidenti con quelle dell'asse x. Il suo estremo libero è il punto B(1,0).

Facciamo ruotare $\vec{u}$ intorno all'origine in senso antiorario finché torna ad occupare la posizione iniziale, cioè quando ha compiuto una rotazione di 360°. Movendosi con continuità, l'estremo B descrive la circonferenza con centro nell'origine tratteggiata nella figura; **le componenti del vettore cambiano con continuità e dipendono dall'angolo che**, in una certa posizione, **il vettore stesso forma con l'asse delle x**. Ad esempio quando $\vec{u}$ ha descritto nella rotazione un angolo di 90°, l'estremo B si trova in $B_1(0,1)$; quando $\vec{u}$ ha descritto nella rotazione un angolo di 180°, l'estremo B si trova in $B_2(-1,0)$; quando $\vec{u}$ ha descritto nella rotazione un angolo di 270°, l'estremo B si trova in $B_3(0,-1)$; e dopo una rotazione completa (360°) torna a coincidere con la posizione iniziale $B_4 \equiv B(1,0)$

DEFINIZIONI. La **componente orizzontale** u_x del vettore unitario inclinato dell'angolo α sull'asse x, si chiama **coseno dell'angolo α**; in simboli $u_x=\cos(\alpha)$. Chiamiamo **seno dell'angolo α** la **componente verticale** u_y del vettore unitario inclinato dell'angolo α sull'asse x; in simboli $u_y=\sin(\alpha)$. Scriviamo $\vec{u}=(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ o anche $B=(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$.

Confrontando questa definizione con quanto descritto sopra possiamo innanzitutto affermare che seno e coseno di un angolo sono numeri reali positivi, negativi o nulli a seconda dell'angolo formato dal vettore e quindi della posizione del punto B sulla circonferenza:

$\alpha=0° \rightarrow B(1;0) \rightarrow \vec{u}=(\cos(0°);\sin(0°))$ quindi $\cos(0°)=1 \wedge \sin(0°)=0$

$\alpha=90° \rightarrow B(0;1) \rightarrow \vec{u}=(\cos(90°);\sin(90°))$ quindi $\cos(90°)=0 \wedge \sin(90°)=1$

$\alpha=180° \rightarrow B(-1;0) \rightarrow \vec{u}=(\cos(180°);\sin(180°))$ quindi $\cos(180°)=-1 \wedge \sin(180°)=0$

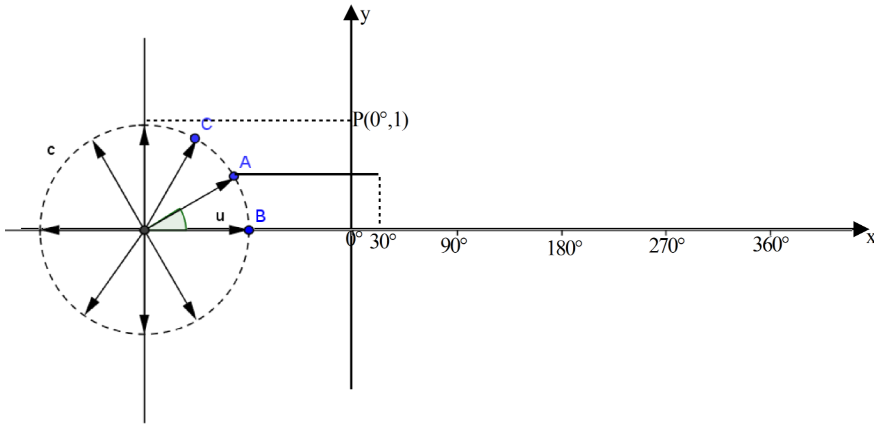
$\alpha=270° \rightarrow B(0;-1) \rightarrow \vec{u}=(\cos(270°);\sin(270°))$ quindi $\cos(270°)=0 \wedge \sin(0°)=-1$

$\alpha=360° \rightarrow B(1;0) \rightarrow \vec{u}=(\cos(360°);\sin(360°))$ quindi $\cos(360°)=1 \wedge \sin(360°)=0$

Per alcuni valori intermedi dell'angolo si possono calcolare seno e coseno dell'angolo usando metodi geometrici, per altri valori si può far uso della calcolatrice scientifica.

Comunque dai risultati sopra ottenuti, soprattutto riguardando la figura 1, possiamo affermare che qualunque sia l'angolo si hanno le disuguaglianze: $-1 \leq \sin(\alpha) \leq 1$ e $-1 \leq \cos(\alpha) \leq 1$.

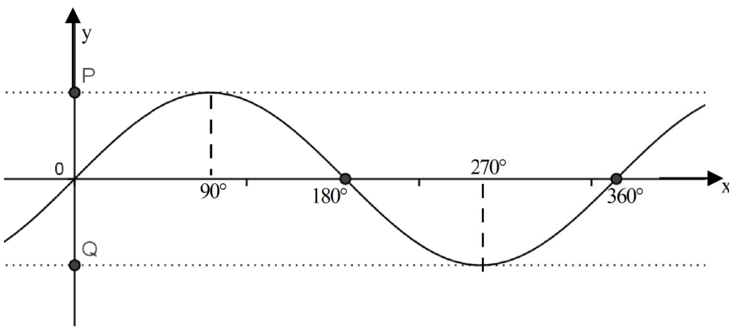
Ci proponiamo ora di tracciare il grafico della funzione y = sen(x). A questo scopo fermiamo la rotazione del vettore unitario ogni 30° (completate il disegno) e segniamo i punti A, C, ecc.



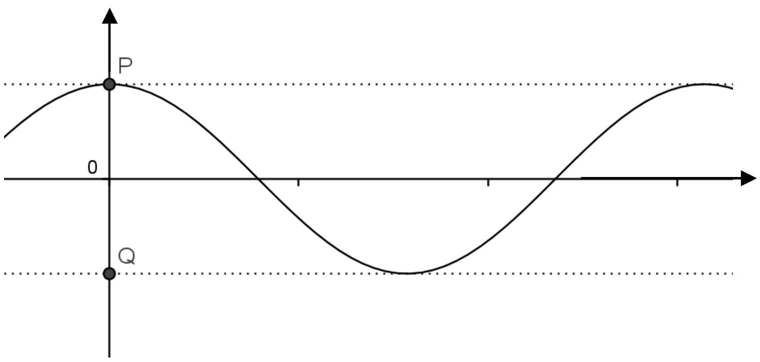
Accanto alla rotazione del vettore unitario abbiamo tracciato un riferimento cartesiano dove sull'asse x riportiamo le misure in gradi degli angoli descritti dal vettore unitario e sull'asse y è segnato il punto P di ascissa 0° e di ordinata 1. Ricordiamo che **sen(x) è l'ordinata dell'estremo libero del vettore unitario**.

Per ogni angolo x descritto riporteremo nel riferimento cartesiano sen(x). Il punto B ha ordinata nulla dunque il primo punto che dobbiamo segnare nel riferimento cartesiano per costruire il grafico di y = sen(x) è l'origine; per segnare il punto di coordinate (30°, sen(30°)) da A tracciamo la parallela all'asse x fino ad incontrare la parallela all'asse y tracciata da 30°.

Proseguite in questo modo per tutti gli altri punti della circonferenza. Unendo i punti trovati si giunge a rappresentare il grafico della funzione y = sen(x).



Noi l'abbiamo tracciato con Geogebra. Notiamo che il valore massimo 1 si ha per l'angolo di 90° mentre il minimo –1 si ha per l'angolo di 270°. Se il vettore unitario dopo un giro completo ricominciasse nuovamente a ruotare in senso antiorario (positivo), descrivendo angoli maggiori di 360°, il grafico si ripeterebbe identico al tratto compreso tra 0° e 360°. Per questo motivo diciamo che **la funzione y= sen(x) ha un andamento periodico**.



Sempre con Geogebra tracciamo il grafico della funzione y =cos(x); sfruttando quanto fatto all'inizio del paragrafo; *lasciamo al lettore di* segnare sul grafico i valori dell'angolo per cui il coseno è nullo, il valore per cui il coseno assume il valore minimo –1, il punto del grafico di ascissa =360°.

Per lo stesso discorso fatto sopra possiamo dire che **la funzione y= cos(x) ha un andamento periodico**.